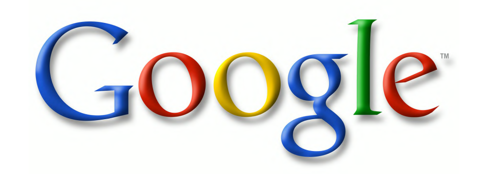


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



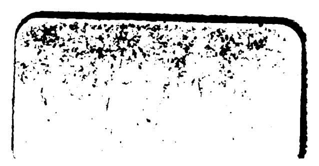
SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 8139.00.3

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.

CHRISTO ET ECCLESIAE

BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)



Elemente der Stereometrie

Von

Prof. Dr. Gustav Holzmüller
in Hagen i. W.

Dritter Teil

Die Untersuchung und Konstruktion schwierigerer Raumgebilde

Guldinsche Drehungskörper und Drehungsflächen mit ihren Verallgemeinerungen. Schraubenflächen, Röhrenflächen und ihre Verallgemeinerungen nebst ihren Inversionsverwandten. Krümmungslinien und isothermische Kurvenscharen auf diesen Flächen. Konforme Abbildungen.

Mit 126 Figuren

Leipzig
G. J. Göschensche Verlagshandlung
1902

math 8139.00.3

1907

Bowditch fund.

Alle Rechte
von der Verlagshandlung vorbehalten.

Vorwort.

Band III der Elemente der Stereometrie behandelt zunächst die Guldinschen Regeln und ihre Verallgemeinerungen. Bei den letzteren waren einige Einschaltungen über Raumkurven nötig, die sich auf Schmiegungsebenen, Krümmungskreise, Krümmungsachsen, Hauptnormalen, Binormalen, Tangenten, rektifizierende Geraden und die von ihnen gebildeten Flächen beziehen. Die Schreibweise der höheren Analysis wurde dabei auf das strengste vermieden, so dafs es sich hier, wie in späteren Abschnitten, um Differentialgeometrie im eigentlichen Sinne handelt. Es zeigt sich, dafs man z. B. den Satz von Lancret, die Sätze über die rektifizierenden Ebenen, über die Schmiegungskugeln und dergl. ganz elementar behandeln kann.

Die Animosität, mit der einige Analytiker der Elementarisierung solcher Gebiete entgegentreten, kann ich nicht als gerechtfertigt anerkennen. „Geometrica geometrice" sage ich mit Schell, dessen vortreffliche „Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung" (2. Aufl. 1898, Leipzig bei Teubner) zwar die Differentialbezeichnungen benutzt, aber diese an allen Stellen entbehren könnte, ohne schleppend zu werden, ebenso, wie sie bei den Steinerschen Arbeiten vermieden sind.

An durchgeführten Beispielen für Inhalts- und Mantelberechnungen, für die Bestimmung der Schwerpunkte für Kurven und Flächen — die Körperschwerpunkte sollen erst im Schlufsbande berücksichtigt werden — bietet der erste Abschnitt mehr als jedes mir bekannt gewordene Elementarwerk.

Einige Einschaltungen aus der Geometrie der Ebene, die in den elementaren Lehrbüchern fehlen, mufsten hier hereingezogen werden, z. B. die Krümmungskreise der Kegel-

schnitte und gewisse komplexe Schreibweisen, die die bekannten Analogieen zwischen Kreis und gleichseitiger Hyperbel aufklären In einem späteren Abschnitt mufsten auch die Eigenschaften der logarithmischen Spiralen und Doppelspiralen abgeleitet werden.

Unter anderem gelang es, die Fläche des Drehungsparaboloids und die Schwerpunkte der Parabelbogen elementar zu bestimmen. Die Methode wird im Schlufsbande dahin verallgemeinert werden, dafs jeder ebenen Kurve sich zwei Flächen derart zuordnen lassen, dafs die Formeln für die Rektifikation der Kurve und für den Inhalt der Fläche identisch werden. Es handelt sich also um ein für die Ausdehnung der Elemente wichtiges und allgemeines Prinzip. Die Schwerpunktskoordinaten des Bogens stimmen mit je einer der Schwerpunktskoordinaten der beiden Flächen überein.

Auch die verschiedenen Anwendungen der Guldinschen Regeln auf Schraubengewinde sind von einigem Interesse. Im Anschlufs an diese geht der zweite Abschnitt zu Untersuchungen über Schraubenflächen über, wobei sich zeigt, dafs die Bourschen Sätze über die Möglichkeit der Abwickelung der Schraubenflächen auf bestimmte Drehungsflächen der elementaren Behandlung fähig sind. So werden z. B. die Schraubenregelflächen im allgemeinen auf das Drehungshyperboloid (mit einem Mantel) abgewickelt, die Minimalschraubenregelfläche als Ausnahme auf das Katenoid, die abwickelbare Schraubenregelfläche auf die doppelt bedeckte Ebene (aufserhalb eines Kreises) als Sonderfall des Hyperboloids. Dadurch ist zugleich die Möglichkeit der konformen Abbildung auf den Parallelstreif und die Ebene nachgewiesen, damit auch die Möglichkeit, die Geometrie der Ebene, namentlich die Geometrie der Lage, auf die genannten Flächen zu übertragen. An den Beispielen des Katenoids und der Minimalschraubenröhrenfläche wird diese Art der Übertragung ausführlich durchgeführt, damit der Leser einen Einblick in diese schönen Gebiete erhalte, die in Elementarwerken in der Regel auf den Cylinder, den Kegel und die Kugel beschränkt werden. Der Koordinatenzusammenhang wird auf Tabellen übersichtlich zusammengestellt. Die Dupinschen Cykliden werden schon im

ersten Bande in „Quadrate“ eingeteilt und damit auf das Rechteck abgebildet. Also auch hier zeigt sich die Möglichkeit einer Differentialgeometrie, die ganz unabhängig von der Sprache der höheren Analysis ausgebaut werden kann. Die Lehre von den Isothermenscharen, von den Strom- und Niveaulinien stationärer elektrischer Strömungen auf den genannten Oberflächen läfst sich also ebenfalls elementar behandeln. Das Gebiet meiner Potentialtheorie in elementarer Darstellung (Leipzig, bei Teubner) ist daher einer grofsen Ausdehnung fähig.

Die Schraubenflächen spielen zwar in der darstellenden Geometrie eine bedeutungsvolle Rolle, die wichtigeren auf ihnen verlaufenden Kurven werden aber in den Lehrbüchern nur selten dargestellt. Gerade die beiden Scharen von Krümmungslinien und die Scharen von Schraubenlinien und deren Orthogonalkurven nebst den Diagonalscharen geben die dankbarsten Übungen und lassen die Flächen in geradezu überraschender Weise plastisch erscheinen. Man vergleiche dazu die Zeichnungen der abwickelbaren Schraubenregelfläche und vor allem der Schraubenröhrenfläche. Bei den Schraubenröhrenflächen spielen die vom Verfasser eingeführten Krümmungscykliden eine wichtige Rolle. Sie ermöglichen eine einfache Untersuchung der Krümmungslinien und des Gaufsschen Krümmungsmafses.

Der dritte Abschnitt behandelt kurz die Inversionsverwandten der Schraubenflächen und der auf ihnen verlaufenden Kurvenscharen. Die Krümmungscykliden gehen dabei in Dupinsche über. Dabei ergeben sich zahlreiche Übungsaufgaben für die darstellende Geometrie, die zur Kräftigung des räumlichen Vorstellungsvermögens dienen mögen. Am Schlufs werden einige Bemerkungen über Transformationsgruppen im Sinne von Lie gemacht.

Da bei der Inversion die einbeschriebenen Kugeln der Schraubenröhrenfläche zwar Kugeln bleiben, aber ihre Gröfse verändern, so ist es jetzt am Platze, die Röhrenflächen zu verallgemeinern, d. h. solche mit gesetzmäfsig veränderlicher Kugel zu untersuchen. Als schönstes Beispiel drängt sich von selbst die Gruppe der logarithmischen Spiralröhrenflächen und ihrer Inversionsverwandten auf, denn die auf den ersteren ver-

laufenden Kegelloxodromen geben bei der Projektion auf die Symmetrie-Ebene logarithmische Spiralen einer Schar, die sich bei der Inversion von einem Punkte der Ebene aus in Bicirkularspiralen (logarithmische Doppelspiralen) verwandeln. Die Kreisschnitte und die einbeschriebenen Kugeln bleiben solche und definieren die neuen Flächen, deren Krümmungslinien nun leicht zu behandeln sind, während die Kugelloxodromen in Loxodromen gewisser Cykliden oder in Loxodromen der Bilder gewisser Cylinder mit spiralischer Grunfläche übergehen. Die Inversion von beliebigen Punkten der Ebene aus giebt drei Haupttypen solcher Flächen, die sich bequem durch Modelle veranschaulichen lassen. Macht man aber einen beliebigen Raumpunkt zum Inversionscentrum, so verwandeln sich die Doppelspiralen in gewöhnliche oder verallgemeinerte Kegelloxodromen, und an die Stelle der Symmetrie gegen die Ebene tritt Inversion gegen die aus ihr entstehende Kugel. Die Kreisschnitte als solche bleiben erhalten. Damit entstehen die allgemeinsten Formen dieser transscendenten Flächen, über die ich vor Jahren im Journal für reine und angewandte Mathematik berichtete. Die Krümmungscykliden (Dupinscher Art) sind auch bei ihnen ein wichtiges Hilfsmittel der Konstruktion und Untersuchung. Die Figuren 120, 122, 123, 124, 125 deuten einige der Formen an, die für die darstellende Geometrie geradezu prachtvolle Übungsaufgaben darbieten. Beiläufig sei als Ergänzung folgende Aufgabe empfohlen. Man biege die Hälfte der Figur 122 zu einem Kegel mit dem Sektorwinkel *180*° um, so, dafs der Schnittpunkt der beiden Geraden zur Spitze wird. Dabei schliefsen sich die Kurven so einander an, dafs die Kegelfläche in ein System von Quadraten eingeteilt wird, nicht nur durch die umgebogene Doppelschar von Kreisen, sondern auch durch die beiden Systeme von Doppelspiralen. Durch die ganz elementar zu behandelnden konformen Abbildungen $Z = \sqrt{z}$, $Z = \sqrt[3]{z}$, $Z = \sqrt[n]{z}$ kann man statt des Sektorwinkels *180*° einen beliebigen anderen erhalten, also ein ganz allgemeines System von Isothermen auf den Kegelflächen herstellen. Der Kegel ist leicht durch Inversion in Cykliden besonderer Art zu verwandeln. Damit ist eine neue Gruppe interessanter Übungsaufgaben für die darstellende Geometrie

und die mathematische Physik geschaffen. Schneidet man ferner die Figur längs einer Geraden bis zur Mitte ein und klebt man eine Figur derselben Art in geeigneter Weise an, mit der ebenso zu verfahren ist, so erhält man zunächst eine Riemannsche Windungsfläche mit quadratischer Einteilung. Schneidet man aber einen Mittelpunktskreis, z. B. den durch die beiden „Pole" gehenden aus, so entstehen durch geeignete Biegung z. B. abwickelbare Schrauben-Regelflächen mit quadratischer Einteilung durch die gezeichneten Kurvensysteme und damit ein Modell von sehr instruktiver Art, welches noch mit Hilfe der obigen Abbildungen, oder auch der Abbildungen $Z = z^2$, z^3, z^n verallgemeinert und schliefslich durch Inversion umgestaltet werden kann. Auch die isothermische Spiegelung gegen jedes Individuum der behandelten Isothermenscharen ist elementar durchführbar.

Auch an diesen Beispielen erkennt man den unerschöpflichen Reichtum an lohnenden Aufgaben und interessanten Raumgebilden, der ohne jede Benutzung der höheren Analysis dem Leser zugänglich gemacht wird.

Mit einigen Bemerkungen über sonstige Röhrenflächen und einige Gebilde anderer Art schliefst der Band ab.

Wenn nun behauptet werden sollte, die höhere Analysis würde dies alles kürzer abmachen können, so ist zu entgegnen, dafs auch die hier angewandten Betrachtungen erheblich abgekürzt werden können. Der rein pädagogische Charakter des Werkes aber verlangte eine gewisse Ausführlichkeit der Darstellung und ein näheres Eingehen auf manche Einzelheiten. Es handelt sich eben nur um ein Elementarwerk, allerdings um ein solches, welches erheblich weiter geht, als die bisher erschienenen.

Von einer Erschöpfung des Gegenstandes kann schon aus Raumgründen keine Rede sein. Als instruktive Übung könnte die elementare Untersuchung der hier behandelten Flächengruppen hinsichtlich der geodätischen Linien und der geodätischen Abbildung empfohlen werden.

Dafs zur Unterstützung der räumlichen Anschauung gerade für das elementare Gebiet eine grofse Anzahl von Figuren nötig war, ist selbstverständlich. Der Verlagsbuchhandlung sage ich für die Bereitwilligkeit, mit der sie auf alle meine Wünsche einging, den verbindlichsten Dank.

Dafs die Figuren mit Sorgfalt hergestellt sind, werden auch die Gegner von Elementarwerken anerkennen.

Das Buch enthält, wie jedes Lehrbuch, viel Altes, aber auch mancherlei Neues. Manchen der eingeschlagenen elementaren Wege darf ich als mein geistiges Eigentum bezeichnen. Die logarithmischen Spiralen und Doppelspiralen behandelte ich schon im Jahre 1871. Vergl. Band 16 der Schlömilchschen „Zeitschrift für Mathematik und Physik“. Über die logarithmische Spiralröhrenfläche und ihre Inversionsverwandten machte ich schon dort Andeutungen, die ich in Band 94 des Journals für reine und angewandte Mathematik fortsetzte. Dort deutete ich auch die Benutzung der Dupinschen Cykliden als Krümmungscykliden an. In Band 44 der „Zeitschrift für Mathematik und Physik“ (Mehmke) 1899 findet man auf Seite 194 bis 213 die Fortsetzung dieser Untersuchungen. Die Spiralröhrenflächen und ihre Inversionsverwandten sind meines Wissens vor diesen Abhandlungen noch nirgends behandelt worden. In der in der Ausarbeitung befindlichen zweiten Auflage meiner Einführung in die isogonalen Verwandtschaften und konformen Abbildungen, die zuerst im Jahre 1882 bei Teubner in Leipzig erschien, werde ich den Gegenstand auf analytischem Wege weiter verfolgen. — Wo ich schon bekanntes behandle, ist in den geschichtlichen Bemerkungen das Nötige über die Verfasser gesagt. Sollte mir ein Vorarbeiter unbekannt geblieben sein, so wäre ich nur dankbar für jede entsprechende Mitteilung.

Möge auch dieser dritte Band zeigen, in wie fruchtbarer Weise die Elemente nach verschiedenen Richtungen hin erweitert werden können. Der schon im Druck befindliche Schlufsband wird ein anderes Gebiet in entsprechender Weise behandeln.

Hagen i. W., im Mai 1902.

Dr. G. Holzmüller.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Die Guldinschen Regeln für Drehungskörper, Drehungsflächen und allgemeine Raumgebilde.

§§ 1 bis 98.

Zweiter Abschnitt.

Die Schraubenflächen, ihre Abwickelbarkeit auf Drehungsflächen, ihr Zusammenhang mit der Guldinschen Flächenformel und ihre konforme Abbildung auf die Ebene und auf andere Flächen.

§§ 99 bis 186.

Dritter Abschnitt.

Die Inversionsverwandten der Schraubenlinien und Schraubenflächen. Bemerkungen über Verwandtschaften und Transformationsgruppen.

§§ 187 bis 202.

Vierter Abschnitt.

Verallgemeinerte Röhrenflächen und ihre Inversionsverwandten. §§ 203 bis 270.

Übersicht über die Anwendungen auf verschiedene Gebiete.

Mechanik. Schwerpunktsberechnung für ebene Flächen und Kurven mit Hilfe der Guldinschen Regeln; vgl. den ganzen Abschnitt I. Berechnung des Gewichtes, des spezifischen Gewichtes, Tiefe des Eintauchens, Berechnung von Massen; vergl. §§ 52, 54, 65. Berechnung von Centrifugalkräften und statischen Momenten, § 65. Kettenlinie und Katenoid, § 122. Plateausche Versuche für Katenoid und Minimalschraubenfläche, von § 115 ab.

Maschinenbau. Schraubenlinien und Schraubengewinde, §§ 36 bis 38. Flaches, scharfes, trapezisches Gewinde, Hohlkehlen, §§ 94 bis 98. Schraubengewinde veränderlichen Steigungswinkels, § 41. Profilformen für technische Drehungskörper, Schwungräder, Seilscheiben, Säulen, § 64. Schraubenregelflächen, §§ 99 bis 112. Minimal-Schraubenregelfläche und Katenoid, §§ 121 bis 163. Abwickelbare Schraubenregelfläche, §§ 162 bis 168. Schraubenröhrenfläche, §§ 169 bis 186.

Bautechnik. Säulen, Kapitäle, Hohlkehlen, Tunnel- und Kanalisationsquerschnitte. Gewisse Schraubengewinde, § 64. Gewundene Säulen § 98. Ornamentik der quadratischen Einteilungen.

Kunstgewerbe. Schraubengewinde konstanter und veränderlicher Steigung, § 41. Gefäſsformen, § 64. Oberflächen im Kunstgewerbe, § 65, 98. Die Spiralröhrenfläche als Füllhorn, Fig. 120. Ornamentik der quadratischen Einteilungen der Ebene (Fig. 122), und krummer Oberflächen. Die ganze griechische Ornamentik der Mäander, Wasserwellenbänder, Münzschnuren (Geldrollenornamente),

Eierstäbe, Flechtbänder, Perlschnuren, auch von gotischen Maſswerken, läſst sich mit Hilfe der quadratischen Einteilungen streng in neue Formen übertragen. Dies gilt von allen sogen. Quadratfüllungen. Die durch Kreisbüschel und Kreisscharen, im besonderen Falle konzentrische Kreise mit den Radien, die durch logarithmische Spiralen und Doppelspiralen, die durch konfokale Ellipsen und Hyperbeln, durch konfokale Lemniskaten und das Hyperbelbüschel gebildeten Quadrate sind Beispiele für die Ebene. Die quadratischen Einteilungen der Drehungsflächen durch Meridiane und Parallelkreise oder durch ihre Loxodromen gebildeten (Cylinder, Kegel, Kugel, Drehungscykliden, Fig. 23, Katenoid) sind Beispiele dafür, ebenso die der Schraubenflächen, der Spiralröhrenflächen und ihrer Inversionsverwandten. Gebilde, wie das in Fig. 123 dargestellte, sind als Reliefschmuck brauchbar. Dasselbe gilt von allen orthogonalen Doppelscharen, von Isothermen auf gekrümmten Oberflächen. Vergl. Vorwort.

Physik. Vergl. Mechanik, besonders das über Plateausche Versuche und Minimalflächen Gesagte, § 115. Strom- und Niveaulinien für stationäre elektrische Strömungen auf der Ebene und allen bisher besprochenen Oberflächen. (Bezieht sich auf alle behandelten Isothermenscharen und auf gewisse Rechtecksteilungen des Raumes.)

Darstellende Geometrie. Fast sämtliche Zeichnungen und viele Stellen des Textes sind Beispiele zu dieser Wissenschaft, besonders die Figuren 14 bis 18, 23, 91, 96 bis 104, 108 bis 111, 118 bis 126; andere, wie Fig. 35 bis 47 geben Anlaſs zu entsprechenden Übungen. Im Texte handelt es sich um Affinitäts- und Kollineationsbemerkungen, §§ 66 bis 73, um die Abwickelbarkeit aller Schraubenflächen auf Drehungsflächen, z. B. der Schraubenregelflächen auf das einmantelige Hyperboloid, auf das Katenoid und auf die Ebene, um die korrekte Konstruktion der Schraubenflächen in Grund- und Aufriſs und die Zeichnung der Spiralröhrenflächen und ihrer Inversionsverwandten.

Geschichtliche Nachweise.

Euler und Baltzer über krumme Cylinder, § 7. Über Raumkurven, § 30. Über die Guldinschen Regeln und ihre Erweiterungen, § 51. Bemerkungen von Poncelet und Steiner über den Wert der Transformationen, § 256. Ausführliche Nachweise über Raumgeometrie, besonders Kettenlinie, Katenoid, Minimalschraubenregelfläche, Minimalflächen im allgemeinen, pseudosphärische Schraubenflächen, Röhrenflächen, Krümmungsmaſs, geodätische Linien, Krümmungslinien, Schraubenbewegungen im Raume, Transformationsgruppen u. dergl., §§ 261 bis 270.

Erster Abschnitt.

Die Guldinschen Regeln für Drehungskörper, Drehungsflächen und allgemeine Raumgebilde.

α) Inhaltsberechnung für Guldinsche Drehungskörper.

§ 1) Der konzentrische Hohlcylinder. Ein Rechteck ABB_1A_1 (Fig. 1) drehe sich um eine in seiner Ebene liegende Gerade PQ, die einer seiner Seiten, z. B. $AB = b$, parallel ist und ganz aufserhalb des Rechtecks liegt. Bei voller Umdrehung entsteht dann ein konzentrischer Hohlcylinder, bei unvollendeter Umdrehung ein Sektor dieses Körpers. Der Inhalt des Hohlcylinders ist

$$J = Gh = \pi (r^2 - r_1^2)\, b$$
$$= \pi (r + r_1)(r - r_1)\, b$$
$$= \pi (r + r_1)\, ab$$
$$= 2\pi \frac{r + r_1}{2} F,$$

Fig. 1.

wo $a = A_1A$, F die Rechtecksfläche, $r = CA$, $r_1 = CA_1$ ist.

Nun ist $\frac{r+r_1}{2}$ gleich dem Schwerpunktsabstand $ES = \varrho$. Also kann man auch schreiben

$$J = 2\pi\varrho F = wF,$$

wo w den Schwerpunktsweg bedeutet. Man hat also für diesen Fall den Satz:

Der Körperinhalt ist gleich dem Produkte aus Schwerpunktsweg und Fläche,

oder in abgekürzter Redeweise:

Inhalt gleich Schwerpunktsweg mal Fläche.

Ist die Umdrehung nur der n^{te} Teil einer vollständigen, so wird der Körperinhalt nur der n^{te} Teil des Hohlcylinders. Da aber auch der Schwerpunktsweg nur der n^{te} Teil des vollen Weges ist, so bleibt der Satz auch für unvollständige Umdrehung bestehen.

§ 2) Ausdehnung des Satzes auf mehrere Rechtecke. In Figur 2 sind mehrere Rechtecke solcher Art gezeichnet. Sind F_1, F_2, $F_3, \ldots, F_n$ ihre Flächen und $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_n$ ihre Schwerpunktsabstände von der Drehungsachse PQ, so ist der Inhalt des entstehenden Drehungskörpers

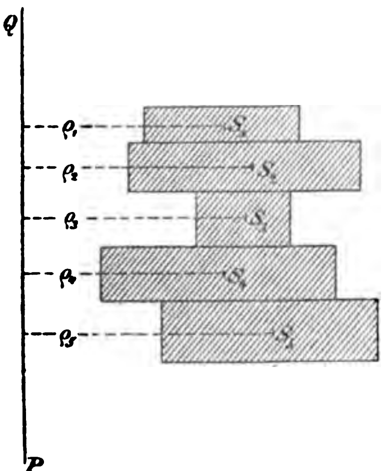


Fig. 2.

$$J = 2\pi\varrho_1 F_1 + 2\pi\varrho_2 F_2 + \ldots + 2\pi\varrho_n F_n$$

oder

$$J = 2\pi[\varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2 + \ldots + \varrho_n F_n] = 2\pi m,$$

wo m die Summe der Produkte aus jedem Rechteck und seinem Schwerpunktsabstande bedeutet. (Vergl. Band 2, Abschn. II über abgeschrägte Prismen und Cylinder.) Dieser Ausdruck ist das geometrisch gedeutete statische Moment der sämtlichen Flächen in Bezug auf die Schwerpunktsachse und als solches gleich der Summe der einzelnen statischen

Momente.*) Man kann also für m den Ausdruck $\varrho F = \varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2 + \ldots + \varrho_n F_n$ setzen, wo F die Gesamtfläche, ϱ ihren Schwerpunktsabstand von der Achse PQ bedeutet. Demnach ist auch hier

$$J = 2\pi\varrho F = wF,$$

d. h. **Inhalt gleich Schwerpunktsweg mal Fläche.**

§ 3) **Ausdehnung des Satzes auf ebene Flächen von beliebiger Gestalt.** Ist die ebene Fläche F von beliebiger Gestalt, so läfst sie sich mit Rechtecken von der Lage der früher betrachteten ausfüllen. In die am Rande übrig bleibenden kleinen „Dreiecke" bringe man kleinere und kleinere Rechtecke dieser Art, so dafs der nicht ausgefüllte Rest schliefslich unendlich klein gegen die Gesamtfigur wird. [Jedes der kleinen rechtwinkligen „Dreiecke" hat den Inhalt $F_n = \frac{1}{2} gh$, wo g und h unendlich klein werden, die Fläche also unendlich klein zweiter Ordnung wird. Die Anzahl dieser Randdreiecke ist aber unendlich klein erster

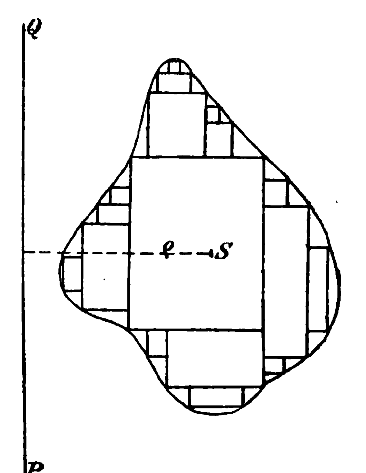


Fig. 3.

*) Denkt man sich in den Flächen F_1 und F_2 sehr zahlreiche homogen verteilte Punkte, in der einen in der Anzahl μF_1, in der andern in der Anzahl μF_2, so dafs die Zahlen sich wie die Flächen verhalten, so ist der mittlere Abstand ϱ_1 für die Punkte von F_1 (nach Bd. I § 49) zu berechnen aus $\mu F_1 \varrho_1 = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_{\mu F_1}$, für die andere ϱ_2 aus $\mu F_2 \varrho_2 = r_1' + r_2' + \ldots + r'_{\mu F_2}$. Für die Gesamtfläche folgt der mittlere Abstand ϱ aus $\varrho\,(\mu F_1 + \mu F_2) = (r_1 + r_2 + \ldots + r_{\mu F_1}) + (r_1' + r_2' + \ldots + r'_{\mu F_2})$. Hier ist die rechte Seite gleich der Summe der rechten Seiten der vorigen Gleichungen. Folglich ist auch für die linken Seiten $\varrho\,(\mu F_1 + \mu F_2) = \varrho_1 \mu F_1 + \varrho_2 \mu F_2$, oder $\varrho\,(F_1 + F_2) = \varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2$. Ebenso ist für n Flächen derselben Ebene $\varrho(F_1 + F_2 + \ldots + F_n) = \varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2 + \ldots + \varrho_n F_n$, d. h. **das gesamte statische Moment ist gleich der Summe der einzelnen statischen Momente.** Dafs aber der Punkt mittleren Abstandes der Schwerpunkt ist, folgt aus Bd. I § 49.

Ordnung, also wird die Summe der kleinen Inhalte unendlich klein erster Ordnung. Symbolisch geschrieben $\frac{1}{\infty^2}\cdot\infty=\frac{1}{\infty}$.] Man kann also den Einflufs der Randfiguren schliefslich vernachlässigen. Da es sich aber jetzt nur noch um Rechtecke handelt, so bleibt der Satz auch hier bestehen.

Die nach Guldin benannte aber schon dem Pappus bekannte „Regel" läfst sich also folgendermafsen ausdrücken:

Dreht sich eine beliebig gestaltete ebene Fläche um eine in ihrer Ebene gelegene Achse, die die Fläche nicht schneidet, so ist der Inhalt des entstehenden Drehungskörpers gleich dem Produkte aus Flächeninhalt und Schwerpunktsweg. Dies gilt sowohl von vollständiger, als auch von unvollständiger Umdrehung. Die Guldinsche Inhaltsformel für volle Umdrehung ist daher

1) $$J=2\pi\varrho F=wF.$$

Bemerkungen. a) Bedenkt man, dafs der Schwerpunkt der Punkt mittleren Abstandes ist, so erscheint es als selbstverständlich, dafs er der Punkt mittleren Weges wird. Jedes der Rechtecke, die jetzt als unendlich klein zweiter Ordnung und als gleich grofs angesehen werden sollen, giebt bei unendlich kleiner Bewegung, die als geradlinig angesehen werden darf, einen abgeschrägten Cylinder, der unendlich klein dritter Ordnung ist. Die Summe der Cylinderinhalte ist gleich der gesamten Grundfläche multipliziert mit der mittleren Höhe. (Vgl. Bd. II, von Seite 73 ab, wo die abgeschrägten Cylinder behandelt werden.)

b) Aus $J=2\pi\varrho F$ folgen die Gleichungen

2) $$\varrho=\frac{J}{2\pi F}$$

und

3) $$F=\frac{J}{2\pi\varrho}=\frac{J}{w}.$$

Beide kann man als Umkehrungen der Guldinschen Regel auffassen. Kennt man den Inhalt des Drehungskörpers und den der gedrehten Fläche, so kann man nach 2)

den Schwerpunktsabstand ϱ bestimmen. So kennt man z. B. den Inhalt der Kugel und den der Halbkreisfläche, aus der sie durch Drehung um den Durchmesser entsteht, also mufs der Schwerpunkt der Halbkreisfläche, wie in den Beispielen gezeigt werden soll, vom Mittelpunkte den Abstand $\varrho = \frac{4r}{3\pi}$ haben. Die Formel 2) findet häufig, die Formel 3) seltener Anwendung.

§ 4) **Ausdehnung des Satzes auf den Fall, dafs die Fläche von der Drehungsachse geschnitten wird.** In diesem Falle sind die Abstände teils positiv, teils negativ aufzufassen. Der Ausdruck $\varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2$ geht also, wenn die ϱ und die F positive Gröfsen sein sollen, in $\varrho_1 F_1 - \varrho_2 F_2$ über, was ganz dem Verhalten der statischen Momente in der Mechanik entspricht. Der Ausdruck für den Inhalt wird also

4) $J = 2\pi\varrho F = 2\pi(\varrho_1 F_1 \dot{-} \varrho_2 F_2)$
$= 2\pi m,$

wobei m das statische Moment der Fläche in Bezug auf die Drehungsachse bedeutet.

Fig. 4.

Geht demnach die Drehungsachse durch den Schwerpunkt selbst, wobei der mittlere Abstand $\varrho = 0$ wird, wird für diesen Fall der Inhalt des Drehungskörpers gleich Null.

Die Betrachtung dieser neuen Fälle ist wichtig wegen des nachstehenden Satzes, der im Hinblick auf seine Bedeutung volle Allgemeinheit erhalten soll.

§ 5) **Vergröfsert man den Abstand der Drehungsachse vom Schwerpunkte der Fläche F um $\pm e$, so nimmt der Inhalt des Drehungskörpers um $\pm 2\pi e F$ zu.** Der Inhalt geht nämlich von $2\pi\varrho F$ über in $2\pi(\varrho \pm e) F$, die Zunahme ist also gleich der Differenz $\pm 2\pi e F$. Man hat daher die Gleichung

5) $$J_1 = J \pm 2\pi e F.$$

Wichtig ist dabei, dafs man die Zunahme berechnen kann, ohne die Lage des Schwerpunktes, d. h. ohne die Gröfse des Abstandes ϱ zu kennen. Man erhält vielmehr durch den Satz ein neues Mittel, diesen Abstand zu bestimmen, sobald man J und F kennt.

Setzt man nämlich $J_1 = 0$, so geht die neue Achse durch den Flächenschwerpunkt, und die nötige Verschiebung e berechnet sich aus

6) $$J - 2\pi e F = 0$$

als

$$e = \frac{J}{2\pi F},$$

was in der That mit Gleichung 2) übereinstimmt.

Soll z. B. ein Halbkreis um eine Achse rotieren, die seinem Durchmesser parallel ist und von diesem den Abstand $\pm e$ hat, so kann man den Inhalt des entstehenden Drehungskörpers nach Gleichung 5) sofort als

$$J_1 = \frac{4\pi}{3} r^3 \pm 2\pi e \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4\pi}{3} r^3 \pm \pi^2 e r^2$$

oder auch als

$$J_1 = \pi r^2 \left[\frac{4}{3} r \pm \pi e\right]$$

hinschreiben, ohne den Schwerpunktsabstand ϱ zu kennen. Denn $J = \frac{4\pi}{3} r^3$ ist bekannt als Inhalt der durch Drehung der Halbkreisfläche um den Durchmesser entstehenden Kugel, $F = \frac{\pi r^2}{2}$ als Fläche des Halbkreises. Will man aber den Abstand des Schwerpunktes der Halbkreisfläche haben, so setze man (für den Fall mit $-e$) $J_1 = 0$, d. h. $\pi r^2 \left[\frac{4}{3} r - \pi e\right] = 0$ oder $\frac{4}{3} r - \pi e = 0$, was $e = \frac{4r}{3\pi}$ als den gesuchten Abstand giebt.

Die Kenntnis des Satzes 5) erspart in zahlreichen Fällen viel Rechnung.

β) Die einfachsten Verallgemeinerungen der Guldinschen Inhaltsformel.

§ 6) **Ausdehnung der Guldinschen Inhaltsformel auf den Fall, dafs die Fläche F während der Achsendrehung in ihrer Ebene Drehungen um den Schwerpunkt macht.** Jeder der angedeuteten Lagen der Fläche F würde (ohne solche Schwerpunktsdrehungen) bei Achsendrehung um dieselbe Gerade ein besonderer Drehungskörper entsprechen. Jeder hat bei voller Umdrehung denselben Inhalt $J = 2\pi\varrho F$, bei unvollkommener ist $J = 2\varrho\widehat{\alpha}F$. Nun habe ein Körper folgende Entstehung: Für die Anfangslage von F bilde man den Drehungssektor für einen kleinen Bogen*) $\widehat{\alpha}_1$, so dafs sein Inhalt ist

1) $$J = \varrho\widehat{\alpha}_1 F = w_1 F.$$

Jetzt drehe sich die Fläche F in der ihrer Schlufslage entsprechenden Ebene um ihren Schwerpunkt, und zwar um einen beliebigen Winkel. Dann drehe sie sich um die erste Achse PQ weiter um einen Bogen $\widehat{\alpha}_2$. Der neue Sektor erhält den Inhalt:

$$J_2 = \varrho\widehat{\alpha}_2 F = w_2 F.$$

So fahre man fort bis

$$J_n = \varrho\widehat{\alpha}_n F = w_n F.$$

Der Gesamtkörper hat dann den Inhalt

$$J = J_1 + J_2 + \ldots + J_n = \varrho F(\widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_2 + \ldots + \alpha_n)$$
$$= F(w_1 + w_2 + \ldots + w_n) = wF,$$

wenn w den Gesamtweg des Schwerpunkts bedeutet. **Der Inhaltssatz bleibt also trotz der neuen Drehungen bestehen.**

Sind nun die Bogen $\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \ldots, \widehat{\alpha}_n$ unendlich klein und auch die Drehungen von F in seiner Ebene unendlich klein, so erhält man neben der stetigen Drehung um PQ ein stetiges Drehen der Fläche F in der eigenen Ebene um den Schwerpunkt, oder um die (veränderliche) Schwerpunktsachse, die stets normal zur Ebene bleibt. Bei dieser Bezeichnungsweise erhält man folgenden Satz:

---

*) Es handelt sich um Bogen des Einheitskreises, die oft auch als Winkel bezeichnet werden, obgleich die Proportion $\widehat{\alpha} : \pi = \alpha^0 : 180^0$ besteht, so dafs $\widehat{\alpha} = \pi \frac{\alpha^0}{180^0}$ ist.

Die Guldinsche Inhaltsformel bleibt bestehen, wenn während der Drehung um die feste Achse die bewegte Fläche sich irgendwie um die zu ihr normale Schwerpunktsachse dreht.

Gehört z. B. zu jeder Drehung vom Betrage $\frac{2\pi}{n}$ um die Achse PQ eine Drehung vom Betrage $\frac{2\pi}{m}$ um jene Schwerpunktsachse, so dafs also **jeder Punkt der Fläche eine Art von Schraubenbewegung um eine kreisförmige Spindel macht, so bleibt der Guldinsche Inhaltssatz bestehen.** Dabei kann z. B. auch $m = n$ sein. Die Geltung der Regel wird dadurch ganz erheblich ausgedehnt.

§ 7) **Ausdehnung des Guldinschen Inhaltssatzes auf den Fall, dafs der Schwerpunkt der Fläche sich stets senkrecht gegen deren Ebene und zwar in beliebiger ebener Kurve bewegt.***) Die Bewegung des Schwerpunktes S geschehe zunächst auf einzelnen Kreisbogen $w_1, w_2, w_3, w_4, \ldots$ von verschiedenen Radien nach $S_1, S_2, S_3, \ldots$ hin und stets in derselben Ebene. Die Mittelpunkte der einzelnen Bogen seien $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \ldots$ Senkrecht zur Ebene hat man durch $\mu_1, \mu_2, \ldots$ gehende Gerade zu

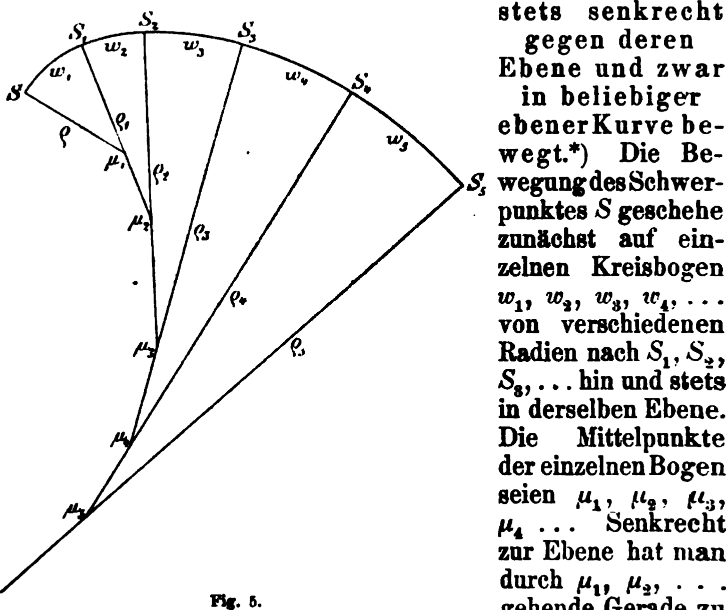


Fig. 5.

*) Die Paragraphen 7 bis 41 können überschlagen werden, wenn man sich nur auf Kreisbewegungen des Schwerpunkts beschränken will. Da aber viele Lehrbücher und Aufgabensammlungen irrige Behauptungen aufstellen, soll das Allgemeine gründlicher untersucht werden.

denken, welche die Drehungsachsen $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, ... für die Bewegungen der Fläche F sind. Für jeden Sektor des entstehenden Körpers gilt die Inhaltsformel $J_1 = w_1 F$ bezw. $J_2 = w_2 F$, u. s. w. Der Inhalt des Gesamtkörpers wird also

$$J = J_1 + J_2 + \ldots = F(w_1 + w_2 + \ldots) = Fw,$$

wobei w den Gesamtweg bedeutet. Die Formel bleibt also bestehen.

Macht man nun die Bogen w unendlich klein, so erhält man als Schwerpunktsweg eine Kurve, die ihre Krümmung von Punkt zu Punkt wechselt. Auch die μ bilden eine Kurve, die sogenannte Evolute, während die Punkte S die sog. Evolvente bilden. Die Krümmungsradien $S\mu_1$, $S_1\mu_2$, $S_2\mu_3$ ... oder $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ ... sind Normalen der Evolvente und zugleich Tangenten der Evolute. Die auf der Ebene in den Berührungspunkten dieser Tangenten errichteten Lote heifsen die Krümmungsachsen für die stattfindende Bewegung der Fläche. Sie bilden den zur Evolute gehörigen Cylinder.

Da alle Punkte der Fläche F sich für jede Lage um dieselbe Krümmungsachse drehen, bewegen sie sich sämtlich senkrecht gegen die Ebene von F. Sie beschreiben also Parallelkurven. Der entstehende Körper wird von einer sog. Kanalfläche (oder Röhrenfläche) mit ebenem Schwerpunktswege begrenzt. Für solche Kanalflächen gilt also die Formel $J = wF$.

Aber sie gilt nach § 6 auch dann, wenn die Fläche während ihrer Drehungen um die Krümmungsachsen noch Drehungen in ihrer Ebene um den Schwerpunkt vollführt.*) Dabei hören jedoch die Wege der einzelnen Punkte auf, Parallelkurven zu sein. Die Grundfläche des entstehenden Körpers könnte dann als eine ver-

---

*) Baltzers Elemente der Math. Bd. II. 3. Aufl. schliessen auf Seite 268 diese Fälle aus, und zwar im Anschlufs an Eulers Abhandlung „über krumme Cylinder", 1778, Nov. Act. Petrop. 12, Seite 91. Hier und im folgenden wird gezeigt, dafs dieses Ausschliefsen ungerechtfertigt ist, sobald es sich nur um die Bestimmung des körperlichen Inhalts handelt. Gerechtfertigt ist es, sobald die Oberfläche des Körpers berechnet werden soll.

allgemeinerte Kanalfläche ebenen Schwerpunktsweges bezeichnet werden.

Die untersuchten Flächen der ersten Art lassen sich durch die Parallelkurven und ihre Orthogonalen zwar in ein System von Rechtecken einteilen, aber nicht in ein solches von kleinen Quadraten, weil jedem ϱ eine besondere cyklidische Einteilung entspricht, so dafs die einfache Fortsetzung der Parallelkurven auf unähnliche Rechtecke führt.

γ) Einige Bemerkungen über Raumkurven.

§ 8) Um das Verständnis zu erleichtern, nehme man für die Zeichnung z. B. die cylindrische Schraubenlinie als Beispiel, die schon in Bd. I zur Behandlung gelangte.

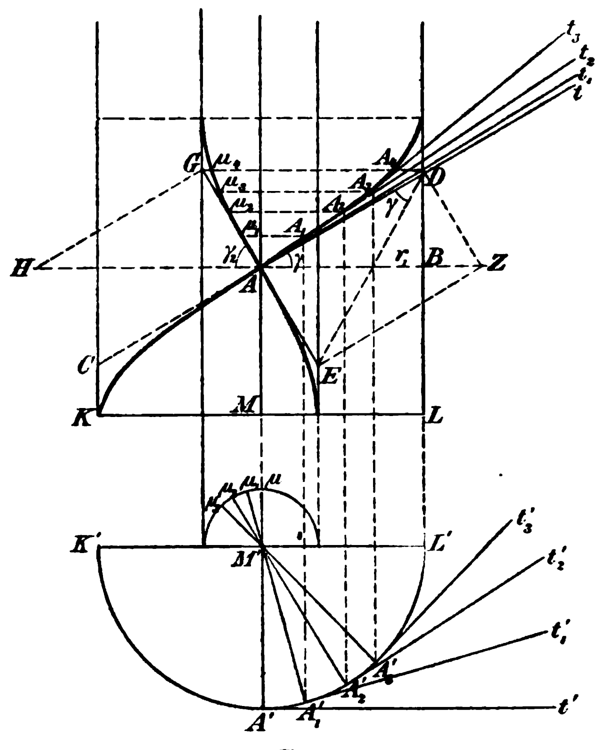


Fig. 6.

Ein sehr kleines Stück einer Raumkurve kann angenähert als eben betrachtet werden. Da eine Ebene durch drei (nicht in einer Geraden liegende) Punkte bestimmt wird, so genügen drei benachbarte Punkte der Kurve zur angenäherten Bestimmung dieser Ebene für das kleine Kurvenstück AA_1A_2. Je näher die Punkte aneinander rücken, um so genauer wird die Ebene bestimmt.

Dabei wird die gerade Verbindungslinie AA_1 schliefslich zur Tangente t im Punkte A. Durch diese und einen Nachbarpunkt des Berührungspunktes wird die Ebene ebenfalls bestimmt. Ebenso wird sie bestimmt durch die Tangenten t und t_1 für zwei aufeinander folgende Kurvenpunkte A und A_1.

Diese Ebene soll heifsen die Schmiegungsebene der Kurve für den Punkt A (obwohl A_1 gleichberechtigt ist. Dieses soll aber der geordneten Reihenfolge halber hier ausscheiden). Auch der Name Tangentenebene kann angewandt werden.

§ 9) Drei dicht aufeinander folgende Tangenten t, t_1, t_2 der Kurve bestimmen zwei aufeinander folgende Schmiegungsebenen. Da t_1 den beiden Ebenen angehört, ist es ihre Schnittlinie. Der Winkel σ, unter dem die Ebenen einander schneiden, soll der Schmiegungswinkel für das kleine Kurvenstück AA_1 heifsen. Errichtet man in irgend einem Punkte von t_1 auf beiden Ebenen Lote, so stellen auch diese den Schmiegungswinkel σ dar.

§ 10) In der Schmiegungsebene hat die Kurve, wie jede ebene Kurve, einen Krümmungsmittelpunkt μ. Er wird gefunden, indem man in der Schmiegungsebene in zwei sehr nahe aneinander liegenden Kurvenpunkten Normalen auf den zugehörigen Tangenten errichtet. Diese schneiden sich für den Grenzfall in μ. Dies bedarf aber noch der Präzisierung, da diese beiden Normalen für die Kurve von verschiedener Bedeutung sind, indem nur die eine eine sog. Hauptnormale ist.

Man denke sich zu diesem Zwecke in A auf der Tangente t eine Normalebene errichtet. Diese schneidet die zu A gehörige Schmiegungsebene in einer Geraden, die von den übrigen dortigen Loten der Kurve sich dadurch unterscheidet, dafs sie eben in der zu A gehörigen Schmiegungs-

ebene liegt. Dieses Lot soll heifsen die Hauptnormale der Kurve für den Punkt A. Auf dieser mufs der Krümmungsmittelpunkt liegen. Bildet man ebenso für die Nachbarpunkte A_1 und A_2 Hauptnormalen, so zeigt sich, dafs diese einander bei einer eigentlichen Raumkurve nicht schneiden, sondern kreuzen. Würden nämlich zwei aufeinander folgende Hauptnormalen einander schneiden, so würden die aufeinander folgenden Schmiegungsebenen, in denen sie liegen, nicht nur die Tangente t_1 gemein haben, sondern auch noch jenen Schnittpunkt, d. h. die beiden Schmiegungsebenen müfsten ganz zusammenfallen, der Winkel σ würde gleich Null sein, das Kurvenstück AA_1 würde also nicht nur angenähert als eben, sondern als vollkommen eben zu betrachten sein. Also: Soll das kleine Kurvenstück AA_1 nicht absolut eben sein, so dürfen die beiden zugehörigen Hauptnormalen einander nicht schneiden.

Von den beiden einander schneidenden Geraden, durch die vorher μ angenähert bestimmt wurde, kann also höchstens die eine eine Hauptnormale sein.*)

§ 11) Um die aufeinander folgenden Krümmungsmittelpunkte zu bestimmen, soll daher folgendermafsen verfahren werden: Man bilde die Normalebenen der Kurve in $A, A_1, A_2, \ldots$ Die beiden ersten schneiden einander in einer Geraden EG, die beiden folgenden in einer Geraden $E_1 G_1$ u. s. w. Für den Grenzfall unendlich nahe aufeinander folgender Punkte heifsen diese Geraden die Krümmungsachsen der Kurve für ihre Punkte $A, A_1, A_2, \ldots$ Auf diesen Achsen liegen die einzelnen Krümmungsmittelpunkte, und zwar da, wo die Achsen von den Hauptnormalen geschnitten werden. Also: Die zu A gehörige Hauptnormale und die Krümmungsachse schneiden einander in μ, die zu A_1 gehörigen in μ_1 u. s. w.

*) Vor einem naheliegenden Fehler sei gewarnt. Scheidet man Figur 5 aus und knickt man die einzelnen Sektoren um die sie trennenden Geraden, so dafs zwischen je zwei benachbarten dieser Linien Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ entstehen, so erhält man an Stelle der ebenen Kurve (für den Grenzfall) eine Raumkurve, bei der scheinbar aufeinanderfolgende Krümmungsradien einander schneiden. Dies ist aber nach obigem unmöglich. Die Trennungslinien der Sektoren dürfen also nicht mehr als Hauptnormalen (Krümmungsradien) betrachtet werden. Die aus den Sektoren entstandene Fläche ist eine in die Ebene abwickelbare Regelfläche.

§ 12) [Man könnte vermuten, dafs der Krümmungsmittelpunkt in der Gegend zu suchen sei, wo die aufeinander folgenden Hauptnormalen einander kreuzen. Dies ist aber, wie schon bei der Schraubenlinie sich zeigt, durchaus nicht der Fall.

In Figur 6 sind die entsprechenden Verhältnisse für diese dargestellt. Die aufeinanderfolgenden Tangenten sind $t, t_1, t_2, \ldots, EG$ ist die Krümmungsachse für A und stellt zugleich die Normalebene dar. $A\mu, A_1\mu_1, A_2\mu_2, \ldots$ sind die hier horizontalen Krümmungsradien. Diese sind bei der gewöhnlichen Schraubenlinie sämtlich gleich grofs, denn Kurventeile von derselben Länge sind hier einander kongruent. Demnach liegen alle μ auf einem bestimmten Cylinder, auf dem sie eine zweite Schraubenlinie von derselben Ganghöhe bilden. In diesem Sonderfalle (nicht aber allgemein) sind die Geraden EG, E_1G_1, $E_2G_2, \ldots$ die Tangenten dieser zweiten Schraubenlinie, derart, dafs die Steigungswinkel, wie EG und t zeigen, Komplementwinkel sind, Daraus folgt, dafs für die neue Schraubenlinie, wenn der neue Cylinderradius mit r_2 bezeichnet wird,

$$h = 2\pi r_2 \tan\gamma_2 = 2\pi r_2 \cot\gamma = 2\pi r_2 \frac{1}{\tan\gamma}$$

ist, während für die gegebene war

$$h = 2\pi r_1 \tan\gamma.$$

Aus beiden Gleichungen folgt $r_2 = r_1 \tan^2\gamma$.

Die Länge für jeden Krümmungsradius der ersten Schraubenlinie ist demnach

$$A_n\mu_m = r_1 + r_2 = r_1 + r_1 \tan^2\gamma = r_1 (1 + \tan^2\gamma) = \frac{r_1}{\cos^2\gamma} = \varrho.$$

§ 13) Ebenso grofs ist naturgemäfs der Krümmungsradius für den Punkt A der in Figur 6 durch die Gerade CD dargestellten Schnittellipse des ersten Cylinders, der also beiläufig gefunden sein würde, wenn er nicht aus der Planimetrie bekannt geworden ist. Ist diese Ellipse in Fig. 7 durch $C'A'D'$ dargestellt, ist also $M'A' = b = r_1$ und $CM' = a = A'F$, wo F der Brennpunkt ist, so ist $\triangle M'A'F$ in Figur 7 kongruent dem $\triangle BAD$ in Figur 6. Errichtet man also auf $A'F'$ in F ein Lot, so bestimmt dieses auf der

Nebenachse $M'A'$ den Punkt μ' so, dafs $A'\mu'$ der Krümmungsradius r ist. Da nämlich infolge der Kongruenz $\sphericalangle M'A'F' = \gamma$ ist, so folgt $a = \frac{r_1}{\cos\gamma}$, also $A'\mu' = \frac{r_1}{\cos^2\gamma} = \varrho$.

Legt man in Figur 6 an $AD = a = \frac{r_1}{\cos\gamma}$ in D den Winkel $ADE = \gamma$ an, so wird $DE = \frac{r_1}{\cos^2\gamma} = \varrho$, so dafs man den konstanten Krümmungsradius r der gegebenen Schraubenlinie leicht konstruieren kann. Statt dessen kann man auf AD in D ein Lot errichten, welches auf AB das Stück $AZ = \varrho$ abschneidet.

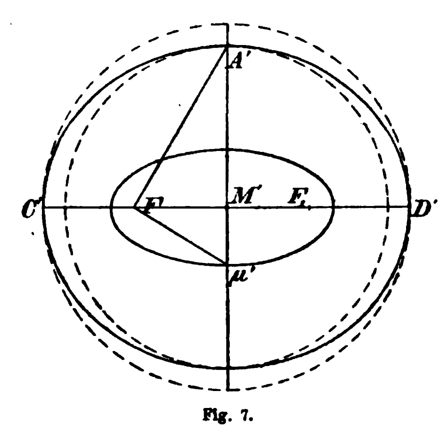


Fig. 7.

Für die zweite Schraubenlinie (die der μ) ist

$$\varrho_2 = \frac{r_2}{\cos^2\gamma_2} = \frac{r_1\tan^2\gamma}{\sin^2\gamma} = \frac{r_1}{\cos^2\gamma} = \varrho,$$

so dafs beide Schraubenlinien denselben Krümmungsradius haben. Für beide Schraubenlinien findet also eine Art von Gegenseitigkeit statt. Die Ellipse für die zweite Schraubenlinie ist ebenfalls in Figur 7 dargestellt.]

§ 14) Die aufeinanderfolgenden Tangenten jeder Raumkurve bilden eine Tangentenfläche, die von den aufeinander folgenden Schmiegungsebenen umhüllt und von jeder längs einer Tangente berührt wird. Denkt man sich alle Tangenten in unendlicher Länge an der Kurve angebracht, so hat man die ganze Fläche, die nun gratähnlich von der Raumkurve begrenzt wird. Die letztere ist also die sogenannte Gratlinie (oder Rückkehrkante*)) der Tangentenfläche. Die Fläche wird von lauter Geraden gebildet, ist also eine Regel-

*) Dieser Name kommt daher, dafs die Tangenten beim Berührungspunkte die Fläche nicht verlassen, sondern in sie zurückkehren.

fläche. Weil ferner die aufeinanderfolgenden Tangenten einander auf der Gratlinie schneiden, so dafs diese Tangenten „Sektoren“ bilden, die für den Grenzfall als eben zu betrachten sind, so läfst sich die Fläche auf die Ebene abwickeln, ist also eine abwickelbare Regelfläche. Bei dieser Abwickelung geht die Raumkurve in eine ebene Kurve über.

[Bei der gewöhnlichen Schraubenlinie handelt es sich um die abwickelbare Schraubenregelfläche, die von den Tangenten der ersteren gebildet wird. Denkt man sich auf der Schraubenlinie Punkte markiert, die sie in gleiche und sogar kongruente Stücke einteilen, die sehr klein sein sollen, so erhalten die Sektoren lauter gleiche Winkel k (Kontingenzwinkel), und die Abwickelung mufs die Aufsenfläche eines regelmäfsigen Polygons, für die Grenze die eines Kreises geben. Denkt man sich also die Aufsenfläche eines Kreises z. B. längs einer Tangente aufgeschnitten, so läfst sich diese ebene Fläche in eine abwickelbare Schraubenfläche umbiegen. Eine so begrenzte Papierfläche z.B. läfst sich praktisch in die genannte Schraubenfläche umbiegen, wenn man die Kreistangenten z. B. durch aufgeklebte Holzstäbchen zwingt, geradlinig zu bleiben. Man hat nur den Kreis in die Gestalt irgend einer Schraubenlinie zu bringen.]

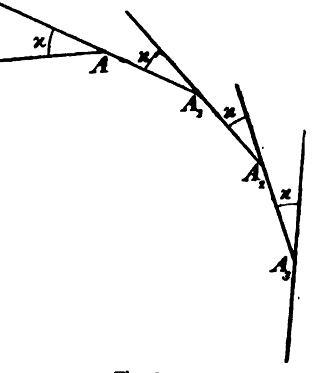


Fig. 8.

§ 15) Die Tangenten einer allgemeinen Raumkurve in den benachbarten Punkten A und A_1 bilden einen Winkel k, den schon genannten Kontigenzwinkel für das Kurvenstück AA_1. Er wird auch gebildet von den beiden zugehörigen Normalebenen, die sich in der entsprechenden Krümmungsachse EG unter diesem Winkel schneiden. Unter demselben Winkel kreuzen sich auch die beiden zugehörigen Hauptnormalen (Krümmungsradien). Setzt man das kleine

Kurvenstück gleich s, und mifst man k im Bogenmafs, d. h. am Kreise mit Radius 1, so ist $\varrho k = s$, also $\varrho = \frac{s}{k}$ und $\frac{1}{\varrho} = \frac{k}{s}$. Den letzteren Ausdruck bezeichnete man als die erste Krümmung der Kurve. Die zweite Krümmung ergiebt sich rein schematisch aus $r\sigma = s$ als $\frac{1}{r} = \frac{\sigma}{s}$, wo σ der Schmiegungswinkel ist. (Daher „Kurven doppelter Krümmung".) Über diese beiden Krümmungen und die geometrische Deutung von r soll unten eingehender gesprochen werden.

§ 16) Jeder der Krümmungsradien ϱ ist Schnittlinie der Normalebene und der Schmiegungsebene für den betreffenden Punkt A der Kurve. Er liegt also in einer der die Tangentenfläche berührenden Schmiegungsebene, aber nicht etwa in der Tangentenfläche, die nicht über die Gratlinie hinausreicht. Er ist senkrecht zu einer der Geraden der letzteren, d. h. zu einer Tangente der Raumkurve. Er trifft also die Fläche in einem Punkte der gegebenen Raumkurve. Die Krümmungsradien selbst bilden auch eine Regelfläche, die jedoch nicht abwickelbar ist, weil die aufeinander folgenden Krümmungsradien der Raumkurve einander nicht schneiden. Die nicht abwickelbare Fläche der Hauptnormalen und die abwickelbare Fläche der Tangenten schneiden einander in der gegebenen Raumkurve. Die nicht abwickelbaren Regelflächen werden auch als windschiefe bezeichnet.

§ 17 (Läfst man eine Gerade, welche die Cylinderachse unter gegebenem Winkel α schneidet, mit der Schraubenlinie um den Cylinder herumgehen, so entsteht eine nicht abwickelbare Schraubenregelfläche. Ist $\sphericalangle \alpha = 90^0$, so handelt es sich um die nicht abwickelbare Fläche der Hauptnormalen der Schraubenlinie. Da die Verbindungslinie zwischen der Cylinderachse und der Schraubenlinie in letzterem Falle stets eine kürzeste Linie ist, so hat die Fläche der Hauptnormalen stets den Charakter einer zwischen Schraubenlinie und Cylinderachse ausgespannten Minimalfläche, die aufserdem z. B. von zweien der Verbindungslinien begrenzt zu denken ist. Die Minimalfläche zwischen der Achse und der Schraubenlinie mufs nämlich aus Gründen der Kongruenz aller Teilchen eine Schraubenfläche von derselben Ganghöhe sein. Jede andere Schraubenfläche zwischen den beiden

Grenzlinien hat aber, weil die erzeugende Gerade oder Kurve nicht die kürzeste Verbindungslinie ist, „Schichten“ von gröſserem Flächeninhalt. Die Fläche behält den Charakter einer Minimalfläche auch dann, wenn man sie ohne Drehung umbiegt, wobei die Cylinderachse und die beiden begrenzenden Geraden krummlinig werden können, die Schraubenlinie aber irgend eine Raumkurve wird. Die Geraden der ursprünglichen Fläche gehen dann in kürzeste Linien der neuen Fläche (d. h. in geodätische Linien) über. (Vgl. z. B. § 356 in Bd. I.) Beiläufig sei bemerkt, daſs, wenn man die Cylinderachse und diese Schraubenlinie zu Kreisen umbiegt, die Drehungsfläche der Kettenlinie, das Katenoid, entsteht.]

§ 18) Die Normalebene jeder Raumkurve für irgend einen ihrer Punkte A und die zugehörige Schmiegungsebene schneiden sich nach obigem in der Hauptnormale. Errichtet man auſserdem auf der Schmiegungsebene ein Lot in A, so steht dieses senkrecht auf der Tangente und zugleich auf der Hauptnormale und heiſst infolgedessen die Binormale. Die Hauptnormale ϱ, die Tangente t und die Binormale n bilden eine rechtwinklige Ecke, deren Flächen folgende sind: ϱ und t bilden die Schmiegungsebene, ϱ und n die Normalebene, t und n eine Ebene, die als die rektifizierende Ebene der Kurve für den Punkt A bezeichnet wird. Der Grund für diese Bezeichnung soll unten angegeben werden. [Für die Schraubenlinie ist die rektifizierende Ebene die entsprechende Tangentialebene des Cylinders.]

§ 19) Die aufeinander folgenden Schmiegungsebenen der Raumkurven umhüllen die abwickelbare Fläche der Tangenten. Auch die beiden anderen Gruppen von Ebenen umhüllen je eine abwickelbare Fläche. Wie nämlich jede Reihe aufeinander folgender Punkte eine Kurve giebt, für welche die Verbindungslinien je zweier benachbarter Punkte für den Grenzfall Tangenten sind, so muſs nach dem Gesetz der Dualität jede Aufeinanderfolge von Ebenen eine Kurve bestimmen, für welche für den Grenzfall die Schnittlinien je zweier aufeinander folgenden Ebenen Tangenten sind. Diese Tangenten bilden eine abwickelbare Regelfläche, und da jede Tangente ganz in je zwei Ebenen liegt, so wird

diese Regelfäche von den aufeinander folgenden Ebenen längs je einer Tangente berührt. Die Tangenten umhüllen die Gratlinie der abwickelbaren Regelfläche.

§ 20) Je zwei aufeinander folgende rektifizierende Ebenen schneiden einander in einer Geraden, der sogenanten rektifizierenden Geraden. [Bei der Schraubenlinie handelt es sich um den Durchschnitt zweier aufeinander folgender Tangentialebenen des Cylinders, also für die Grenze um eine Gerade des Cylinders, die im allgemeinen keine Normale der Kurve ist. Die rektifizierende Gerade darf also nicht etwa mit der Binormale verwechselt werden.] Diese rektifizierenden Geraden bilden eine krumme Fläche und umhüllen eine auf dieser Fläche liegende Kurve, die Gratlinie der Fläche, über die die Fläche nicht hinausgeht. Diese Fläche heifst die Fläche der rektifizierenden Geraden der Kurve. [Für die Schraubenlinie handelt es sich um den Cylinder als Fläche der rektifizierenden Geraden. Wickelt man ihn auf eine der rektifizierenden Ebenen ab, so wird die Schraubenlinie eine Gerade, d. h. eben sie wird rektifiziert. Dafs Entsprechendes ganz allgemein stattfindet, wird unten erläutert.] Die Gratlinie kann sich, wie beim Kegel, auf einen Punkt beschränken, sie kann auch, wie beim Cylinder, ganz im Unendlichen liegen.

Die rektifizierenden Ebenen von A und A_1 geben eine rektifizierende Gerade als Durchschnitt. Die beiden entsprechenden Hauptnormalen stehen bezw. senkrecht auf diesen Ebenen, beide also kreuzen die rektifizierende Gerade senkrecht. Demnach ist die rektifizierende Gerade parallel zu dem gemeinschaftlichen Lote benachbarter Hauptnormalen. [Bei der Schraubenlinie ist die Cylinderachse dieses gemeinschaftliche Lot, die rektifizierende Gerade also parallel zu diesem.] Die aufeinander folgenden rektifizierenden Geraden bilden die Schmiegungsebene der entsprechenden Gratlinie.

§ 21) Je zwei aufeinander folgende Normalebenen der Raumkurve schneiden einander in der Krümmungsachse unter dem Kontigenzwinkel k. Sie umhüllen eine abwickelbare Regelfläche, die Fläche der Krümmungsachsen,

und zwar geschieht die Berührung stets längs einer Krümmungsachse. Die Krümmungsachsen sind die Tangenten der Gratlinie dieser Fläche. Da die Krümmungsachsen durch die Krümmungsmittelpunkte μ gehen, liegen die Krümmungsmittelpunkte auf der Fläche der Krümmungsachsen, aber im allgemeinen nicht auf ihrer Gratlinie. (Bei der Schraubenlinie tritt letzteres als besonderer Fall ein.) Je zwei aufeinander folgende Krümmungsachsen bilden eine Schmiegungsebene der Gratlinie. [Diese Gratlinie wird sich später als Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln herausstellen.] Die Fläche der Krümmungsradien schneidet die der Krümmungsachsen in der Kurve der Krümmungsmittelpunkte, die also auf beiden Flächen liegt.

§ 22) Zwischen der gegebenen Raumkurve und der Gratlinie der Krümmungsachsen finden gewisse gegenseitige Beziehungen statt.

1) Die aufeinander folgenden Tangenten der Raumkurve schneiden einander unter dem zum Kurvenstücke AA_1 gehörigen Kontingenzwinkel $\varkappa$, ebenso die zugehörigen Normalebenen. Nun sind aber die aufeinanderfolgenden Normalebenen, weil sie aufeinander folgende Krümmungsachsen, also aufeinanderfolgende Tangenten der entsprechenden Gratlinien enthalten, Schmiegungsebenen dieser Gratlinie, und da diese Ebenen sich unter dem Winkel $\varkappa$ schneiden, ist dieser der Schmiegungswinkel für das entsprechende Stück der Gratlinie. Folglich: Der Schmiegungswinkel für eine kleine Strecke der Gratlinie der Krümmungsachsen ist gleich dem Kontingenzwinkel für eine entsprechende Strecke der gegebenen Raumkurve.

2) Aufeinder folgende Binormalen der Raumkurve schneiden einander unter dem Winkel σ, unter dem sich die auf ihnen senkrechten Schmiegungsebenen schneiden. Die Krümmungsachse ist aber stets parallel zur Binormale, denn sie liegt mit ihr in der Normalebene der Kurve und beide stehen senkrecht auf der Hauptnormale. Folglich schneiden sich auch aufeinanderfolgende Krümmungsachsen unter dem Winkel σ. Sie sind aber Tangenten ihre Gratlinie und geben also deren Kontingenzwinkel. Folglich:

Der Kontingenzwinkel für ein kleines Stück

der Gratlinie der Krümmungsachsen ist gleich dem Schmiegungswinkel für das entsprechende Stück der gegebenen Raumkurve.

3) Jede Schmiegungsebene der zweiten Kurve ist normal zur entsprechenden Schmiegungsebene der ersten. Jede Normalebene der zweiten ist parallel zu der entsprechenden Schmiegungsebene der ersten, weil sie senkrecht auf der Tangente steht, die parallel zur Binormale der ersten ist. Die Normalebenen der einen Kurve sind die Schmiegungsebenen der andern. Dieser Parallelismus ist also gegenseitig. Die entsprechenden Hauptnormalen beider sind parallel, denn die der ersten liegt zugleich in der Schmiegungsebene der andern und steht senkrecht auf deren zugehöriger Tangente, aber auch die Hauptnormale der zweiten liegt in dieser Schmiegungsebene und ist senkrecht zur Tangente. Jede Tangente der ersten Kurve ist parallel zur entsprechenden Binormale und der Krümmungsachse der zweiten; jede Tangente der zweiten ist parallel zur entsprechenden Binormale und identisch mit der Krümmungsachse der ersten. Also: Die besprochenen rechtwinkligen Dreikantecken der einen Kurve haben Kanten, die parallel sind zu denen der entsprechenden Dreikantecken der andern. Demnach sind parallel die einander entsprechenden rektifizierenden Ebenen beider Kurven, also auch die rektifizierenden Geraden beider. Die Schmiegungsebenen der einen sind parallel zu den entsprechenden Normalebenen der anderen. [An dem Beispiele der Schraubenlinie sind alle diese Verhältnisse leicht zu erkennen.]

§ 23) Man verfolge die Entstehung beider Kurven an Figur 9. Hier ist die zu A gehörige Schmiegungsebene $AA_1\mu$ mit den Tangenten t und t_1 horizontal gedacht, also die Binormale AB und die Krümmungsachse μK vertikal; μ ist der erste Krümmungsmittelpunkt, $A\mu = \varrho$ der erste Krümmungsradius, $AA_1 = \varrho\varkappa = s$ das erste Kurvenstück, $\frac{1}{\varrho} = \frac{\varkappa}{s}$ dessen Krümmung.

Wäre die Kurve eben, so würde irgendwo auf $A_1\mu$, z. B. in J der zweite Krümmungsmittelpunkt liegen. Es ist aber ein Schmiegungswinkel σ vorhanden, d. h. der nächste

Sektor $A_1 A_2 \mu_1$ ist um die Tangente t_1 gegen den ersten gedreht, und zwar um diesen Winkel $\sigma = DA_1E$. Die Ebene $A_1 \mu_1 J$ zeigt diesen Winkel σ an.

Während nun die Normalebene $A \mu KB$ um den $\sphericalangle\, \varkappa$ in die Lage $A_1 \mu KB'$ gedreht war, tritt jetzt an ihre Stelle die neue Normalebene $A_1 \mu_1 K_1 B_1$. Dabei ist die Binormale $A_1 B_1$ um σ gegen $A_1 B'$ gedreht, die Krümmungsachse $\mu_1 K_1$ um σ gegen μK. Diese beiden Winkel σ haben aber ihre Ebene

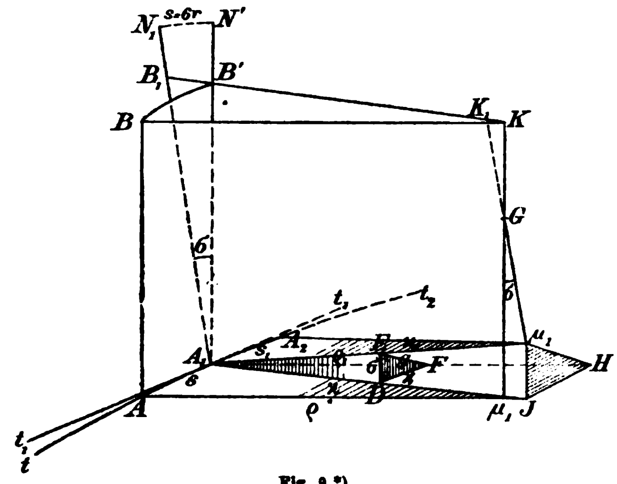


Fig. 9.*)

in der Erweiterung der senkrechten Ebene $A_1 J \mu_1$, also schneiden einander $\mu_1 K_1$ und μK in einem Punkte G, dem ersten Punkte der entstehenden Gratlinie der Krümmungsachsen. Die neue Normalebene $A_1 \mu_1 K_1 B_1$ ist um die neue Krümmungsachse $\mu_1 K_1$ zu drehen, was den zweiten Sektor mit dem Kontingenzwinkel $\varkappa_1$ giebt. Jetzt hat man fortzufahren, wie vorher. Sind im besonderen Falle die Krümmungsradien ϱ, ϱ_1 ... gleich grofs, so fallen die G mit den μ zusammen. (Vgl. Schraubenlinie.)

Oben wurde rein schematisch die zweite Krümmung als

$$\frac{1}{r} = \frac{\sigma}{s}$$

*) In Figur 9 ist an der untersten Linie ϱ zu lesen μ statt μ_1.

definiert. Geometrisch kann man sie veranschaulichen, indem man $A_1 B_1$ und $A_1 B'$ soweit verlängert, dafs der gleichschenklige Winkel $B_1 A_1 B'$ einen Bogen $N_1 N' = s$ spannt, denn dann ist

$$s = \sigma r \text{ und } A_1 N_1 = A_1 N' = r.$$

Einen eigentlichen Krümmungsmittelpunkt giebt es hier nicht, weil AB und $A_1 B_1$ einander kreuzen, nicht schneiden.

§ 24) Die einander kreuzenden Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 haben irgendwo ihre Kreuzungslinie, d. h. ihr gemeinschaftliches Lot, und dieses ist parallel zur rektifizierenden Geraden für A_1. (Vgl. Schraubenlinie.)

Der Kreuzungswinkel von ϱ und ϱ_1 ergiebt sich folgendermafsen. Man ziehe (in der horizontalen Schmiegungsebene) $A_1 H \parallel \varrho$, dann ist der Winkel $H A_1 \mu_1$ gleich dem gesuchten Kreuzungswinkel. Denkt man sich um A_1 die Einheitskugel gelegt, so wird diese von $A_1 J$, $A_1 H$ und $A_1 \mu_1$ in Punkten D, F und E durchstofsen, welche ein sphärisches rechtwinkliges Dreieck DFE geben, welches den rechten Winkel bei D hat. Da jedoch die Seiten dieses Dreiecks sehr klein sind, kann man es als eben betrachten, so dafs $DE^2 + DF^2 = EF^2$ ist. Nun ist aber $DE = \sigma$, $DF = \varkappa$ (Wechselwinkel) und $EF = g$, wenn man unter g den am Einheitskreis gemessenen Kreuzungswinkel, gewissermafsen die ganze Drehung, versteht. Es ist also

$$1) \qquad g^2 = \varkappa^2 + \sigma^2 = \left(\frac{s}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{s}{r}\right)^2.$$

Setzt man ebenso schematisch, wie vorher, für die Gesamtkrümmung g den Radius gleich R, so hat man für den Kurvenbogen s die Gleichung

$$s = Rg$$

woraus folgt

$$R = \frac{s}{g}.$$

Dadurch geht Gleichung 1) über in $\frac{s^2}{R^2} = \frac{s^2}{\varrho^2} + \frac{s^2}{r^2}$ oder in

$$2) \qquad \frac{1}{R^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}.$$

Gleichung 1) giebt den Lancretschen Satz: Das Quadrat der Gesamtdrehung für ein Kurvenstück ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Einzeldrehungen. In zweiter Form lautet er: Das Quadrat der Gesamtkrümmung ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Einzelkrümmungen.

Auch R läfst sich geometrisch veranschaulichen. Man hat nur die Schenkel des Winkels HA_1E so lang zu machen, dafs der gleichschenklige Winkel den Bogen $s = AA_1$ spannt.

§ 25) Die Radien ϱ, r und R stehen in einem einfachen geometrischen Zusammenhange: Bildet man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten ϱ und r, so ist die Höhe auf der Hypotenuse gleich R. Der doppelte Dreiecks-Inhalt ist nämlich $2J = \varrho r = hc$, wenn die Hypotenuse gleich c gesetzt wird, also ist

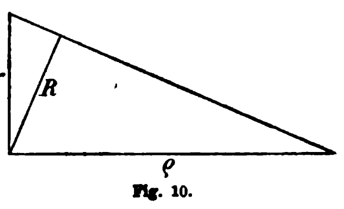


Fig. 10.

$h = \frac{\varrho r}{c}$, folglich $\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{\varrho^2 r^2} = \frac{\varrho^2 + r^2}{\varrho^2 r^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{R^2}$, wie behauptet war.

Kennt man demnach zwei dieser drei Krümmungsradien, so kennt man auch den dritten. Daraus lassen sich viele Folgerungen ziehen. So ist z. B. $\frac{1}{R^2}$ stets gröfser als jede der Gröfsen $\frac{1}{r^2}$ und $\frac{1}{\varrho^2}$, folglich ist R stets kleiner als jede der Gröfsen ϱ und r, was auch die Dreiecksfigur 10) sofort zeigt.

(Man versuche alle diese Sätze an der Schraubenlinie zu veranschaulichen.)

§ 26) In Figur 11 seien A, A_1 und A_2 drei aufeinander folgende Punkte einer Raumkurve, t, t_1 und t_2 die zugehörigen Tangentenrichtungen. Dabei liegen t und t_1 in der ersten Schmiegungsebene $CDEF$, t_1 und t_2 in der zweiten Schmiegungsebene GHA_2P_2, beide Ebenen schneiden einander unter dem Winkel σ, während t und t_1 sich unter

dem Winkel $\varkappa$ schneiden. AB sei die rektifizierende Gerade, in der sich die zu A und A_1 gehörigen und durch t bezw. t_1 gehenden rektifizierenden Ebenen schneiden. Man fälle von einem Punkte M der Geraden AB aus ein Lot auf t und ein solches auf t_1, dann steht das eine senkrecht auf der ersten, das andere senkrecht auf der zweiten Schmiegungsebene. Dies giebt Dreiecke AMP und AMP_1, von denen das eine in der ersten, das andere in der anderen rektifizierenden Ebene liegt. Dabei ist Winkel $PMP_1 = \sigma$, das Dreieck PMP_1 aber kann, da PP_1 verschwindend klein ist, und es sich um Lote handelt, als gleichschenklig betrachtet werden. Demnach sind die rechtwinkligen Dreiecke PAM und P_1AM für den Grenzfall kongruent, folglich ist auch PP_1A ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel $\varkappa$ an der Spitze.

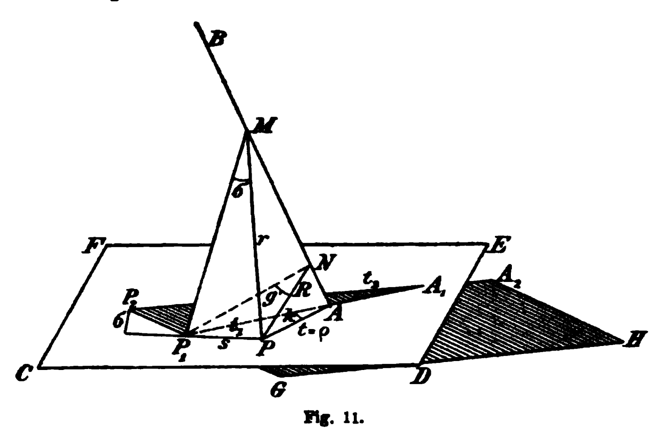


Fig. 11.

Man kann nun M auf AB so wählen, dafs $AP = \varrho = AP_1$ ist, dann ist der um A mit Radius ϱ gelegte Kreisbogen $PP_1 = \varrho k = s = AA_1$. Aber auch $PM \cdot \sigma$ ist gleich s, also $PM = \frac{s}{\sigma} = r$, d. h. gleich dem Radius der zweiten Krümmung. Jetzt lege man durch PP_1 eine zur rektifizierenden Geraden AB normale Ebene, wodurch das gleichschenklige Dreieck PNP_1 entsteht. Dabei ist PN die zur Hypotenuse gehörige Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten r und ϱ, also nach obigem $PN = R$, d. h. gleich dem Radius der

gesamten Krümmung der Kurve bei A. Setzt man also den im Bogenmafs gemessenen Winkel $PNP_1 = g'$, so ist $R . g' = PP_1 = s$, also $g' = \frac{s}{R} = g$, d. h. gleich dem Winkel der gesamten Drehung oder gleich dem Kreuzungswinkel von ϱ und ϱ_1 für die Kurvenstrecke AA_1.

Jetzt sind alle drei Krümmungsradien und Krümmungswinkel zugleich geometrisch veranschaulicht, und man hat im ganzen das folgende:

Macht man eine Tangente einer gegebenen Raumkurve (vom Berührungspunkte aus gemessen) gleich dem Krümmungsradius ϱ für den Berührungspunkt A, und legt man durch den Endpunkt eine Normalebene zur Tangente, so erhält man einen Normalschnitt (PP_1) zur Tangentenfläche, dessen Krümmungsradius (PM) gleich dem Radius r der zweiten Krümmung der Kurve für A ist, und dessen Krümmungsmittelpunkt auf der rektifizierenden Geraden der Kurve für den Punkt A liegt. Legt man ferner durch das kleine Bogenstück PP_1 des Normalschnitts, welches der Kurvenstrecke AA_1 entspricht, eine Normalebene PP_1N zur rektifizierenden Geraden, so giebt PN den Radius R der gesamten Krümmung für den Punkt A der Raumkurve. Dabei zeigt sich, dafs der Winkel g, unter dem sich die beiden rektifizierenden Ebenen für ein kleines Kurvenstück AA_1 schneiden, gleich dem Kreuzungswinkel der zugehörigen Krümmungsradien ϱ und ϱ_1, also gleich dem Winkel der gesamten Krümmung ist.

§ 27. [Für die Schraubenlinie vom Steigungswinkel γ und vom Cylinderradius r_1 ergiebt sich (Figur 12) folgendes:

Man bilde das rechtwinklige Dreieck ADZ, dann ist $AZ = \varrho$ der erste Krümmungsradius der Schraubenlinie. Macht man $AP = AZ = \varrho$ und errichtet man auf AP in P ein Lot, so giebt dieses auf der Cylindergeraden MA einen Punkt M_1 derart, dafs $PM_1 = r$ der Radius der zweiten Krümmung für A ist. Das Lot PN giebt den Radius R der gesamten Krümmung für A an. Alle diese Radien

sind für die Schraubenlinie konstant. Ist nun AA_1 ein kleiner Bogen s der letzteren, so hat man im Grundriſs in Winkel $A'M'A'_1$ den Kreuzungswinkel g der aufeinander folgenden Radien. Macht man also $M'Z' = PN$, so giebt

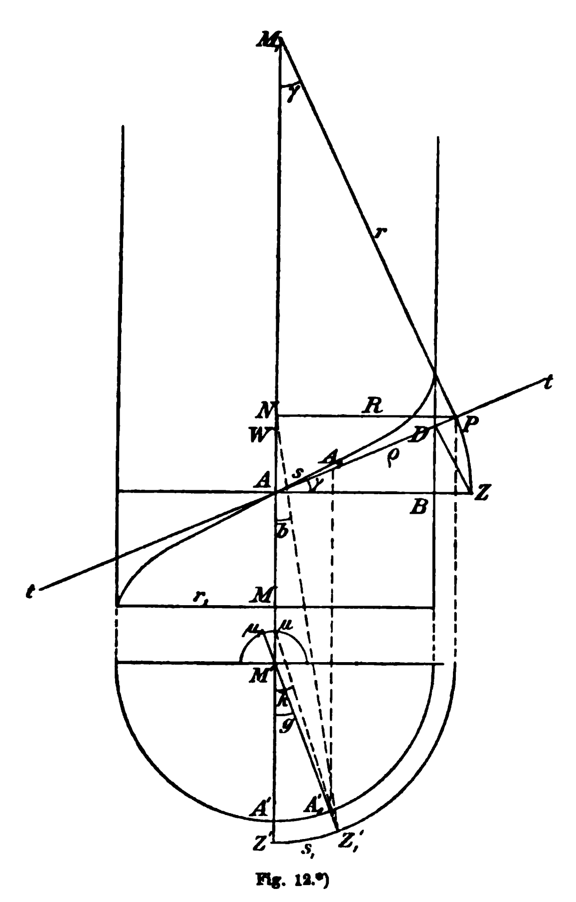


Fig. 12.*)

$\widehat{Z'Z'_1}$ den Aufriſsbogen $AA_1 = s$. Dagegen würde im Grundriſs $\sphericalangle Z'\mu'Z'_1$ den Kontingenzwinkel $\varkappa$ geben, wenn man $Z'\mu' = \varrho$ macht, wobei μ' unterhalb μ fällt. Macht man endlich

*) In Figur 12 lese man $\varkappa$ statt k und σ statt b.

$Z'W = r$, so ist für den Grenzfall $\measuredangle Z'WZ'_1 = \sigma$, d. h. gleich dem Schmiegungswinkel. Will man eine besondere Figur machen, so errichtet man besser über $Z'Z'_1$ gleichschenklige Dreiecke mit den Schenkeln ϱ, r und R. Dabei ist

$$\varrho = \frac{r_1}{\cos^2\gamma}, \quad r = \frac{\varrho}{\tan\gamma} = \frac{r_1}{\cos^2\gamma}\,\frac{1}{\tan\gamma} = \frac{r_1}{\cos\gamma\sin\gamma},$$
$$R = \varrho\cos\gamma = \frac{r_1}{\cos^2\gamma}\cos\gamma = \frac{r_1}{\cos\gamma}.$$

Daraus bestätigt sich die Gleichung $\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}$ in der Form $\cos^2\gamma = \cos^4\gamma + \cos^2\gamma\sin^2\gamma$. Auch ist leicht zu zeigen, dafs für $s = \frac{u}{n}$, d. h. für den n^{ten} Teil des Umgangs, ist $g = \frac{s}{R} = \frac{2\pi}{n}$, $\varkappa = \frac{s}{\varrho} = \frac{2\pi}{n}\cos\gamma$, $\sigma = \frac{s}{r} = \frac{2\pi}{n}\sin\gamma$.]

Da für die Schraubenlinie $r = \frac{\varrho}{\tan\gamma}$, für die zugehörige Gratlinie $r' = \frac{\varrho}{\tan(90^0 - \gamma)} = \varrho\tan\gamma$, so folgt, dafs ϱ die mittlere Proportionale zwischen den Radien der zweiten Krümmung für die Schraubenlinie und die zugehörige Gratlinie der Krümmungsachsen ist.

§ 28) Aus obigem folgt: Soll eine Kurve überhaupt gekrümmt sein, so ist für das kleine Stück AA_1 zunächst ein Kontigenzwinkel $\varkappa$ nötig, der von Null verschieden ist. Soll noch eine zweite Krümmung vorhanden sein, so ist auch noch ein Schmiegungswinkel σ nötig. Die Gesamtkrümmung ist dann $g = \sqrt{\varkappa^2 + \sigma^2}$. Hebt man den Schmiegungswinkel σ auf, so kann dies dadurch geschehen, dafs man die Tangentenfläche auf eine der Schmiegungsebenen abwickelt. Dadurch wird die Kurve eben, behält aber denselben Kontingenzwinkel bei. Läfst man auch irgendwie den Kontingenzwinkel verschwinden, so erhält man eine Gerade von unveränderter Länge.

Aus der Gleichung $g^2 = \varkappa^2 + \sigma^2$ folgt, dafs, wenn man g verschwinden läfst, sowohl $\varkappa$ als auch σ verschwinden. Da nun je zwei aufeinander folgende rektifizierende Ebenen den Winkel g bilden, so werden g, $\varkappa$ und σ zugleich aufgehoben,

wenn man die Fläche der rektifizierenden Geraden auf eine der rektifizierenden Ebenen abwickelt. Folglich gilt ganz allgemein der Satz:

Wickelt man bei einer Raumkurve die Fläche der rektifizierenden Geraden auf eine der rektifizierenden Ebenen ab, so wickelt man die Raumkurve so ab, dafs sie eine Gerade wird.

So zeigt sich ganz allgemein, dafs der Name der rektifizierenden Geraden, der rektifizierten Ebene und der Fläche der rektifizierenden Geraden sehr bezeichnend gewählt ist. (Vgl. Schraubenlinie.)

§ 29) Der Vollständigkeit halber sei noch folgendes über die **Schmiegungskugel** beigefügt:

Der zu einem Punkte A einer Raumkurve gehörige (in der Schmiegungsebene liegende) Krümmungskreis ϱ mit dem Mittelpunkte μ berührt die Kurve inniger, als jeder andere der sie dort berührenden Kreise. Jeder der letzteren hat mit der Kurve nur zwei benachbarte Punkte A und A_1 gemein, ein berührender Nachbarkreis dagegen Punkte A_1 und A_2. Nun schneiden sich aber benachbarte in der Schmiegungsebene liegende Normalen in μ, der um μ gelegte Berührungskreis gehört also beiden Normalen an und hat mit der Kurve drei Punkte A, A_1 und A_2 gemein.

Durch den genannten Krümmungskreis lassen sich unendlich viele Kugeln legen. Die Krümmungsachse von A ist aber senkrecht auf der zugehörigen Schmiegungsebene und geht durch μ, auf der **Krümmungsachse liegen also sämtliche Mittelpunkte dieser Kugeln.** Jede dieser Kugeln geht durch die Punkte A, A_1, A_2 der Raumkurve und berührt sie demnach in drei Punkten.

Nun schneiden sich aber zwei benachbarte Krümmungsachsen in einem Punkte G der zugehörigen Gratlinie. Um G läfst sich also eine Kugel legen, welche die Kurve nicht nur in den Punkten $A A_1 A_2$ berührt, sondern, der benachbarten Krümmungsachse wegen, auch in $A_1 A_2 A_3$, so dafs sie im ganzen die vier Punkte A, A_1, A_2, A_3 mit der Raumkurve gemein hat. Diese Kugel berührt also die Raumkurve bei A inniger, als jede andere berührende Kugel. Sie **heifst die Schmiegungskugel** der Raumkurve für den Punkt A. Folglich:

Die Gratlinie der Fläche der Krümmungsachsen einer Raumkurve ist der Ort der Mittelpunkte für ihre Schmiegungskugeln.

[Bei der Schraubenlinie fallen, weil alle ϱ gleich lang sind, die G mit den μ zusammen, also sind bei ihr die Krümmungsmittelpunkte μ die Centra der Schmiegungskugeln. Dies gilt von allen Raumkurven vom konstanten Krümmungsradius ϱ.]

§ 30) Das Gegebene umfaſst das Minimum der Vorkenntnisse, die man nötig hat, um die Frage zu entscheiden, ob die Guldinschen Regeln, besonders die Flächenformel, sich irgendwie auf allgemeine Raumkurven ausdehnen lassen. (Eine ganze Reihe von Lehrbüchern und Abhandlungen spricht sich in dieser Hinsicht verhältnismäſsig kritiklos aus.) Unstetigkeiten wurden im obigen absichtlich ausgeschlossen. In litterarischer Hinsicht sei bemerkt, daſs Prof. Schell in seiner „allgemeinen Theorie der Kurven doppelter Krümmung“, Leipzig bei Teubner, 2. Aufl. 1898, eine rein geometrische Darstellung der Raumkurven giebt, an die sich das obige mehrfach anschlieſst. Er bezeichnet dabei unendlich kleine Kurvenelemente nach der Methode der Differentialrechnung, was hier streng unterlassen ist. In Bd. II der analytischen Geometrie des Raumes von Salmon-Fiedler, Leipzig bei B. G. Teubner, wird der Gegenstand sehr ausführlich analytisch behandelt. Knapper geschieht dasselbe in Luigi Bianchis Differentialgeometrie, übersetzt von M. Lukat, Leipzig bei Teubner. In demselben Verlage erschienen entsprechende Werke von Knoblauch und v. Lilienthal über denselben Gegenstand. Monge und seine Schule sind zuerst grundlegend mit den Hilfsmitteln der darstellenden Geometrie und der Analysis an die betreffenden Fragen herangetreten.

§ 31) Zunächst soll die Guldinsche Inhaltsformel (nicht die Flächenformel) auf ihre Ausdehnbarkeit untersucht werden, d. h. hinsichtlich des Schwerpunktweges als beliebige Raumkurve. Unstetigkeiten der letzteren sollen von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben, so z. B. plötzliche Änderungen der Richtung (Knicke, Rückkehrpunkte u. dergl.), plötzliche Änderungen der Gröſse und Lage des Krümmungsradius ϱ, der Winkel σ und $\varkappa$ für kleine Kurvenstücke von gleicher

Gröfse, Unterbrechungen im Verlaufe des Schwerpunktsweges. Einzelne Unstetigkeiten können bisweilen unschädlich sein. In der Regel sind sie es aber nicht, namentlich sind alle Fälle auszuschliefsen, bei denen die Anzahl der Unstetigkeiten auf endlicher Strecke unendlich grofs wird. Alle Arten von Unstetigkeit würden besondere Untersuchung erfordern, auf die hier verzichtet werden soll.

δ) Ausdehnung der Guldinschen Inhaltsformel auf den Fall, dafs der Schwerpunkt der bewegten ebenen Fläche sich stets senkrecht gegen die Fläche auf einer beliebigen Raumkurve bewegt.

§ 32) Die Raumkurve SS_1S_2 des Schwerpunktsweges entstehe auf die in Figur 9 dargestellte Weise. Dabei seien $SS_1\mu$, $S_1S_2\mu_1, \ldots$ die aufeinander folgenden Schmiegungsebenen. Die erste werde z. B. als horizontal angenommen, so dafs die Tangenten t und t_1 horizontal sind, während t_2 nicht mehr horizontal ist; μ und μ_1 sind die beiden ersten Krümmungsmittelpunkte, μK und μ_1K_1 sind die beiden ersten Krümmungsachsen, SB und S_1B_1 (parallel zu diesen) die beiden ersten Binormalen. Die beiden Krümmungs-

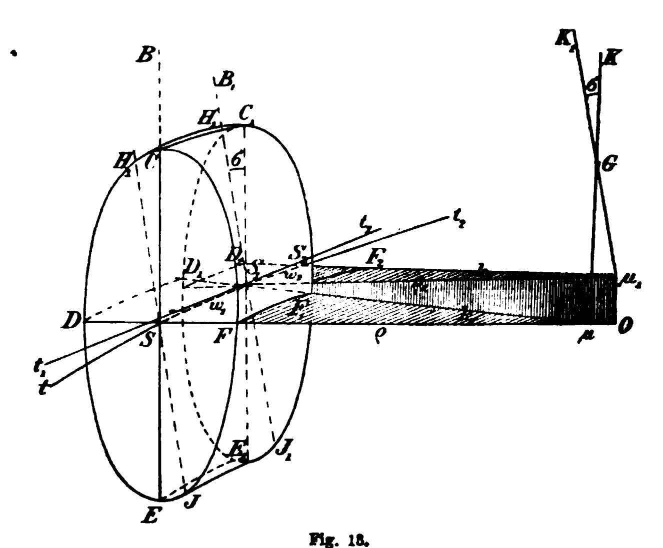


Fig. 13.

achsen, von denen die erste senkrecht zu denken ist, schneiden sich in G, dem ersten Punkte der Gratlinie für die Fläche dieser Achsen. [Bei der Schraubenlinie ist $\varrho = \varrho_1$, daher fällt bei ihnen G mit μ_1 in N zusammen.] Die Hilfsebene $\mu S_1 \mu_1$ ist senkrecht zu denken. In ihr liegen μK und $\mu_1 K_1$.

In Figur 13 ist die Entstehung des Körpers aus der ebenen Fläche $CDEF$ dargestellt. Die letztere liegt in der ersten Normalebene $BS\mu K$ des Schwerpunktsweges und bleibt während der ganzen Drehung um die Achse μK stets in der bis in die Lage $C_1 S_1 \mu K$ sich drehenden senkrechten Ebene. Alle Punkte der Fläche bewegen sich bis dahin auf Parallelkurven, die horizontal liegende Kreise sind.

Die zweite Bewegung erfolgt um die Achse $\mu_1 K_1$, die beim Anfang in der Ebene von $C_1 D_1 E_1 F_1$ liegt und während der neuen Bewegung stets in der Ebene der Fläche F bleibt. Da aber $\mu_1 K_1$ schräg liegt, kann bei dieser Bewegung die Fläche F nicht mehr senkrecht bleiben. Die neue Bewegung des Schwerpunktes erfolgt zunächst in der Tangente t_1, geht aber, stets senhrecht zu F, allmählich in die Richtung von t_2 über, welches nicht mehr horizontal ist. Vor dem Eintritt in die zweite Bewegung könnte die Fläche noch Drehungen in ihrer Ebene um S_1 machen, von solchen soll aber zunächst abgesehen werden, was einen ersten Fall giebt.

§ 33) Erster Fall. Die Fläche macht vor dem Eintritt in die zweite Bewegung keine Drehung um den Schwerpunkt S_1. Dann sind die neuen Parallelkurven für die einzelnen Punkte (Kreisbogen, parallel zur zweiten Schmiegungsebene) die einfachen Fortsetzungen der vorhergegangenen. Alle Punkte bewegen sich also während der gesamten kleinen Einzelbewegungen in Parallelkurven zur Schwerpunktskurve.

Da die Guldinsche Inhaltsformel für alle einzelnen Teile gilt, bleibt sie auch für den gesamten Körper in Geltung.

Die Oberflächen von Körpern dieser Art sollen als Kanalflächen im engeren Sinne bezeichnet werden.

§ 34) Zweiter Fall. Das Bestehen der Guldinschen Inhaltsformel wird nicht aufgehoben, wenn die Fläche beim

Eintritt in jede neue Elementarbewegung eine Drehung in der augenblicklichen Ebene um den Schwerpunkt macht.*)

Denkt man sich diese Drehungen während der Bewegung kontinuierlich in sonst beliebiger Weise erfolgend, so werden auf der einen Seite der augenblicklichen Binormalen die Punkte erhöht, auf der andern erniedrigt und zwar so, dafs diese Erhöhungen und Erniedrigungen proportional der Entfernung vom Schwerpunkt S sind. Folglich bleiben die Bewegungskurven der einzelnen Punkte nicht mehr Parallelkurven der Schwerpunktskurven. Die entsprechenden Oberflächen können als Kanalflächen im weiteren Sinne gelten.

Die Oberfläche erhält im allgemeinen eine ganz neue Gestalt durch diese Drehungen, und, wie sich unten zeigen wird, auch einen anderen Flächeninhalt. [Nur der Fall ist ausgenommen, dafs die bewegte Fläche ein Kreis ist, dessen Drehungen um S_1 keinen Einflufs haben. Dies giebt die sogenannten Röhrenflächen im engsten Sinne, welche z. B. als umhüllende Fläche einer Kugel auftreten, deren Mittelpunkt sich auf beliebiger Raumkurve bewegt, z. B. auf einer Schraubenlinie.]

§ 35) Ein Sonderfall des zweiten Falles. Es kann gefordert werden, dafs der Krümmungsradius mit der bewegten Kurve bezw. Fläche stets starr verbunden bleibt (dafs also die Fläche stets längs derselben Geraden DF mit ihm verbunden ist). Soll dies geschehen, so mufs am Ende jeder Elementarbewegung die Fläche in ihrer Ebene um den Schmiegungswinkel σ des Schwerpunktsweges gedreht werden. [Dies wird z. B. bei allen Schraubengewinden gefordert. Deshalb bewegen sich bei diesen die Punkte der Fläche F nicht auf Parallelkurven, sondern auf Schraubenlinien von verschiedenen Steigungswinkeln und verschiedenen σ.] Man könnte die entsprechenden Oberflächen als geschraubte Kanalflächen bezeichnen. Selbstverständlich gilt auch hier die Guldinsche Inhaltsformel.

Auf den stattfindenden Drehungen in der Ebene der Fläche beruht, wie sich zeigen wird, die Schwierigkeit der

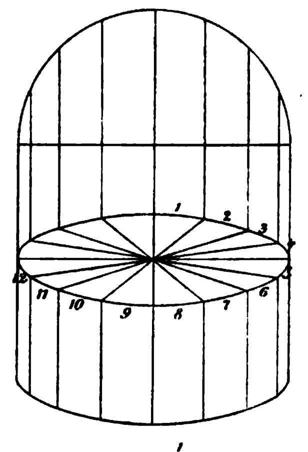
---

*) Auch hier bedürfen die Bemerkungen in Baltzers Elementen (II, Seite 268) einer Korrektur.

Berechnung von Schraubenflächen. Über solche sei einiges eingeschaltet.

ε) Einiges über Schraubengewinde, was mit der Guldinschen Inhaltsformel zusammenhängt.

§ 36) In Figur 14 ist zunächst die Einteilung des in Parallelperspektive gezeichneten Kreiscylinders in kongruente Sektoren durchgeführt. Die regelmäfsige Einteilung des Halbkreises ist dabei auf den Durchmesser projiziert worden. Darauf ist jeder Sektor an der Cylinderachse abwärts geschoben, derart, dafs eine Art Wendeltreppe mit gleich hohen und gleich „breiten" Stufen entsteht, deren Aufsenecken also in Schraubenlinien liegen. Denkt man sich die Anzahl der Sektoren unendlich grofs, so erhält man einen Körper, der von zwei „Minimalschraubenflächen" und einem cylindrischen schrägen Parallelstreifen (der, auf die Ebene abgewickelt, einen geradlinig begrenzten Parallelstreifen giebt) begrenzt wird. Der Parallelstreif, der vorher (beim Cylinder) in die Ebene abgewickelt ein Rechteck gab, giebt jetzt ein Parallelogramm von demselben Flächeninhalt. Dagegen sind die früheren Normalschnitte des Cylinders in Schraubenflächen gröfseren Inhalts übergegangen, der später berechnet werden soll (wozu die Guldinsche Flächenformel untauglich ist).



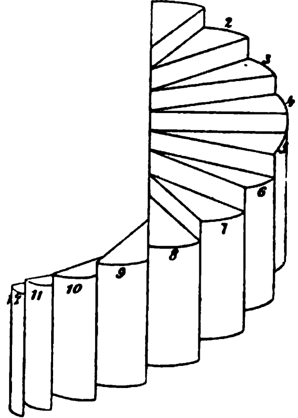


Fig. 14.

Der Inhalt der Körpersektoren hat sich durch die Verschiebung nicht geändert. Für den Cylinder war $J = 2\pi\varrho_1 F_1 = 2\pi\left(\frac{r_1}{2}\right) F_1 = \pi r_1 \cdot (r_1 b) = \pi r_1^2 b,$ wenn b

die Rechteckshöhe war. **Dieselbe Guldinsche Formel** $J = 2\pi\varrho_1 F_1$ **gilt also auch für den Umgang des betrachteten Schraubengewindes, wie grofs auch die Ganghöhe der Schraube sei.**

§ 37) In den Figuren 15 bis 18 sind einige andere Gewinde angedeutet. Figur 15 stellt das sogenannte **flache Schraubengewinde** dar, welches durch Schraubenbewegung eines rechteckigen Profils entsteht. Figur 16 ist

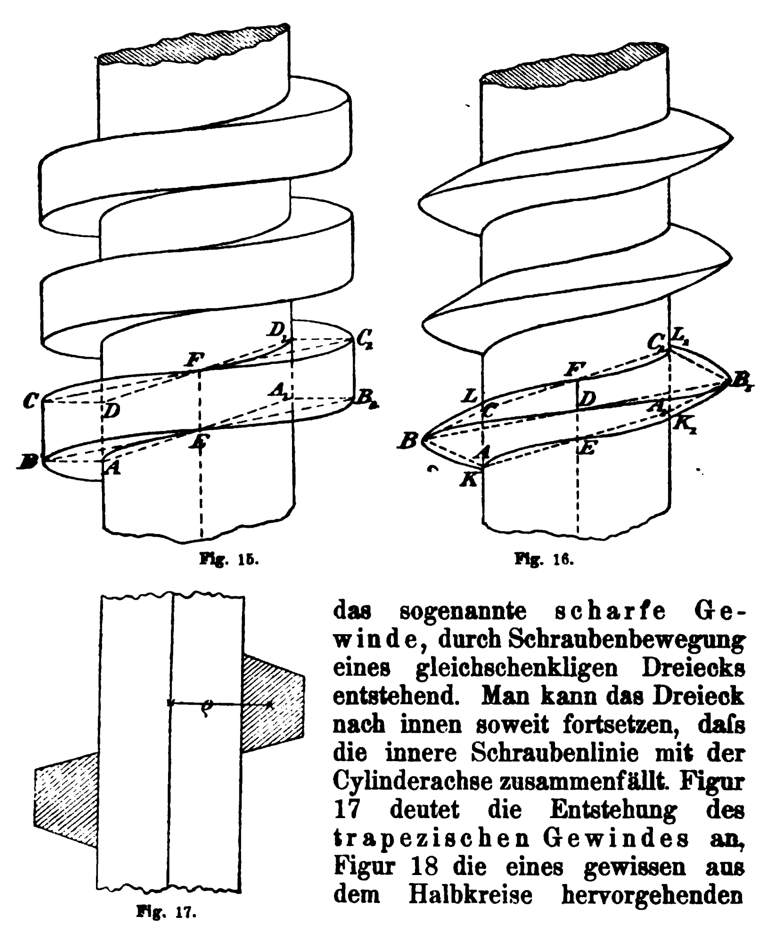


Fig. 15.

Fig. 16.

Fig. 17.

das sogenannte **scharfe Gewinde**, durch Schraubenbewegung eines gleichschenkligen Dreiecks entstehend. Man kann das Dreieck nach innen soweit fortsetzen, dafs die innere Schraubenlinie mit der Cylinderachse zusammenfällt. Figur 17 deutet die Entstehung des **trapezischen Gewindes** an, Figur 18 die eines gewissen aus dem Halbkreise hervorgehenden

Gewindes. Diesen Formen liefsen sich noch viele andere anschliefsen.

An jedem solchen Gewinde kann man dieselbe Sektorenbetrachtung vornehmen wie vorher. Jedesmal bleibt beim Übergange vom Drehungskörper zum Schraubengewinde der körperliche Inhalt derselbe. Da aber der erstere mit Hilfe der Guldinschen Regel berechnet wird, so gilt diese auch für den Inhalt des Schraubengewindes. Das Profil des Gewindes ist hier stets im Hauptschnitte (durch die Cylinderachse gelegt) zu denken, also schräg gegen die auftretenden Schraubenlinien, insbesondere der zum Flächenschwerpunkt gehörigen. Die Regel lautet also:

Der körperliche Inhalt eines Schraubengewindes für einen Umgang ist gleich dem des entsprechenden Drehungskörpers, also

1) $$J = 2\pi\varrho_1 F_1,$$

wo ϱ_1 den Schwerpunktsabstand des Profils von der Cylinderachse, F_1 die im Hauptschnitt liegende Profilfläche bedeutet.

So ist z. B. der Inhalt des in Figur 18 dargestellten Gewindes gleich dem der entsprechenden Kugel.

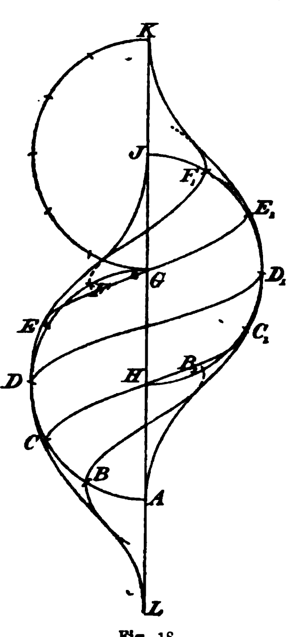


Fig. 18

§ 38) Man denke sich durch das Gewinde einer Schraube irgendwo einen Normalschnitt zur Cylinderachse gelegt. Alle so entstehenden Schnittflächen sind kongruent, und um gewisse Winkel gegeneinander gedreht, wobei die Drehung um die Cylinderachse erfolgt. Man kann sich also das Gewinde auch so entstehend denken, dafs diese Schnittfläche F_2 sich an der Cylinderachse parallel zu sich selbst hinaufschiebt, dafs aber dabei die Fläche Drehungen um diese Achse macht, die proportional dem Aufsteigen vor

sich gehen. Ist nun die Ganghöhe des Gewindes gleich h, so folgt als körperlicher Inhalt

$$2) \qquad J = hF_2,$$

denn nach Cavalieri bleibt der Inhalt gleich dem eines über jenem Normalschnitt stehenden Cylinders bezw. Prismas (bei dem nur die Verschiebung, nicht aber die Drehung stattfindet).

§ 39) Man denke sich jetzt das Gewinde folgendermafsen entstehend: Der Schwerpunkt einer ebenen Fläche F bewege sich stets senkrecht gegen diese, sein Weg aber sei eine Schraubenlinie. Damit nun alle Punkte Schraubenlinien derselben Ganghöhe geben, mufs die Fläche nicht nur die Drehungen k um die Krümmungsachsen des Schwerpunktweges mitmachen, sondern auch die Drehungen, die den sehr verschiedenen Torsionswinkeln σ der einzelnen Schraubenlinien entsprechen, in der eigenen Ebene zurücklegen, wie in § 35 gezeigt war.

Ist nun r_1 der Cylinderradius für die Schraubenlinie des Schwerpunktes der bewegten Fläche, und h die gemeinschaftliche Ganghöhe, also der Steigungswinkel durch $\tan\gamma = \frac{h}{2r_1\pi}$ bestimmt, so ist der Schwerpunktweg für einen Umgang $w = \frac{h}{\sin\gamma}$, der Krümmungsradius des Schwerpunktweges $\varrho = \frac{r_1}{\cos^2\gamma}$. Der Inhalt für einen Umgang wird dann nach der erweiterten Guldinschen Inhaltsformel

$$3) \qquad J = wF = \frac{h}{\sin\gamma}F = \frac{2\pi r_1}{\cos\gamma}F = 2\pi\varrho\cos\gamma F$$
$$= 2\pi\varrho F' = 2\pi a F.$$

Hier ist $F' = F\cos\gamma$ eine gewisse Projektion der bewegten Fläche und $2\pi\varrho$ gleich einer Kreisbahn vom Radius ϱ, womit wiederum ein Zusammenhang mit einem Drehungskörper gegeben ist; $a = \frac{r_1}{\cos\gamma}$ ist die gröfsere Halbachse der durch eine Schmiegungsebene aus dem Cylinder geschnittenen Ellipse, was auf einen dritten Drehungskörper führt.

§ 40) Im ganzen hat man bis jetzt für den Umgang des Gewindes drei Hauptformeln gefunden:

$$J = \frac{h}{\sin\gamma} F = 2\pi\varrho_1 F_1 = hF_2.$$

Daraus folgen zunächst die Gleichungen

$$4)\qquad F_1 = \frac{h}{\sin\gamma\, 2\pi\varrho_1} F = \frac{\cot\gamma_1}{\sin\gamma} F = \frac{2\pi r_1}{\cos\gamma\, 2\pi\varrho_1} F$$

$$= \frac{r_1}{\varrho_1 \cos\gamma} F = \frac{\varrho\cos\gamma}{\varrho_1} F = \frac{a}{\varrho_1} F.$$

$$5)\qquad F_2 = \frac{F}{\sin\gamma}.$$

$$6)\qquad F_2 = \frac{2\pi\varrho_1}{h} F_1 = \frac{F_1}{\tan\gamma_1},$$

wobei γ_1 der Steigungswinkel für die zu F_1 gehörige Schwerpunktsschraubenlinie ist.

Aus diesen Gleichungen läfst sich noch eine Reihe anderer ableiten, auf die jetzt nicht eingegangen werden soll.

§ 41) Man versuche noch den Fall zu erörtern, bei dem die Schraubenlinie dadurch in eine andere Kurve verwandelt wird, dafs der Steigungswinkel veränderlich gemacht wird. Die Profilformel $J = 2\pi\varrho_1 F_1$ und die Querschnittsformel $J = hF_2$ bleiben dabei bestehen. Die sogenannten Züge der Gewehrläufe und die der Kanonenrohre sind solche Kurven veränderlicher Steigung, die z. B. durch Abwickelung des Cylinders auf die Ebene einen Kreisbogen geben, also mit dessen Hilfe leicht herzustellen sind. Auch in der Industrie und im Kunstgewerbe kommen „Schraubenlinien mit veränderlicher Steigung“ vor.

ζ) Flächenberechnung für Guldinsche Drehungsgebilde.

§ 42) Der Kegelmantel. Dreht sich eine Gerade A_1A_2 um eine mit ihr in derselben Ebene liegende Achse PQ, und haben dabei die Endpunkte A_1 und A_2 von der Achse die Entfernungen r_1 und r_2, so hat der entstehende Kegelmantel die Fläche

$$M = \pi s (r_1 + r_2)$$

$$= 2\pi s \frac{r_1 + r_2}{2} = 2\pi\varrho s = ws,$$

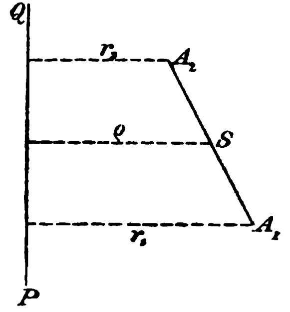


Fig. 19.

wobei s die Länge der Geraden, w der Weg ihres Schwerpunktes S ist. Für die so rotierende Gerade gilt also der Satz:

Mantelfläche gleich Länge der Geraden mal Schwerpunktsweg.

Er gilt auch dann, wenn der Drehungsweg nur den n^{ten} Teil der vollen Umdrehung ausmacht.

§ 43) Verallgemeinerung für jeden endlichen und ebenen gebrochenen Linienzug.

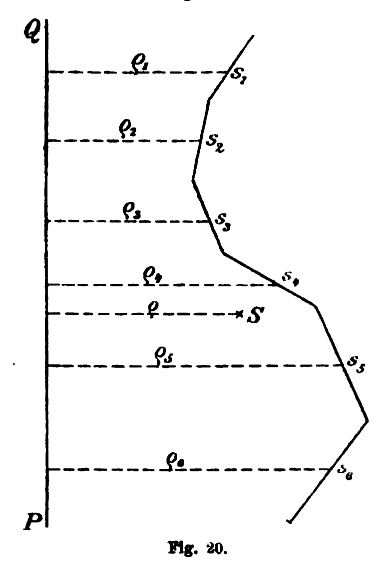


Fig. 20.

In einer durch die Drehungsachse PQ gelegten Ebene befinde sich eine Aufeinanderfolge von geraden Linien $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$, deren Schwerpunkte von PQ die Entfernungen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots$ haben. Dreht sich die Ebene um PQ, so beschreibt der Linienzug eine Mantelfläche, deren Inhalt nach obigem ist

$$M = 2\pi\varrho_1 s_1 + 2\pi\varrho_2 s_2 + 2\pi\varrho_3 s_3 + \ldots + 2\pi\varrho_n s_n$$
$$= 2\pi[\varrho_1 s_1 + \varrho_2 s_2 + \varrho_3 s_3 + \ldots + \varrho_n s_n] = 2\pi\varrho s = ws.$$

Hier steht in der Klammer das Produkt aus jeder Geraden und ihrem Schwerpunktsabstande, gewissermafsen die Summe der statischen Momente in Bezug auf die Achse PQ, die gleich dem statischen Momente des gesamten Linienzugs $s = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n$ ist, dessen Schwerpunkt von PQ die Entfernung ϱ habe, so dafs $w = 2\pi\varrho$ der Schwerpunktsweg des Gebildes ist. Die Mantelfläche ist also auch hier gleich dem Produkte aus der Länge des Linienzugs und dem Schwerpunktswege.

Dies gilt auch dann, wenn die Drehung nur den n^{ten} Teil einer vollen Umdrehung beträgt.

§ 44) Ausdehnung der Guldinschen Flächenformel auf den Fall der Umdrehung einer beliebigen

ebenen Kurve um eine Achse, die in derselben Ebene liegt. Man denke sich die ebene Kurve in so kleine Stücke zerlegt, dafs jedes als gerade Linie betrachtet werden kann, dann hat man wiederum den Flächeninhalt

$$M = 2\pi [\varrho_1 s_1 + \varrho_2 s_2 + \varrho_3 s_3 + \dots].$$

Man kann sich z. B. die Stücke s_1, s_2 ... gleich grofs denken, jedes gleich $\frac{s}{n}$, dann hat man

$$M = 2\pi \frac{s}{n} [\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \dots].$$

Nun ist aber $\varrho = \frac{\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \dots}{n}$ das mittlere ϱ, d. h. der mittlere Schwerpunktsabstand für alle gleich langen Stücke, also wird wiederum die Guldinsche Flächenformel

1) $$M = 2\pi\varrho s = ws,$$

d. h. Mantelfläche gleich Länge der Kurve mal Schwerpunktsweg.

Die Umkehrungen $\varrho = \frac{M}{2\pi s}$ und $s = \frac{M}{2\pi\varrho}$ können ebenfalls benutzt werden.

§ 45) Ausdehnung auf den Fall, dafs die Kurve von der Drehungsachse geschnitten wird. Wie bei der Körperformel erhalten die Abstände für jeden der beiden Kurventeile s_1 und s_2 entgegengesetzte Vorzeichen. Die Regel gilt also weiter in der Form

$$M = 2\pi\varrho s = 2\pi [\varrho_1 s_1 - \varrho_2 s_2],$$

so dafs es sich bei $\varrho s = \varrho_1 s_1 - \varrho_2 s_2$ um die Differenz der beiden statischen Momente handelt, was wieder das Gesamtmoment giebt.

Geht demnach die Drehungsachse z. B. durch den Schwerpunkt der Kurve, so wird bei dieser Auffassung die Mantelfläche gleich Null.

§ 46) Vergröfsert man den Schwerpunktsabstand der ebenen Kurve von der Drehungsachse um $\pm e$, so wächst die Mantelfläche bei voller Umdrehung

um $\pm 2\pi e s$. Denn $2\pi\varrho s$ geht über in $2\pi s(\varrho \pm e)$, der Unterschied ist also $\pm 2\pi e s$.

Diese Formel ist unabhängig von dem Schwerpunktsabstande ϱ, sie kann also auch angewandt werden, wenn man die Lage des Schwerpunktes nicht kennt. Man findet sogar mit ihrer Hilfe den Schwerpunktsabstand wieder, indem man $M_1 = M - 2\pi e s = 0$ setzt, nämlich als $e = \frac{M}{2\pi s}$. Kennt man z. B. den Kugelmantel als $M = 4\pi r^2$, und für den Halbkreis $s = r\pi$, so findet man $e = \frac{4\pi r^2}{2\pi . r\pi} = \frac{2r}{\pi}$.

§ 47) Der Schwerpunkt in sich zurücklaufender ebener Kurven fällt im allgemeinen nicht mit dem der zugehörigen umschlossenen Fläche zusammen. Hat jedoch die geschlossene Kurve mehrere Symmetrieachsen, so fallen beide Schwerpunkte zusammen. Im allgemeinen also sind die Abstände beider Punkte von einer willkürlich gewählten Drehungsachse verschiedene. Dies war schon in Bd. II für den Dreiecksumfang und die Dreiecksfläche gezeigt, ebenso für die Halbkreisfläche und ihre Umrandung, es gilt ebenso für die Hälfte der Ellipsenfläche und ihre Umrandung. Dagegen fallen beim Rechteck, bei regelmäfsigen Vielecken, beim ganzen Kreis, bei der ganzen Ellipse u. s. w. die Schwerpunkte der Fläche und ihrer Umrandung zusammen. Hier können also beide Guldinsche Formeln zusammen angewandt werden, was jedoch im allgemeinen nicht gestattet ist.

§ 48) Für die Mantelfläche eines Guldinschen Drehungskörpers ist neben der rektifizierten Umrandung s nur die Entfernung ϱ des Schwerpunktes von der Drehungsachse mafsgebend, nicht aber die Richtung der letzteren; nur mufs die Achse in der Ebene der Umrandung liegen. Obwohl für verschiedene Richtungen die Drehungsflächen sehr verschieden geformt sind, gilt doch bei übereinstimmendem Schwerpunktsabstande ϱ für sämtliche Drehungsflächen desselben Profils dieselbe Mantelformel

$$M = 2\pi\varrho' s.$$

η) Bedingte Verallgemeinerung des Guldinschen Flächensatzes für die Schwerpunktsbewegung auf beliebigen ebenen Kurven oder auf Raumkurven.

§ 49) Bewegt sich der Schwerpunkt einer geschlossenen oder nicht geschlossenen ebenen Kurve auf ebener Bahn und wird die bewegte Kurve von der Ebene der Bahn stets in denselben Punkten geschnitten, so ist, wenn w der Schwerpunktsweg, s die gestreckte Bogenlänge der Kurve ist, die entstehende Mantelfläche $M = ws$.

Der Beweis ist ebenso zu führen, wie bei der Inhaltsformel. Jeder kleine Weg des Schwerpunktes ist nämlich als eine kleine Kreisbewegung um die jedesmalige Krümmungsachse zu betrachten, und da alle Krümmungsachsen parallel sind, so treten keine Schmiegungswinkel σ auf, welche störend einwirken könnten. Alle Punkte bewegen sich in den einzelnen Phasen der Bewegung auf Parallelkurven zur jedesmaligen Schwerpunktsbewegung.

Bemerkung. Wird die bewegte Kurve von der Ebene der Bahn nicht immer in denselben Punkten geschnitten, d. h. finden Drehungen der bewegten Kurve in der eigenen Ebene um den Schwerpunkt statt, so wird im allgemeinen der Inhalt der Mantelfläche ein ganz anderer.

Man stelle sich z. B. die Kurve als Ellipse vor und denke sich die Drehungen um den Schwerpunkt am Ende jeder Elementarbewegung erfolgend. Dann würden die einzelnen Mantelteile dieselben Inhalte erhalten, wie vorher, aber die gesamte Mantelfläche würde keine zusammenhängende sein, sondern seitliche Öffnungen haben. Das Schliefsen der letzteren durch die nötigen Seitenflächen würde die Oberfläche vergröfsern.

Ein entsprechendes Vergröfsern der Oberfläche findet auch dann statt, wenn die Drehung um den Schwerpunkt kontinuierlich nach irgend einem einfachen oder komplizierten Gesetze erfolgt. Es ist dann ähnlich wie bei der Ausdehnung der Prismenformel $J = Fh$ für den Fall, dafs die einzelnen Schichten gegeneinander gedreht werden. Die Inhaltsformel bleibt dabei bestehen, jedoch die Mantelfläche behält nicht die Formel $M = uh$. Diese Fläche wird aus demselben Grunde vergröfsert, wie die hier besprochene. Nur wenn

der Querschnitt ein voller Kreis ist, sind die Drehungen um den Schwerpunkt ohne Einflufs, denn der Cylinder bleibt dabei ein Cylinder, die Mantelfläche jeder Schicht wird nur in sich bewegt.

Genau ebenso sind bei der hier zu untersuchenden Bewegung der ebenen Kurve Drehungen, die in deren Ebene um den Schwerpunkt stattfinden, nur dann gestattet, wenn die Kurve ein vollständiger Kreis ist. Dies gilt z. B. von den entsprechenden Röhrenflächen. Die Formel $M = ws$ bleibt für so entstehende Flächen erhalten.

Auf der Fläche befinden sich in diesen Sonderfällen neben den eigentlichen Bewegungskurven der Punkte auch solche ebene Kurven, die der ersten Bewegung (ohne Drehungen um den Schwerpunkt) entsprechen.

§ 50) Ist der Schwerpunktsweg eine Kurve doppelter Krümmung, so hört die Geltung der Guldinschen Mantelformel im allgemeinen auf. Die Gründe ergeben sich folgendermafsen:

Man kehre zu Figur 13 zurück und denke sich den Schwerpunktsweg w in gleich lange Teile $\frac{w}{n}$ zerlegt. Die erste Teilbewegung ist eine Drehung um die Achse μK. Für diese gilt die Formel $M_1 = \frac{w}{n} s$. Die zweite Teilbewegung um die Achse $\mu_1 K_1$ giebt dasselbe. Bei ihrem Beginne aber sind zwei Fälle möglich. Entweder verharrt die bewegte Kurve zunächst in der vorherigen Schlufslage, und die Bewegungskurven der einzelnen Punkte werden bei der Drehung um die Achse $K_1 \mu_1$ einfach Fortsetzungen der vorigen. Dann entstehen keine seitlichen Lücken, und die Formel $M_2 = \frac{w}{n} s$ gilt auch für den zweiten Teil der Bewegung u. s. w. Oder die bewegte Kurve macht erst eine Drehung in ihrer Ebene um den Schwerpunkt und dann erst beginnt die Drehung um $\mu_1 K_1$. Dann entstehen seitliche Lücken, zu deren Beseitigung Oberflächenteile zu nehmen sind, die eine Vergröfserung der Oberfläche bedingen. Eine

solche findet naturgemäfs auch dann statt, wenn die in der Ebene der Kurve um den Schwerpunkt erfolgende Drehung während der Drehung um μK bezw. $\mu_1 K_1$ kontinuierlich erfolgt. Nur wenn die bewegte Kurve ein vollständiger Kreis ist, sind diese Drehungen um den Schwerpunkt nicht störend für das Fortbestehen der Guldinschen Mantelformel. So kann man z. B. die letztere auf die gewöhnliche Schraubenröhrenfläche anwenden, überhaupt gilt dies von den aus der Bewegung einer unveränderlichen Kugel hervorgehenden Röhrenflächen. (Auf der Fläche befinden sich dann wieder beide Arten von Kurven.)

Im allgemeinen hört also die Geltung der Formel auf, z. B. auch dann, wenn die bewegte Fläche die Drehungen σ der Krümmungsachse des Schwerpunktsweges (beim Übergange aus der Lage μK in die Lage $\mu_1 K_1$) mitmacht, wie es z. B. bei den Schraubenflächen geschieht, wo der Krümmungsradius μS bezw. $\mu_1 S_1$ die bewegte Kurve stets in denselben Punkten F, D (bezw. $F_1 D_1$, $F_2 D_2$) schneidet. (Die bewegte Kurve ist dabei nicht etwa mit der Profilkurve des Gewindes zu verwechseln, die ganz anders gestaltet ist.) Für Schraubenflächen gilt demnach der Guldinsche Flächensatz im allgemeinen nicht, und dies erschwert ihre Berechnung. Unten werden z. B. Berechnungen von Schraubenregelflächen durchgeführt. Für solche Flächen gilt durchaus nicht die Formel $F = w \cdot s$, wo s die Länge der Geraden, w die Länge ihres Mittelpunktsweges ist. Durch die betreffenden Drehungen um S hören eben die Bewegungskurven der Punkte auf, Parallelkurven des Schwerpunktsweges zu sein. Während vorher die Schmiegungsebenen der Bewegungskurven aller Punkte der bewegten Fläche für jede Lage parallel waren, ist dies hier nicht mehr der Fall, jeder Punkt erhält eine Schraubenlinie von besonderem Steigungswinkel, also hat diese auch für jeden Punkt ein besonderes σ.

Später soll über diese Schraubenflächen eingehender gesprochen werden. Dabei wird sich zeigen, dafs jede offene (z. B. aufgeschnittene) Schraubenfläche so verbogen werden kann, dafs jede ihrer Schraubenlinien sich in einen Kreis verwandelt, so zwar, dafs eine Drehungsfläche entsteht, dafs also die Schraubenlinien und ihre Orthogonalkurven ein

isothermisches Kurvensystem geben, welches die konforme Abbildung auf die Ebene ermöglicht.

Am bequemsten erkennt man dies an jeder abwickelbaren Schraubenregelfläche, bei der schon oben gezeigt wurde, dafs die Abwickelung auf die Ebene die Schraubenlinien der Fläche, z. B. auch die beiden sie begrenzenden, von denen eine ihre Gratlinie ist, in ein System konzentrischer Kreise verwandelt.. (Vgl. Figur 21.)

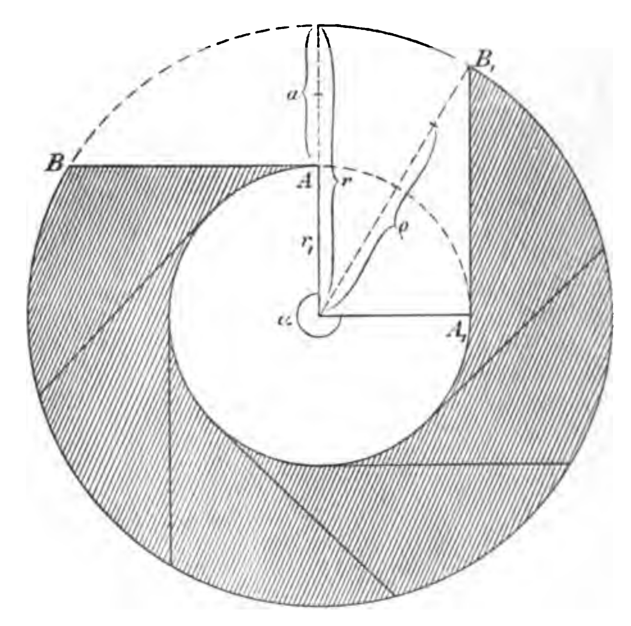


Fig. 21.

Dafs der so entstehende ebene Kreisring, der uendlichfach umlaufend zu denken ist, durch Radien und konzentrische Kreise in ein System von Quadraten eingeteilt, also auch auf einen unendlich langen Parallelstreifen der Ebene abgebildet werden kann, wurde schon in Bd. I und Bd. II (Seite 378) gelegentlich der Merkatorkarte auseinandergesetzt.

Als verallgemeinerte Guldinsche Flächen, für die sowohl die Inhalts- als auch die Mantel-

formel gilt, können also nur solche betrachtet werden, bei denen alle Punkte der bewegten ebenen Linie sich stets senkrecht gegen die augenblickliche Lage der ebenen Fläche bewegen. Die bewegte ebene Linie ist dabei stets Krümmungslinie der Fläche, denn die Normalen, die für eine bestimmte Lage in ihren Punkten auf der entstehenden Fläche errichtet werden, liegen in ihrer Ebene, schneiden sich also längs einer entsprechenden Gratlinie. Die Bewegungskurven der einzelnen Punkte geben die andere Schar von Krümmungslinien der entstehenden Fläche, weil sie senkrecht zu den vorigen stehen. Die bewegte ebene Kurve ist dabei geodätische Linie der Fläche, denn der Abstand von Bewegungskurve nach Bewegungskurve ist für sie überall kleiner, als bei jeder anderen Kurve auf der Fläche.

Mit Ausnahme der aus dem Kreis entstehenden Schraubenröhrenfläche, bei der jedoch neben den Krümmungslinien zweiter Art auch andere Kurven als Bewegungskurven betrachtet werden können, kann keine einzige Schraubenfläche als hierher gehörig betrachtet werden. Die erstere soll unten einer eingehenderen Behandlung unterworfen werden.

ϑ) Geschichtliches über die Guldinschen Regeln.

§ 51) Schon Pappus hat (um 300 oder 400 nach Chr.) den Satz ausgesprochen, dafs bei Drehungskörpern der Körperinhalt dem Schwerpunktswege der Fläche proportional sei. Man findet ihn gegen den Schlufs des Vorwortes zum 7. Buch der Collectanea (vergl. Ausgabe Hultsch Seite 682). Dort heifst es:

„Figurae perfecta rotatione genitae proportionem habent compositam et ex rotantibus et ex rectis similiter ad axes ductis a gravitatis centris, quae in rotantibus sunt.“ Das soll heifsen: „Die Figuren (Raumgebilde), die durch vollständige Umdrehung entstehen, haben ein Gröfsenverhältnis, welches zusammengesetzt ist sowohl aus den Gröfsen der rotierenden Gebilde, als auch aus den Geraden, welche in gleichmäfsiger Weise nach den Drehungsachsen gezogen sind

von den Schwerpunkten aus, die in dem rotierenden Gebilde liegen." „Figurae imperfecta rotatione genitae proportionem habent compositam et ex rotantibus et ex arcubus, quos centra in his gravitatis descripserunt." Es handelt sich also erstens um die Gröfsen der rotierenden Gebilde, sodann um die von den Schwerpunkten beschriebenen Bogen. „Sed horum arcuum proportionem apparet compositam esse et ex ductis ad axes et ex angulis, quos harum extremitates continent, si ad axes figurarum rotatione genitarum sint." „Aber das Gröfsenverhältnis dieser Bogen ist offenbar zusammengesetzt sowohl aus den nach den Achsen gezogenen Linien, als auch aus den Winkeln, welche deren äufserste einschliefsen, wenn sie zu den Achsen der durch Umdrehung entstandenen Raumgröfsen gehören." Ein Beweis wird aber nicht gegeben.

Über Pappus wurde schon früher berichtet und auf Cantor I, 2. Auflage Seite 409 bis 427 verwiesen. Seine Schwerpunktsdefinition findet sich in der *συναγωγή* am Anfang des 8. Buches.

Auch bei Kepler findet man Ansätze zur Guldinschen Regel, und zwar in seiner stereometria doliorum (1615), theor. 18 u. s. w. Seine Begründung der Körperformel ist nur wenig von der Guldins unterschieden.

Barth. Souvey und Joh. Ant. Rocca haben gleichfalls schon vor Guldin die Regel benutzt.

Habakuk Guldin (1577 bis 1643) wurde als Kind protestantischer Eltern in St. Gallen geboren und erlernte das Handwerk der Goldschmiede. Im 20. Lebensjahre trat er in Freisingen zum Katholizismus über und wurde Mitglied des Jesuitenordens, wobei er seinen Vornamen in Paul umwandelte. Als man seine mathematische Begabung erkannte, schickten die Vorgesetzten ihn zur Ausbildung nach Rom. Er beschäftigte sich besonders mit Schwerpunktsbestimmungen. Im Jahre 1635 bezw. 1640 und 1641 liefs er die verschiedenen Teile seiner Centrobaryca erscheinen, die in Wien veröffentlicht wurden. Es handelt sich um vier Bücher, 1) De centri gravitatis inventione; 2) De usu centri gravitatis binarum specierum quantitatis continuae sive de compositione et resolutione potestatum rotundarum; 3) De fructu ex usu centri gravitatis collecto; 4) De gloria ab usu centri-gravitatis parta. Im 8. Kapitel des zweiten Buches findet

man die „Propositio III. Rotationem compisitionis ac mensurationis potestatum rotundarum exponere ejusque regulam universalem tradere.“ Dort heifst es: Regula generalis compositionis potestatum rotundarum cujuscunque gradus haec est: „Quantitas rotunda in viam rotationis ducta producit potestatem rotundam uno gradu altiorem potestate sive quantitate rotata.“ Er sagt von der Regel, sie sei brevis, universalis, simplex atque amplissimi usus, omni gradui potestatum deserviens. Weiteres findet man in der Programmabhandlung 1900 des Gymnasiums zu Eisenberg, verfafst von Dr. Fleck.

Guldin zitiert den Pappus oft, wahrscheinlich nach der Ausgabe von 1588, auffälligerweise aber nicht die oben angeführten Sätze des alten Alexandriners. Auch er gab keinen strengen allgemeinen Beweis der Regel, sondern eigentlich nur eine Sammlung wichtigerer Beispiele. Als er daher den Cavalieri hinsichtlich der Strenge der nach diesem genannten Methode angriff, hatte dieser Gelegenheit, gegen Guldin sich ähnlich auszusprechen. Vor allem aber warf er ihm vor, dafs er seine Methode den Mathematikern Kepler, Barth. Souvey und Joh. Ant. Rocca verdanke, ohne darüber etwas zu sagen. Eigentlich hätte aber auch Cavalieri vor allen anderen auf Pappus hinweisen müssen. Über diesen Streit vergleiche man Cantors Geschichtswerk II, 2. Auflage Seite 843.

Später als Guldin hat sich Antoine de Lalouvère (De la Loubère bezw. Lalovera, 1600 bis 1664) mit der Regel beschäftigt, ohne seine Vorgänger zu nennen.

Die Verallgemeinerung der Regel für beliebige Wege wurde von Leibnitz angebahnt und zwar in der Acta Erudit. 1695 Seite 493.

Darauf schrieb Euler im Jahre 1778 in den Nov. Acta Petropol. 12 Seite 91 eine Abhandlung „über krumme Cylinder“, in der er die Bedingungen festzustellen sucht, unter denen die Regel weiter gilt.

Seitdem wird die verallgemeinerte Regel vielfach in den Lehrbüchern der analytischen Mechanik ausgesprochen, jedoch bisweilen nicht mit den richtigen Bedingungen für die Weitergeltung. (Vergl. Poisson, Mécanique, Seite 84, auch Schlömilch, anal. Mechanik. I, Seite 152.)

In der Aufgabensammlung von Meier Hirsch befinden sich ebenfalls irrige Angaben, falsche Beispiele und fehlerhafte Beweise (Geom. Aufgaben II § 174 u. s. w.), worauf Steiner, Baltzer, Zehme und andere aufmerksam machen.

Zahlreiche Beispiele, besonders solche technischer Art, brachte Zehme in seiner „Geometrie der Körper“ (Iserlohn bei Bädeker, 1859). An ihn lehnen sich die Aufgabensammlungen anderer an. Zehme hat namentlich die Sätze über die Verschiebung der Achse von $\pm e$ erfolgreich benutzt. Prof. Dr. Fleck giebt in der schon genannten Programmabhandlung wertvolle geschichtliche Bemerkungen, nimmt aber trotz Baltzers Warnung die von Meier Hirsch angeblich bewiesene Erweiterung an. Unter den zahlreichen Beweisen, die Fleck wiedergiebt, befindet sich nicht der oben vom Verfasser angewandte (den dieser seit 1872 im Unterrichte angewandt hat), obwohl er sich durch seine Einfachheit vor allen anderen auszeichnet.

In des Verfassers Ingenieur-Mathematik (Leipzig bei Teubner, 1897) findet man viele Beispiele zur Regel, besonders solche technischer Art.

Auf die Schwerpunkte der Guldinschen Drehungskörper, die für die Technik von besonderer Bedeutung sind, geht die Ingenieur-Mathematik des Verfassers ebenfalls ein. Dort werden die statischen Momente erster Ordnung mit denen der zweiten Ordnung in nutzbringender Weise kombiniert.

ι) Beispiele Guldinscher Berechnungen an Drehungsgebilden, die aus Kreisbogen und Geraden hervorgehen.

§ 52) Eine Kreisfläche vom Radius r werde um eine in ihrer Ebene liegende Achse gedreht, deren Entfernung ϱ vom Mittelpunkte gröfser ist, als r. Der entstehende Ringkörper soll für vollständige und unvollständige Umdrehung nach Oberfläche und Inhalt berechnet werden.

Auflösung: Die Mantelfläche wird bei ganzer Umdrehung

$$M = 2\pi\varrho \,.\, 2\pi r = 4\pi^2 r\varrho,$$

der körperliche Inhalt

$$J = 2\pi\varrho \,.\, \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 \varrho.$$

Ist der unvollständige Drehungswinkel durch den Bogen $\hat{\alpha}$ am Einheitskreise gegeben, so ist der Schwerpunktsweg $w = \varrho\hat{\alpha}$, also wird

$$M = \varrho\hat{\alpha} \,.\, 2\pi r = 2\pi\hat{\alpha}r\varrho,$$

$$J = \varrho\hat{\alpha} \,.\, \pi r^2 = \pi\hat{\alpha}r^2\varrho.$$

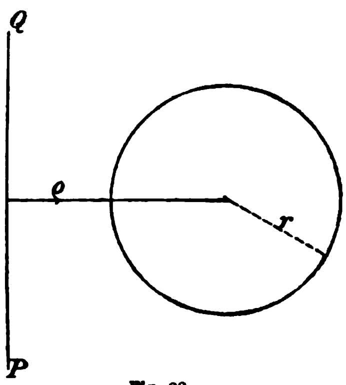


Fig. 22.

Ist der Umdrehungswinkel durch Grade gegeben, also z. B. gleich α^0, so ist

$$\hat{\alpha} = \pi \frac{\alpha^0}{180^0},$$

und es wird

$$M = 2\pi \,.\, \pi \frac{\alpha^0}{180^0} \cdot r\varrho = \pi^2 r\varrho \frac{\alpha^0}{90^0},$$

$$J = \pi \,.\, \pi \frac{\alpha^0}{180^0} r^2\varrho = \pi^2 r^2 \varrho \frac{\alpha^0}{180^0}.$$

Bemerkungen. α) In Figur 23, die schon in Bd. I besprochen ist, hat man die Einteilung dieser Oberfläche durch zwei Scharen schräger Kreisschnitte in kleine ähnliche Rhomben. Der zwischen je zwei Kreisen der einen dieser Scharen befindliche Flächenstreif hat die Fläche

$$F_1 = \frac{M}{n} = \frac{4}{n}\pi^2 r\varrho,$$

wenn n die Anzahl dieser Streifen ist. Da die Kreisschnitte ebene Schnitte sind, läfst sich auch der körperliche Inhalt zwischen je zwei benachbarten

$$J_1 = \frac{J}{n} = \frac{2}{n}\pi^2 r^2 \varrho$$

setzen. Da übrigens jeder dieser ebenen Schnitte eigentlich zwei einander schneidende Kreise giebt, lassen sich noch weitere Bemerkungen anknüpfen.

Entsprechende Betrachtungen lassen sich über beliebige ebene Schrägschnitte, die in kongruenter Weise aufeinander

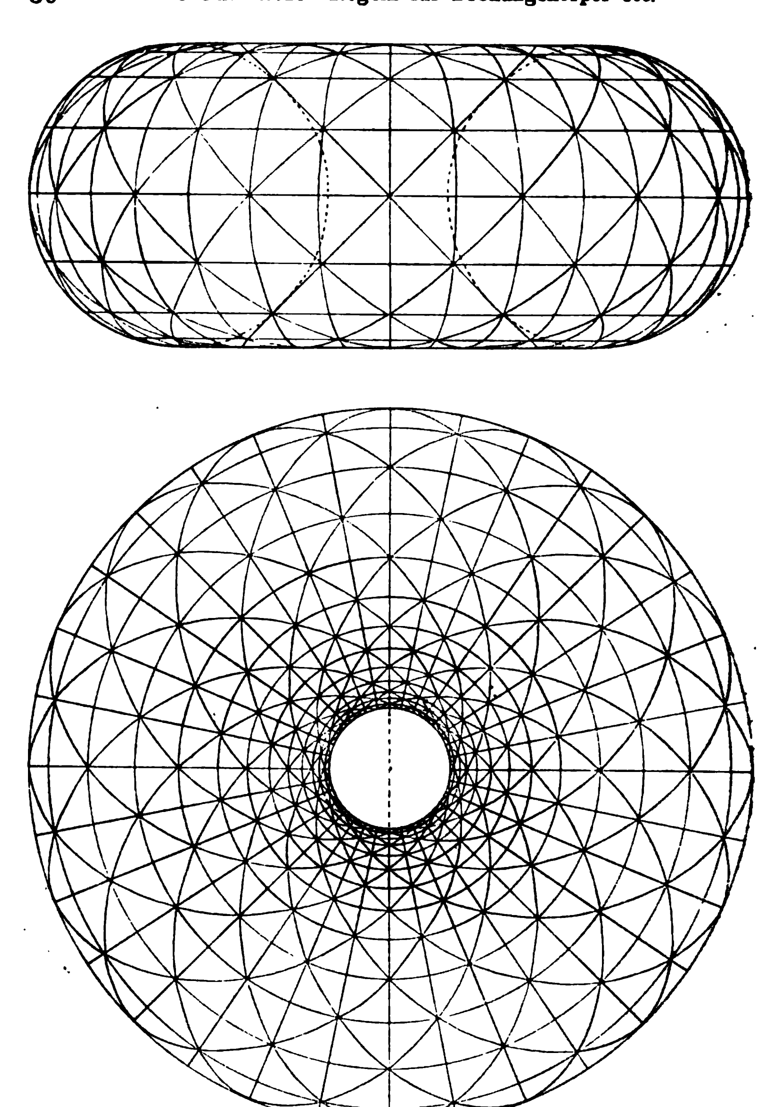


Fig. 23.

folgen, anstellen. Dasselbe gilt von loxodromischen Flächenstreifen, deren Grenzlinien nach einem oder zwei oder mehreren Umgängen in sich selbst zurücklaufen. Solche waren z. B. in Figur 227 des ersten Bandes dargestellt.

b) Will man das Gewicht des Ringkörpers (der auch als Drehungscyklide, oder als Wulst oder als Torus bezeichnet wird) erhalten, so hat man den Inhalt J mit dem spezifischen Gewichte p' zu multiplizieren.

Bei zahlreichen Aufgaben der Mechanik bedarf man auch der Massen des Körpers, d. h. der Anzahl der Masseneinheiten. Beim technischen Mafssystem erhält man diese durch die Gleichung $m = \frac{p}{g}$, wo g die Freifallbeschleunigung ist, also z. B. $g = 9{,}81$, wenn p in Tonnen gegeben ist, oder $g = 981$, wenn p in Grammen gegeben ist. (Beim absoluten Mafssystem ist es anders. Dabei giebt die Zahl p' die Anzahl der Masseneinheiten in der Raumeinheit, und das Gewicht wird durch Multiplikation mit dem betreffenden g gefunden.)

(Die wichtige Aufgabe, den Schwerpunkt der durch einen Hauptschnitt [durch die Umdrehungsachse gelegt] abgetrennten Ringhälfte zu finden, kann erst später gelöst werden. Die Schwerpunkte der Sektoren liegen nicht etwa auf der Schwerpunktsbahn des bewegten Querschnitts, sondern weiter nach aufsen, weil die Sektoren sich in dieser Richtung verbreitern. Durch diese vorläufige Bemerkung soll vor einem naheliegenden Fehler gewarnt werden. Sie bezieht sich auch auf die entsprechende Hälfte der Mantelfläche.)

§ 53) Statt des Kreises kann man auch regelmäfsige Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, . . ., n = Ecke um eine Achse ihrer Ebene rotieren lassen. Die Aufgaben können noch dadurch komplizierter gemacht werden, dafs man sich aus der zu bewegenden Fläche einen konzentrischen Kreis oder ein konzentrisches regelmäfsiges Vieleck aufgeschnitten denkt, wodurch weder der Schwerpunkt der Fläche, noch der der Umrandung geändert wird. Dabei wird der Inhalt des Drehungskörpers mit Hilfe der Formel $J = J_1 - J_2 = 2\pi\varrho (F_1 - F_2)$ gefunden, die gesamte Mantelfläche aber mit Hilfe der Gleichung $M = M_1 + M_2 = 2\pi\varrho(u_1 + u_2)$, wo die u den Umfang der Kreise, bezw. der Polygone bedeuten.

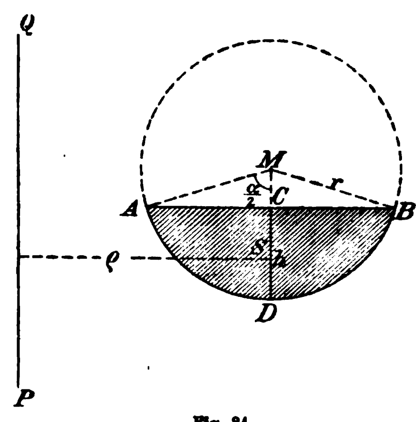


Fig. 24.

§ 54) Ein Kreissegment sei durch eine Gerade AB vom Kreise mit Radius r abgeschnitten und drehe sich um eine Achse PQ, die parallel zur Symetrielinie $CD = h$ ist und in der Entfernung ϱ von dieser in der Ebene des Kreises liegt. Der Inhalt des entstehenden Drehungskörpers soll berechnet werden.

Auflösung. Die Fläche F des Segmentes ist der Unterschied zwischen dem Sektor $F_1 = MADB$ und dem Dreieck $F_2 = MAB$, also, wenn der Centriwinkel des Sektors durch den Bogen $\hat{\alpha}$ des Einheitskreises gegeben ist,

$$F = F_1 - F_2 = \frac{r^2\hat{\alpha}}{2} - \frac{r^2}{2}\sin\hat{\alpha} = \frac{r^2}{2}(\hat{\alpha} - \sin\hat{\alpha}).$$

Demnach wird

$$J = 2\pi\varrho\,.\frac{r^2}{2}(\hat{\alpha} - \sin\hat{\alpha}) = \pi\varrho r^2(\hat{\alpha} - \sin\hat{\alpha}).$$

Dabei bestimmt sich $\hat{\alpha}$ aus $\cos\frac{\hat{\alpha}}{2} = \frac{CM}{AM} = \frac{r-h}{r}$.

(Gegebenen Falls wird erst α^0 und dann $\hat{\alpha}$ bestimmt.) Ist $h > r$, so handelt es sich um $F = F + F_2 =$ Sektor $+$ Dreieck.

Bemerkungen. a) Man kann auch die Wölbungsfläche des so entstehenden „Troges" berechnen. Sie wird, da der Bogen ADB die Länge $s = r\hat{\alpha}$ hat, $F_1 = 2\pi\varrho\, s = 2\pi\varrho r\hat{\alpha}$.

Die Gesamtoberfläche erhält man durch den Zusatz

$$F_2 = 2\pi\varrho\,.AB = 2\pi\varrho\,.2r\sin\frac{\hat{\alpha}}{2} = 4\pi\varrho r\sin\frac{\alpha}{2}.$$

b) Der entstandene Körper ist ein Segment des vorher berechneten Wulstes. Ist dieser z. B. aus Holz angefertigt,

und sinkt er bei derselben Stellung bis zur Tiefe h ins Wasser ein, so läfst sich das **spezifische Gewicht des Körpers** berechnen aus

$$p' = \frac{\text{Wasserraum}}{\text{Körperraum}} = \frac{W}{K} = \frac{\pi \varrho r^2 (\hat{\alpha} - \sin\hat{\alpha})}{2\pi^2 \varrho r^2} = \frac{\hat{\alpha} - \sin\hat{\alpha}}{2\pi},$$

wobei wiederum $\hat{\alpha}$ mit Hilfe von $\cos\frac{\hat{\alpha}}{2} = \frac{r-h}{r}$ zu bestimmen ist. Unter W ist natürlich der Raum des verdrängten Wassers verstanden. (Ist $h > r$, so handelt es sich wieder um Sektor + Dreieck.) Ist p' gegeben und h gesucht, so handelt es sich um die Auflösung der transscendenten Gleichung für p' nach $\hat{\alpha}$, die für numerische Beispiele mit beliebiger Annäherung gelöst werden kann.

§ 55) Dreht sich um PQ der **konzentrische Kreisring** mit den Radien r und r_1, so wird

$$J = 2\pi\varrho(\pi r^2 - \pi r_1^2)$$
$$= 2\pi^2\varrho(r^2 - r_1^2)$$
$$= 2\pi^2\varrho(r + r_1)(r - r_1).$$

Die Summe der beiden Oberflächen wird

$$O = 2\pi\varrho(2\pi r + 2\pi r_1)$$
$$= 4\pi^2\varrho(r + r_1).$$

Fig. 25.

Bemerkung. Taucht dieser Körper bis zur Tiefe h ins Wasser ein, so wird für $h < r$ das spezifische Gewicht

$$p' = \frac{W}{K} = \frac{\pi\varrho r^2(\hat{\alpha} - \sin\hat{\alpha})}{2\pi^2\varrho(r^2 - r_1^2)} = \frac{r^2(\hat{\alpha} - \sin\hat{\alpha})}{2\pi(r^2 - r_1^2)}.$$

Man versuche dieselben Aufgaben für die untere Hälfte des Körpers oder für ein kleineres durch Horizontalschnitt entstandenes Segment zu lösen.

§ 56. **Den Schwerpunkt der Halbkreisfläche und des Halbkreisbogens mit Hilfe der Guldinschen Regeln zu bestimmen.**

Auflösung. a) Die Drehung um den begrenzenden Durchmesser verwandelt die Halbkreisfläche $F = \frac{\pi}{2} r^2$ in

eine Kugel vom Inhalte $J = \frac{4}{3}\pi r^3$. Nach der Guldinschen Inhaltsformel ist $\varrho = \frac{J}{2\pi F}$, also wird hier

$$1) \qquad \varrho = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi \cdot \frac{\pi}{2} r^2} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Der Schwerpunkt der Fläche liegt also auf der Symmetrielinie im Abstande $\frac{4r}{3\pi}$ vom Mittelpunkte des Kreises.

b) Dieselbe Drehung verwandelt den Halbkreisbogen $s = \pi r$ in die Oberfläche $M = 4\pi r^2$ einer Kugel. Nach der Guldinschen Flächenformel ist aber $\varrho = \frac{M}{2\pi s}$, also wird hier

$$2) \qquad \varrho_1 = \frac{4\pi r^2}{2\pi \,.\, \pi r} = \frac{2r}{\pi}.$$

Folgerungen. Für die Fläche des Viertelkreises folgt $\varrho = \frac{4r}{3\pi}\sqrt{2}$, für den Bogen des Viertelkreises $\varrho = \frac{2r}{\pi}\sqrt{2}$.

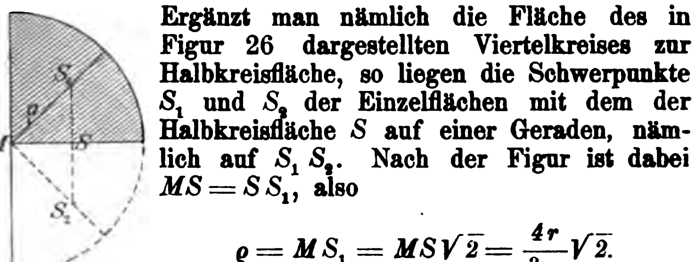


Fig. 26.

Ergänzt man nämlich die Fläche des in Figur 26 dargestellten Viertelkreises zur Halbkreisfläche, so liegen die Schwerpunkte S_1 und S_2 der Einzelflächen mit dem der Halbkreisfläche S auf einer Geraden, nämlich auf $S_1\,S_2$. Nach der Figur ist dabei $MS = S\,S_1$, also

$$\varrho = M\,S_1 = MS\sqrt{2} = \frac{4r}{3\pi}\sqrt{2}.$$

Ebenso ist der Bogen des Viertelkreises zum Halbkreisbogen zu ergänzen, worauf derselbe Gang auf $M\,S'_1 = \varrho_1 = \frac{2r}{\pi}\sqrt{2}$ führt.

In ähnlicher Weise kann man die Schwerpunkte für die Fläche des Achtelkreises und den Bogen des Achtelkreises bestimmen, indem man die Ergänzung zum Viertel-

kreise vornimmt. Mit den Halbierungen könnte man so weiter fortfahren, es ist aber vorzuziehen, die Aufgabe sofort für jeden beliebigen Kreissektor oder Bogen zu bestimmen.

§ 57. **Den Schwerpunkt der Fläche des Kreissektors zu bestimmen.**

Auflösung. Durch Umdrehung des Kreissektors um den zu seiner Sehne AB parallelen Durchmesser PQ entsteht eine Zonenpyramide, deren gewölbte Grundfläche den Inhalt $F_1 = 2r\pi h$ hat, wo r den Kreisradius, h die Sehne AB bedeutet. Der Inhalt des Körpers ist also*)

$$J = F_1 \cdot \frac{r}{3} = 2r\pi h \frac{r}{3} = \frac{2}{3} r^2 \pi h.$$

Der Kreissektor hat die Fläche $F = \frac{r^2 \hat{\alpha}}{2}$, wo $\hat{\alpha}$ den zum Winkel AMB gehörigen Bogen des Einheitskreises bedeutet. Die Umkehrung der Guldinschen Inhaltsformel giebt den Schwerpunktsabstand $MS = \frac{J}{2\pi F}$, oder

Fig. 27.

$$\varrho = \frac{\frac{2}{3}\pi r^2 h}{2\pi \frac{r^2 \hat{\alpha}}{2}} = \frac{2h}{3\alpha} = \frac{2rh}{3r\hat{\alpha}} = \frac{2rh}{3b},$$

wo b den Bogen AEB bedeutet. Dabei ist h mit Hilfe von $\frac{h}{2} = r \sin \frac{\hat{\alpha}}{2}$ zu bestimmen, oder, wenn h gegeben ist

*) Die Übereinstimmung mit der Formel für den Kugelsektor braucht nicht zu überraschen. Da nämlich alle Kugelzonen von der Höhe h dieselbe Fläche $2\pi rh$ haben, so haben alle zugehörigen Zonenpyramiden den Inhalt $\frac{2}{3}\pi r^2 h$. Man kann also die Kugel leicht in n inhaltsgleiche Zonenpyramiden zerlegen, ebenso leicht das Ellipsoid. Bei letzteren kann man Parallelschnitte zu einer beliebigen Tangentialebene legen, die den zugehörigen Durchmesser in n gleiche Teile zerlegen.

$\hat{\alpha}$ mit Hilfe der Gleichung $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{h}{2r}$. Sollte der Sektor durch r und $CE=\frac{r}{n}$ bestimmt sein, so hat man bequem

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{MC}{r}=\frac{r-\frac{r}{n}}{r}=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n},$$

woraus auch $\frac{h}{2}=r\sin\frac{\hat{\alpha}}{2}$ oder

$$\frac{h}{2}=r\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=r\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$$
$$=\frac{r}{n}\sqrt{n^2-(n-1)^2}=\frac{r}{n}\sqrt{2n-1}$$

bequem zu bestimmen ist. Also

$$\varrho=\frac{2h}{3\hat{\alpha}}=\frac{\frac{4r}{n}\sqrt{2n-1}}{3\hat{\alpha}}=\frac{4r\sqrt{2n-1}}{3n\hat{\alpha}}.$$

§ 58. **Den Schwerpunkt eines beliebigen Kreisbogens $s=r\hat{\alpha}$ zu bestimmen.**

Auflösung. Die Mantelfläche ist die des vorigen Beispiels, also $M=2r\pi h$, der Bogen $s=r\hat{\alpha}$, nach der Umkehrung der Flächenformel ist also der Abstand ϱ_1 von M zu berechnen aus

$$\varrho_1=\frac{M}{2\pi s}=\frac{2\pi rh}{2\pi s}=\frac{rh}{s}=\frac{rh}{r\hat{\alpha}}=\frac{h}{\hat{\alpha}}.$$

Dabei ist h zu bestimmen aus $\frac{h}{2}=r\sin\frac{\hat{\alpha}}{2}$, so dafs man auch schreiben kann

$$\varrho_1=\frac{2r\sin\frac{\hat{\alpha}}{2}}{\hat{\alpha}}.$$

Ist $\hat{\alpha}=\frac{2\pi}{n}$, so hat man bequem $\varrho_1=\frac{h}{\frac{2\pi}{n}}=\frac{n}{2}\frac{h}{\pi}$.

§ 59) **Den Schwerpunkt für die Fläche des Kreissegmentes zu bestimmen.**

Auflösung: Man benutze die vorige Figur (27). In dieser ist die Segmentfläche ABE nach obigem $F = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\hat{\alpha})$, worin für $CE > r$ zu setzen ist $\frac{r^2}{2}(\hat{\alpha} + \sin\hat{\alpha})$ und $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{2r}$ ist. Der Inhalt J des Drehungskörpers ist gleich Schicht — Cylinder $= \frac{\pi h}{6}(3a^2 + 3a^2 + h^2) - \pi a^2 h = \frac{\pi h^3}{6}$. Demnach wird der Abstand des Schwerpunktes vom Kreiszentrum

$$\varrho = \frac{J}{2\pi F} = \frac{\frac{\pi h^3}{6}}{2\pi\frac{r^2}{2}(\hat{\alpha} - \sin\hat{\alpha})} = \frac{h^3}{6r^2(\hat{\alpha} - \sin\hat{\alpha})}.$$

Dafür kann man auch schreiben $\varrho = \frac{\frac{6J}{\pi}}{12F} = \frac{h^3}{12F}$.

§ 60) **Den Schwerpunkt der konzentrischen Halbkreisfläche zu bestimmen.** (Figur 28.)

Auflösung. $J = \frac{4}{3}\pi(r^3 - r_1^3)$,

$F = \frac{\pi}{2}(r^2 - r_1^2)$, folglich

$$MS = \varrho = \frac{J}{2\pi F} = \frac{\frac{4}{3}\pi(r^3 - r_1^3)}{2\pi\cdot\frac{\pi}{2}(r^2 - r_1^2)},$$

oder

$$\varrho = \frac{4(r^3 - r_1^3)}{3\pi(r^2 - r_1^2)}.$$

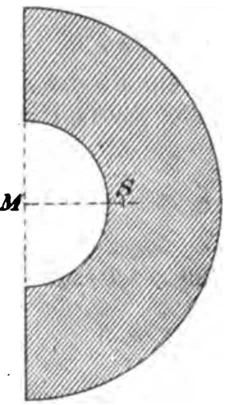


Fig. 28.

Zähler und Nenner lassen sich noch durch $r - r_1$ dividieren, was auf

$$\varrho = \frac{4(r^2 + rr_1 + r_1^2)}{3\pi(r + r_1)}$$

führt. Letzteres ist nur insofern von Interesse, als man für $r_1 = r_2$ die Probe für die Berechnung des Schwerpunktes vom Halbkreisbogen erhält. Er ergiebt sich nämlich

$$\varrho = \frac{4 \,.\, 3r^2}{3\pi \,.\, 2r} = \frac{2r}{\pi}.$$

Bemerkungen. Man versuche auch allgemeine Sektoren und Segmente der von zwei konzentrischen Kreisen begrenzten Fläche so zu behandeln. Diese Ringsektoren sind von Bedeutung für die Zonenpyramide, besonders wie sie der quadratischen Einteilung entsprechen. Vergl. Figur 137 von Bd. II und Randbemerkung bei § 57.

§ 61) Den Schwerpunkt für einige Umrandungen zu bestimmen.

a) Ganzer Umfang der Halbkreisfläche. Der Abstand von M wird

$$\varrho_2 = \frac{M}{2\pi s} = \frac{4r^2\pi + o}{2\pi(r\pi + 2r)} = \frac{2r}{\pi + 2}.$$

b) Ganzer Umfang des Segments. Der Abstand von M wird

$$\varrho_2 = \frac{M}{2\pi s} = \frac{2\pi rh + 2\pi r \cos\frac{\hat{\alpha}}{2} h}{2\pi \,.\, (r\hat{\alpha} + h)} = \frac{hr\left(1 + \cos\frac{\hat{\alpha}}{2}\right)}{r\hat{\alpha} + h}.$$

Für $h = 2r$ und $\alpha = \pi$ bestätigt sich die vorige Formel.

c) Für die Umrandung des Sektors wird der Abstand von M

$$\varrho_2 = \frac{M}{2\pi s} = \frac{2\pi rh + 2\pi\left(\frac{r}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)2r}{2\pi[r\hat{\alpha} + 2r]} = \frac{h + r\cos\frac{\alpha}{2}}{\hat{\alpha} + 2}.$$

Auch hier bestätigt sich für $h = 2r$ und $\hat{\alpha} = \pi$ die Halbkreisformel.

d) Für die Umrandung der konzentrischen Halbkreisfläche wird

$$\varrho_2 = \frac{M}{2\pi s} = \frac{4\pi(r^2 - r_1^2) + 0}{2\pi[\pi(r + r_1) + 2(r - r_1)]} = \frac{2(r^2 - r_1^2)}{\pi(r + r_1) + 2(r - r_1)}.$$

§ 62) Eine Halbkreisfläche von beliebiger Lage drehe sich um eine senkrechte Achse (derselben Ebene). Die Guldinschen Berechnungen sollen durchgeführt werden.

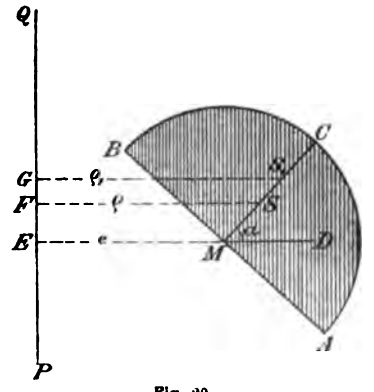


Fig. 29.

Auflösung. Man setze $ME = e$, $SF = \varrho$, $S_1 G = \varrho_1$, $\sphericalangle CMD = \alpha$, $MA = r$. Dann ergiebt sich im Anschlufs an das Obige, wenn e, α und r als gegeben betrachtet werden

$$\varrho = e + \frac{4r}{3\pi}\cos\alpha = \frac{3\pi e + 4r\cos\alpha}{3\pi},$$

$$\varrho_1 = e + \frac{2r}{\pi}\cos\alpha = \frac{\pi e + 2r\cos\alpha}{\pi}.$$

Daraus folgt nach Guldin als Inhalt

$$J = 2\pi\varrho F = 2\pi\cdot\frac{3\pi e + 4r\cos\alpha}{3\pi}\cdot\frac{\pi r^2}{2}$$

$$= \frac{\pi r^2}{3}(3\pi e + 4r\cos\alpha),$$

als die aus dem Kreisbogen entstehende Fläche

$$M = 2\pi\varrho_1 s = 2\pi\frac{\pi e + 2r\cos\alpha}{\pi}\cdot\pi r = 2\pi r(\pi e + 2r\cos\alpha),$$

als gesamte Oberfläche

$$O = M + 2\pi e \,.\, 2r = 2\pi r(\pi e + 2r\cos\alpha + 2e),$$

als Schwerpunktsabstand für die gesamte Umrandung

$$\varrho_2 = \frac{O}{2\pi(\pi r + 2r)} = \frac{2\pi r(\pi e + 2r\cos\alpha + 2e)}{2\pi r(\pi + 2)}$$

$$= \frac{e(\pi + 2) + 2r\cos\alpha}{\pi + 2}$$

oder

$$\varrho_2 = e + \frac{2r\cos\alpha}{\pi + 2}.$$

Bemerkungen. Die besonderen Fälle $\alpha = 0$, $\alpha = \pm 90^0$, $\alpha = 180^0$ lösen mehrere der früher gestellten Aufgaben und aufserdem eine neue, bei der der Kreisbogen der Achse zugekehrt ist. Gerade die letztere ist eine für die Bau- und Maschinentechnik wichtige, da sie auf die sogenannten Hohlkehlen führt.

Man versuche diese allgemeinere Aufgabe auch für beliebige Ab- und Ausschnitte der Kreisfläche zu lösen, besonders auch für den Viertelkreis, der für gewisse Hohlkehlen von Wichtigkeit ist.

§ 63) Bemerkungen über Kreissegmente, besonders über solche von derselben Sehne h.

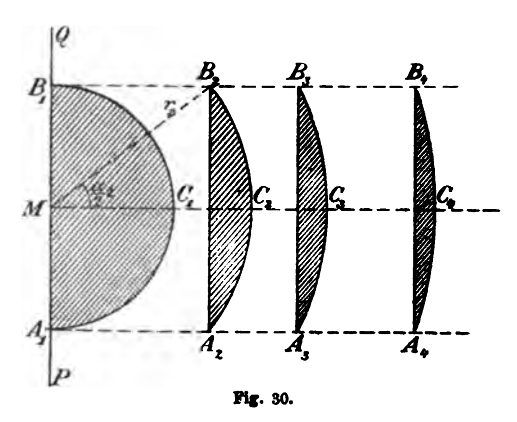


Fig. 30.

a) Alle in Figur 30 dargestellten Kreissegmente geben, um PQ rotierend, Drehungskörper von demselben Inhalte

$$J = \frac{\pi h^3}{6},$$

der mit dem einer Kugel vom Durchmesser h übereinstimmt. Aus

$$2\pi\varrho_1 F_1 = 2\pi\varrho_2 F_2 = 2\pi\varrho_3 F_3 = \ldots$$

folgt

$$\varrho_1 F_1 = \varrho_2 F_2 = \varrho_3 F_3 = \ldots,$$

d. h. die statischen Momente der Segmentflächen in Bezug auf PQ stimmen miteinander überein.

Oder: Je zwei dieser Flächen sind umgekehrt proportional den Schwerpunktsabständen von der Achse PQ.

b) Die so entstehenden äufseren Mantelflächen sind

$$M_1 = 2\pi r_1 h,\ M_2 = 2\pi r_2 h,\ M_3 = 2\pi r_3 h,\ \ldots,$$

folglich: Diese Zonenflächen sind proportional den Radien der Segmentkreise.

Bezeichnet man die Kugelfläche des ersten Segmentes mit O, so ist z. B. $M_n = O\frac{r_2}{r_1} = O\frac{2r_2}{h}$.

c) Aus

$$M_1 = 2\pi\varrho_1' s_1 = 2\pi r_1 h,\ M_2 = 2\pi\varrho_2' s_2 = 2\pi r_2 h$$

folgt

$$\varrho_1' s_1 = r_1 h,\ \varrho_2' s_2 = r_2 h, \ldots$$

Also: Die statischen Momente der Sementbogen in Bezug auf PQ verhalten sich wie die Radien der Segmente.

d) Statt der letzten Gruppe von Gleichungen kann man schreiben

$$\varrho_1' r_1 \hat{\alpha}_1 = r_1 h,\ \varrho_2' r_2 \hat{\alpha}_2 = r_2 h, \ldots$$

oder

$$\varrho_1' \hat{\alpha}_1 = \varrho_2' \hat{\alpha}_2 = \varrho_3' \hat{\alpha}_3 = \ldots = h.$$

Also: Die Produkte aus den Abständen der Schwerpunkte (von PQ) und den zugehörigen Centriwinkeln der Segmente sind konstanten Wertes.

Oder: Schlägt man um M mit den Schwerpunktsabständen der Bogen Kreisbogen, die den Centriwinkeln der Segmente entsprechen, so sind alle diese Bogen von derselben Länge h.

e) Dreht man eins von diesen Segmenten (vor der Achsendrehung um PQ) in seiner Ebene beliebig um den Schwerpunkt seiner Fläche, ohne dafs es dabei von PQ geschnitten wird, so bleibt sein Inhalt gleich dem einer Kugel vom Durchmesser h.

f) Dreht sich ein Kreissegment vom Radius r und der Sehne h um diese Sehne, so entsteht ein **spindelförmiger Körper**. Im Hinblick auf die Verschiebung der Achse um die Strecke $r\cos\frac{\alpha}{2}$ wird der körperliche Inhalt der Spindel

$$J_1 = J - 2\pi r\cos\frac{\alpha}{2}F = 2\pi F\left(\varrho - r\cos\frac{\alpha}{2}\right),$$

wobei α sich aus $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{2r}$ bestimmt, $F = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$, $\varrho = \frac{h^3}{12F}$, $J = \frac{\pi h^3}{6}$ ist. $J_1 = \frac{\pi}{6}\left[h^3 - 6r^3\cos\frac{\alpha}{2}(\hat{\alpha} - \sin\alpha)\right]$.

Der Mantel wird

$$M_1 = M - 2\pi r\cos\frac{\alpha}{2}s = 2\pi s\left(\varrho_1 - r\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\pi r\hat{\alpha}\left(\varrho_1 - r\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

oder auch

$$M_1 = 2\pi r h - 2\pi r\cos\frac{\alpha}{2}s = 2\pi r\left(h - s\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Dabei ist $\varrho_1 = \frac{rh}{s} = \frac{h}{\hat{\alpha}}$.

Man versuche J_1 und M_1 entweder durch h und r, oder durch h und α, oder durch r und α allein auszudrücken.

§ 64) **Weiteres über die Kreissegmente.**

a) Die **Pfeilhöhe** p des Segmentes ist $p = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)$. Nach bekanntem Sehnensatze ist auch $p(2r - p) = \frac{h^2}{4}$, woraus $p = r \pm \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ folgt. Dabei gilt für die Figur 30 das negative Zeichen. Das positive gilt für den Fall, daſs das zweite Segment desselben Kreises gewählt wird.

Der Schwerpunktsabstand von der Sehne ist für die Segmentfläche $e = \varrho - r\cos\frac{\alpha}{2}$, für den Bogen des Segments $e_1 = \varrho_1 - r\cos\frac{\alpha}{2}$. Die entsprechenden Abstände vom Scheitel sind $g = r - \varrho$ und $g_1 = r - \varrho_1$.

b) Dreht sich also das Segment um die Scheiteltangente, so wird der Inhalt des entstehenden Körpers

$$J_2 = 2\pi g F = 2\pi(r - \varrho)F.$$

Die dem Bogen entsprechende Mantelfläche wird

$$M_2 = 2\pi g_1 s = 2\pi(r - \varrho_1)s.$$

Zieht man den Inhalt J_2 von dem des zugehörigen Cylinders mit p als Radius ab, so hat man einen neuen Drehungskörper von demselben M_2 und vom Inhalte

$$\begin{aligned} J_3 &= \pi p^2 h - J_2 \\ &= \pi p^2 h - 2\pi g F \\ &= \pi h r^2 \left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 \\ &\quad - 2\pi(r - \varrho)F. \end{aligned}$$

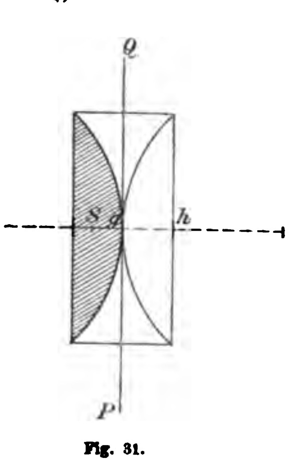


Fig. 31.

c) Ist die Pfeilhöhe p eines Segmentes $p = \frac{r}{n}$, und dreht es sich um die Mittelpunktsachse PQ, so wird

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r - \frac{r}{n}}{r} = \frac{n-1}{n},\ \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{n}\sqrt{2n-1},\ \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2(n-1)}{n^2}\sqrt{2n-1},$$

$$h = 2r\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2r}{n}\sqrt{2n-1}.$$

Der Abstand $MS = \varrho$ wird

$$\varrho = \frac{h^3}{6r^2(\alpha - \sin\alpha)} = \frac{\frac{8r^3}{n^3}\left(2n-1\right)^{\frac{3}{2}}}{6r^2(\hat{\alpha} - \sin\alpha)} = \frac{4r}{3n^3}\,\frac{(2n-1)^{\frac{3}{2}}}{\hat{\alpha} - \sin\alpha},$$

$$\text{wo } \hat{\alpha} = \pi\,\frac{\alpha^0}{180^0} \text{ ist.}$$

[Da $\hat{\alpha} = 2\,\frac{\hat{\alpha}}{2} = 2\,arc\cos\frac{n-1}{n}$ ist, kann man auch schreiben

$$\varrho = \frac{4r}{3n^3}\,\frac{(2n-1)^{\frac{3}{2}}}{2\,arc\cos\frac{n-1}{n} - \frac{2(n-1)}{n^2}\sqrt{2n-1}}$$

$$= \frac{2r}{3n}\,\frac{(2n-1)^{\frac{3}{2}}}{n^2\,arc\cos\frac{n-1}{n} - (n-1)\sqrt{2n-1}}.$$

Diese Berechnung ist praktisch für den Fall, daſs man zu Ellipsensegmenten übergehen will. Diese lassen sich mit Hilfe von

$$F = \frac{r^2}{2}\left[\hat{\alpha} - \sin\alpha\right] = \frac{r^2}{2}\left[2\,arc\cos\frac{n-1}{n} - \frac{2(n-1)}{n^2}\sqrt{2n-1}\right]$$

$$= r^2\left[arc\cos\frac{n-1}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{2n-1}\right]$$

leicht berechnen].

Weniger wichtig ist die Berechnung von ϱ_1 aus r und n. Man erhält

$$\varrho_1 = \frac{h}{\hat{\alpha}} = \frac{\frac{2r}{n}\sqrt{2n-1}}{2\,arc\cos\frac{n-1}{n}} = \frac{r}{n}\,\frac{\sqrt{2n-1}}{arc\cos\frac{n-1}{n}}.$$

Auch damit läſst sich Figur 31 behandeln. (Abschnitt b.)

d) Sind in einem Kreise zwei senkrechte Sehnen gegeben (Figur 32), so handelt es sich bei der Berechnung der von beiden begrenzten Fläche F um die Differenz $F_1 - F_2$ zweier Segmente. Will man zur Berechnung des Schwerpunktes S die Guldinsche Regel benutzen, so bilde man den Unterschied $J = J_1 - J_2$ der beiden durch Drehung um CD entstehenden Körper, und dann

$$MS = \varrho = \frac{J}{2\pi F} = \frac{(J_1 - J_2)}{2\pi(F_1 - F_2)}.$$

Will man den Schwerpunkt der oberen Hälfte $G_1 G_2 F_2 F_1$ haben, so bilde man durch Drehung um MB die Kugelschicht von der Höhe $h = G_1 G_2$ und vom Inhalte

$$J_3 = \frac{\pi h}{6}(3a_1^2 + 3a_2^2 + h^2).$$

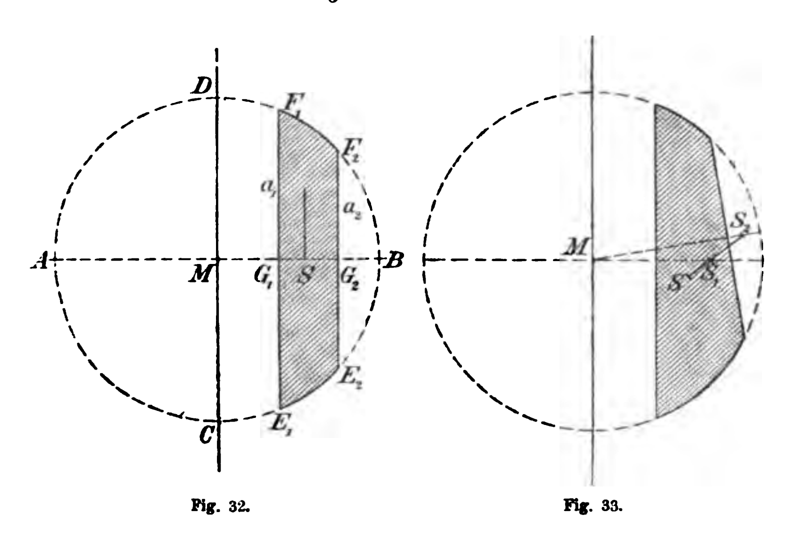


Fig. 32. Fig. 33.

Dann hat man $SS_1 = \varrho_3 = \dfrac{J_3}{2\pi\dfrac{F}{2}} = \dfrac{J_3}{\pi F}.$

e) Sind die Sehnen nicht parallel (Figur 33), so findet man den Schwerpunkt S auf $S_2 S_1$. Diese Linie ist so über

S_1 hinaus zu verlängern, dafs $\overline{SS_1} \cdot F = \overline{S_1 S_2} \cdot F_2$, oder $\overline{SS_1}(F_1 - F_2) = S_1 S_2 \cdot F_2$ ist. Es wird also

$$\overline{SS_1} = \frac{\overline{S_1 S_2} \cdot F_2}{F_1 - F_2}.$$

Nun können entsprechende Guldinsche Rotationskörper berechnet werden.

f) Auch der Schwerpunkt einer von zwei einander schneidenden Kreisen bestimmten Fläche läfst sich mit Hilfe der Einzelsegmente berechnen. Figur 34.

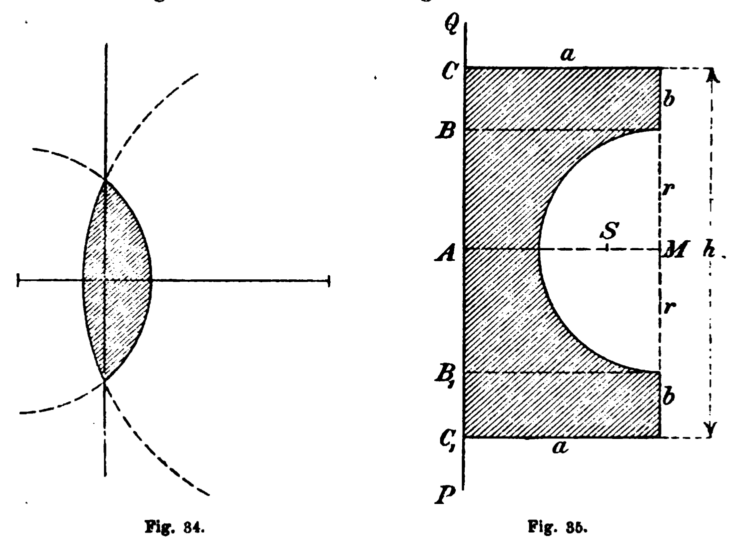


Fig. 34. Fig. 35.

§ 64) Praktische Anwendungen.

a) Figur 35 stellt ein Rechteck dar, aus dem ein Halbkreis ausgeschnitten ist. Dreht sich die schraffierte Fläche um PQ, so entsteht ein Cylinder, aus dem eine Hohlkehle mit Halbkreisprofil ausgeschnitten ist. Dabei ist für die Hohlkehle $AS = a - \frac{4r}{3\pi}$, $AS_1 = a - \frac{2r}{\pi}$. Es ist also leicht, Cylinder, Hohlkehle und den Unterschied beider Körper zu berechnen. Auch die aus dem Halbkreis hervorgehende Fläche ist leicht zu berechnen. Will man den Schwer-

punkt der schraffierten Fläche haben, so kann man nach der Formel $\varrho' = \frac{J}{2\pi F}$, oder nach der Methode der statischen Momente verfahren. Solche Profile kommen vor an den Walzen gewisser Walzwerke, in denen es sich z. B. um das Walzen von Rundstäben, Draht u. s. w. handelt, wobei dieselbe Walze mehrere Hohlkehlen solcher Art hat; ferner bei gewissen Schraubengewinden, in der Architektur bei Säulen und dergl., auch bei Gefäſsen.

b) Wird der Halbkreis an das Rechteck angesetzt, so erhält man durch Drehung um PQ einen Cylinder mit Wulst. Dabei wird $AS = a + \frac{4r}{3\pi}$, $AS_1 = a + \frac{2r}{\pi}$. Der Gesamtkörper, auch die Wölbung des Wulstes ist leicht zu berechnen, eben so leicht der Schwerpunkt der Gesamtfläche. Figur 36.

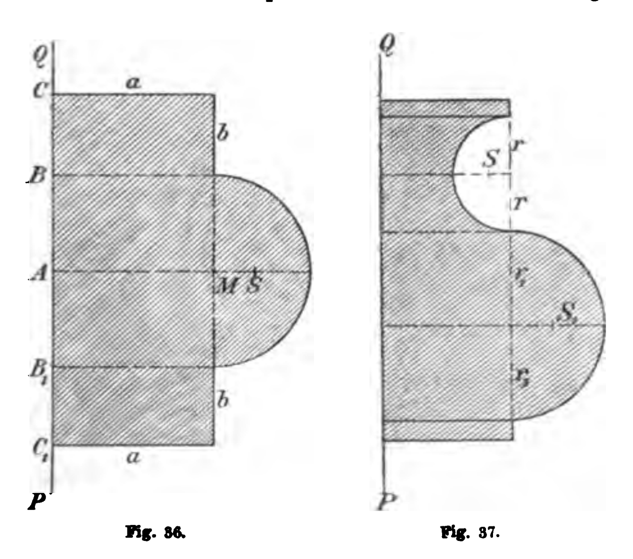


Fig. 36. Fig. 37.

An Säulen kommen solche Wulste häufig vor, auch an Gefäſsen. Das Profil erscheint auch an gewissen Schraubengewinden.

c) An dem in Figur 37 dargestellten Gefäſsprofil kommt zugleich Hohlkehle und Wulst vor. (Der innere Hohlraum

beansprucht ein besonderes Profil.) Inhalt und Wölbungsflächen sind leicht zu berechnen.

d) Für die an Figur 38 dargestellte Hohlkehle mit Viertelkreis-Profil, ist AS und AS_1, wie bei a) zu berechnen, also

$$AS = a - \frac{4r}{3\pi}, \quad AS_1 = a - \frac{2r}{\pi}.$$

Diese Art von Hohlkehlen kommt häufig bei gufseisernen Säulen vor, wobei eine Art von Kapitell entsteht.

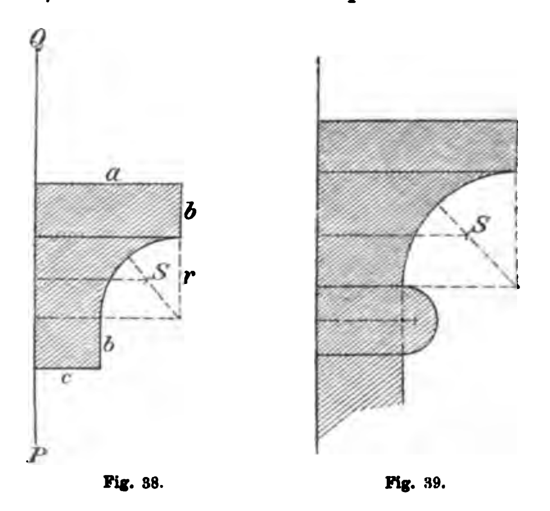


Fig. 38. Fig. 39.

e) An nebenstehender Säule befinden sich Wulst und Hohlkehle mit Viertelkreisprofil zugleich. Massive und hohle Säulen solcher Art sind demnach leicht zu berechnen. Figur 39.

f) In Figur 40 ist der Querschnitt einer Schale dargestellt, an der sich innen und aufsen Viertelkreise befinden, von denen die einen Hohlkehlen, die anderen Wulste geben. Der Gesamtinhalt ist leicht zu berechnen, ebenso der innere Inhalt. Der Unterschied beider giebt den Rauminhalt für das verwandte Material.

g) Figur 41 stellt das Profil eines gufseisernen Schwungrings dar, der Mittelpunkt in der Pfeilrichtung liegt. Inhalt und Gewicht p (z. B. $p' = 7,5$) sind leicht zu berechnen.

Fig. 40.

Fig. 41.

Fig. 43.

Fig. 42.

Fig. 44.

h) Bei dem in Figur 42 dargestellten Querschnitte sollen die beiden Bogen Kreisbogen sein, so daſs bei der Umdrehung Hohlkehle und Wulst entstehen, die aus Kreissegmenten hervorgehen. Solche Formen kommen nicht nur als Auſsenform von Gefäſsen und Vasen, sondern, bei geringeren Horizontaldimensionen, auch alsZiersäulen vor.

i) Figur 43 stellt einen Tunnelquerschnitt vor, Figur 44 einen Kanalisationsquerschnitt. Angenommen, diese Schnitte bewegen sich so, daſs sie sich stets um eine feste senkrechte Achse drehen,*) so läſst sich, da die Symmetrieachse ebenfalls senkrecht bleibt und den Schwerpunkt des Schnittes enthält, sowohl der Hohlraum, als auch der körperliche Inhalt des nötigen Mauerwerks nach der Guldinschen Regel berechnen.

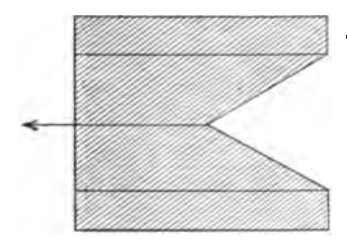


Fig. 45.

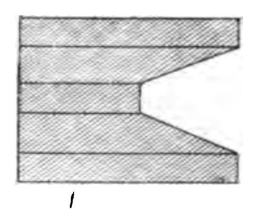


Fig. 46.

k) Dreieckige und trapezische Profile kommen vor als Einschnitte bei Walzen und bei den später zu behandelnden Schraubengewinden. Bisweilen, besonders bei Schnurläufen und den Seilscheiben von Drahtseilbetrieben, ist der ursprünglich trapezisch gedachte Einschnitt im Innern oder innen und auſsen mit Kreisbogen kombiniert, wie es die Figur 47 andeutet. Die Schnurläufe entstehen durch Drehung um Achsen, die, wie bei den Schwungrädern, in gröſserer Entfernung vom Querschnitt liegen und zu PQ parallel sind. Die Berechnung der Querschnittsschwer-

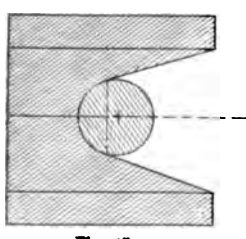


Fig. 47.

*) Gefälle würde die Sache ändern.

punkte geschieht mit Hilfsmitteln der Planimetrie in der üblichen Weise, oder im Anschlufs an die obigen Betrachtungen.

l) Hierher gehört auch die Berechnung konischer Schornsteine aus Mauerwerk, deren Hauptschnitt man kennt, ferner die Berechnung von Ketten als Rundeisen, wenn die Mittellinie jedes Gliedes als aus zwei Halbkreisbogen und zwei parallelen Geraden bestehend gedacht wird.

§ 65. Unter den einfacheren Aufgaben der Mechanik, die hierher gehören, seien folgende genannt:

1) Gewichtsberechnungen mit Hilfe der Formel $p = Jp'$, wo p' das spezifische Gewicht bedeutet. Umkehrungsaufgaben: $J = \frac{p}{p'}$, $p' = \frac{p}{J}$.

2) Eintauchaufgaben, besonders für den Fall der aufrecht stehenden Drehungsachse. Dabei ist für Wasser mafsgebend die Formel $W = p'K$, wobei W den Raum des verdrängten Wassers, K den Körperraum bedeutet. Umkehrungsformeln: $p' = \frac{W}{K}$, $K = \frac{w}{p'}$. Hierbei mufs $p' < 1$ sein. Handelt es sich nicht um Wasser, sondern um andere Flüssigkeiten, so wird die Formel $Vp' = Kp''$ mafsgebend, wo V den Verdrängungsraum der Flüssigkeit bedeutet. Sinkt der Körper ganz unter, so kommen die in den physikalischen Lehrbüchern für diesen Fall für das Archimedische Prinzip angegebenen Formeln zur Geltung. Wie dick mufs z. B. die Wand eines entsprechenden Metallgefäfses genommen werden, damit es gerade noch schwimme, und wie grofs ist bei gegeringerer Dicke seine Tragfähigkeit. (Belastung von Schiffen.)

3) Bestimmung der Anzahl der technischen (oder der absoluten) Masseneinheiten für Rotationskörper. Dabei ist $p = mg$, wobei p das Gewicht, m die Masse, g die Freifallbeschleunigung ist.

4) Berechnung der Centrifugalkraft bei Umdrehung um Achsen, die der Drehungsachse PQ (für die erzeugende Fläche) parallel sind. Die mafsgebende Formel ist dabei $k = mr\vartheta^2$, wo m die Masse, r die Entfernung der geometrischen von der mechanischen Drehungsachse, ϑ die

Winkelgeschwindigkeit (gemessen am Einheitskreise) bedeutet. Die Kenntnis des Körperschwerpunkts ist hierbei nicht nötig. — (Fällt die mechanische Drehungsachse mit der geometrischen zusammen, so ist die Resultante der Centrifugalkräfte gleich Null.)

5) Die Berechnung statischer Momente der behandelten Körper und Flächen in Bezug auf Achsen, welche die geometrische Drehungsachse senkrecht kreuzen, oder in Bezug auf Normalebenen, bei letzteren für den Fall, dafs der Körperschwerpunkt z. B. aus Symmetriegründen bekannt ist. (Daraus ergeben sich dann die Stabilitätsmomente.)

Dagegen können Dinge, die mit Trägheitsmomenten zusammenhängen, vorläufig im allgemeinen noch nicht behandelt werden.

Die Berechnungen des körperlichen Inhalts und die Schwerpunktsberechnungen sind für die Praxis im allgemeinen das wichtigste. Oberflächenberechnungen könnten etwa für das Kunstgewerbe von Wichtigkeit sein, z. B. dann, wenn Vergoldung, Versilberung u. dergl. nach der betreffenden Fläche bezahlt wird.

ϰ) Einschaltung über gewisse Affinitäts- und Kollineationsbeziehungen und über Krümmungskreise.

§ 66) Cavalierische Verkürzung und Verlängerung bei ebenen Flächen. Dieser Gegenstand kam schon in Bd. I zur Sprache. Einiges Planimetrische mufs jedoch eingeschaltet werden, um die Erweiterung der Anwendungen zu ermöglichen.

Fällt man von allen Punkten einer z. B. in sich zurücklaufenden Kurve auf eine Achse KL Lote,*) und verlängert oder verkürzt man diese mit Hilfe eines konstanten Faktors n, so wird die Fläche nach den früheren Darlegungen in die n-fache Fläche verwandelt. Wird sie von KL geschnitten, so bleiben die Punkte von KL bei dieser Transformation in ihrer Lage. Die Operation soll als die Cavalierische Erweiterung bezeichnet werden, wobei der Fall der Verkürzung mit eingeschlossen ist, n ist der Faktor der Er-

*) Man denke sich die untere Figur so auf die obere gelegt, dafs die Tangenten KL einander decken.

weiterung, KL die Achse der Operation. [Es handelt sich um einen Sonderfall der Parallelprojektion und der Affinität, so dafs KL die Affinitätsachse ist.] Da der Inhalt jedes Streifens zwischen benachbarten Loten auf den n-fachen Inhalt gebracht wird, so wird der neue Flächeninhalt

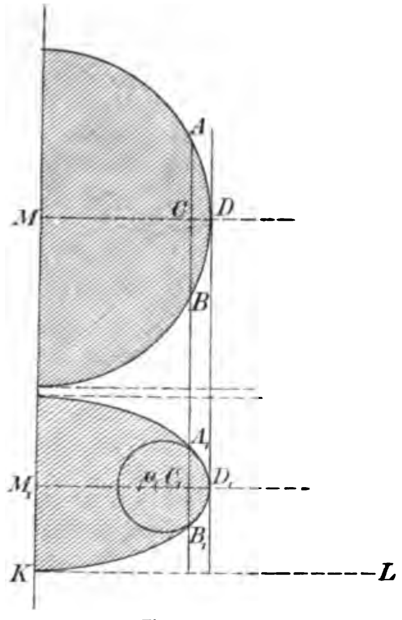


Fig. 48.

1) $F_1 = nF.$

(So geht z. B. der Kreisinhalt πaa über in $\pi a \,.\, na$, oder, wenn $na = b$ gesetzt wird in πab, womit die Ellipsenfläche berechnet ist. Die Bogenberechnung aber wird dabei nicht erleichtert, denn die einzelnen Bogenelemente werden so verschiedenartig verkürzt oder verlängert, dafs eine homogene Punktverteilung auf der gegebenen Kurve in eine nicht homogene übergeht.)

Der Punkt mittleren Abstandes geht, da jeder Abstand mit demselben Faktor n multipliziert wird, für jede Fläche F in den Punkt mittleren Abstandes für F_1 über, also:

Der Schwerpunkt S jeder Fläche F geht über in den Schwerpunkt S_1 der Fläche F_1.

Gerade hierin beruht die Möglichkeit der elementaren Anwendbarkeit der Guldinschen Inhaltsformel auf die neuen Flächen.

(Für die Bogen und ihre Schwerpunkte gilt dies nach obiger Bemerkung nicht. Die Guldinsche Flächenformel also wird nur in Sonderfällen zu elementarer Anwendbarkeit geführt, dann nämlich, wenn der Kurvenschwerpunkt aus Symmetriegründen mit dem Flächenschwerpunkt zusammenfällt.)

Nach den Betrachtungen des Bandes 1 geht bei dieser Transformation jede Parallelschar von Sehnen in eine neue Parallelschar über, jede Tangente in eine Tangente, jeder Kreis in eine Ellipse, jede Parabel in eine Parabel, jede gleichseitige Hyperbel in eine allgemeine Hyperbel, allgemein jeder Kegelschnitt in einen Kegelschnitt derselben Art.

§ 67) Wichtiges läfst sich dabei über gewisse Krümmungskreise aussagen. In Figur 48 ist ein Kreis in eine Ellipse verwandelt worden. Es fragt sich, wie grofs der Krümmungskreis der letzteren für den Punkt D ist.

Ist ϱ der Radius des gegebenen Kreises und AB ein dem Punkte D benachbartes der Lote, setzt man ferner auf dem Halbmesser MD die Strecke $CD = h$ und $AC = CB = l$, so hat man nach bekanntem Satze

$$h(2\varrho - h) = l^2.$$

Auch durch die entsprechenden Punkte A_1, B_1, D_1 der Ellipse lege man einen Kreis, dessen Radius gleich ϱ_1 sei, dann hat man für diesen, da $A_1C_1 = B_1C_1 = nl$ ist,

$$h(2\varrho_1 - h) = n^2l^2.$$

Ist nun h unendlich klein, so geht der Kreis mit ϱ_1 in den Krümmungskreis über, und da man dann in den beiden Gleichungen h^2 als unendlich klein zweiter Ordnung gegen $2\varrho h$ bezw. gegen $2\varrho_1 h$ vernachlässigen kann, erhält man für beide

$$2\varrho h = l^2,\ 2\varrho_1 h = n^2l^2,$$

und aus diesen durch Division

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = n^2,$$

oder

2) $$\varrho_1 = n^2\varrho.$$

Für die Ellipse pflegt man $\varrho = a$ zu setzen und $na = b$ (oder auch $\varrho = b$ und $nb = a$). Dann geht die letzte Gleichung über in

$$\varrho_1 = \frac{b^2}{a^2}a$$

oder

3) $$\varrho_1 = \frac{b^2}{a}$$

$\left(\text{im Falle der Klammer in } \varrho_1 = \frac{a^2}{b}\right)$. Dies sind die bekannten Krümmungsradien der Ellipse für die beiden Scheitelpunkte. Der Ausdruck 3) ist leicht zu konstruieren $(a : b = b : \varrho_1)$.

Wichtiger aber ist es, den ersten Kreis der Figur 48 als Krümmungskreis einer beliebigen Kurve für den Punkt D zu betrachten. Dann folgt:

Wendet man auf eine Kurve die Cavalierische Erweiterung mit dem Faktor n in der Richtung der Tangente in einem beliebigen Punkte D an, und ist ϱ der Krümmungsradius der Kurve für diesen Punkt, so wird der Krümmungsradius für die neue Kurve im entsprechenden Punkte D

$$\varrho_1 = n^2 \varrho.$$

Für die gleichseitige Hyperbel mit der Halbachse $MD = a$ (Figur 49)*) gilt z. B. die Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$ oder

1) $$y^2 = x^2 - a^2.$$

Für den durch ihre Punkte A, B und D gelegten Kreis ist, wie oben $AC \,.\, CB = h(2\varrho - h)$, wenn $DC = h$ gesetzt wird. Nun ist aber

$$CB = y,$$

also hat man

2) $$y^2 = h(2\varrho - h).$$

Aus beiden Gleichungen folgt, da $MC = x = a + h$ ist,

$$h(2\varrho - h) = x^2 - a^2$$
$$= (a + h)^2 - a^2$$
$$= 2ah + h^2.$$

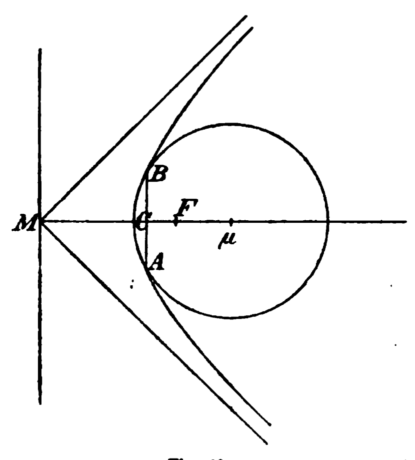


Fig. 49.

*) In Figur 49 ist D der links von C liegende Schnittpunkt.

Macht man h unendlich klein, und vernachlässigt man links und rechts h^2, so folgt $2\varrho h = 2ah$ und

3) $$\varrho = a.$$

Dies ist der Krümmungsradius für die gleichseitige Hyperbel im Schnittpunkte. Er ist ebensogrofs, wie beim Kreise $-y^2 = x^2 - a^2$.

§ 69) Die allgemeine Hyperbel entsteht aus dieser z. B. durch Cavalierische Erweiterung mit dem Faktor n in senkrechter Richtung, wobei die Halbachse $b = na$ wird, für diese ist also der Krümmungsradius im Scheitelpunkte $\varrho_1 = n^2 a = \frac{b^2}{a^2} a$ oder

4) $$\varrho_1 = \frac{b^2}{a},$$

was mit der Formel für die Ellipse übereinstimmt.

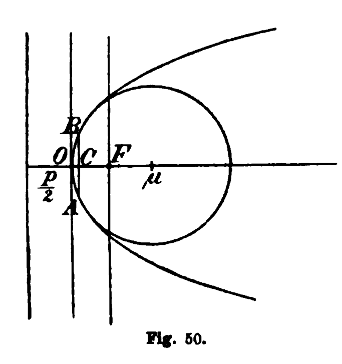


Fig. 50.

§ 70) Für die Parabel $y^2 = 2px$ giebt dieselbe Methode durch Vergleich mit $y^2 = h(2\varrho - h)$ für die Grenze $2ph = 2\varrho h$, so dafs $\varrho = p$ wird. Nun ist dort $OF = \frac{p}{2}$, also wird $O\mu$ das Doppelte von OF.

Parabeln aber bleiben Parabeln, sobald man die Erweiterung in senkrechter Richtung gegen die Achse vornimmt. Bei Erweiterung mit Faktor n geht $y = \sqrt{2px}$ über in $y = n\sqrt{2px}$ also wird die neue Gleichung $y^2 = 2(pn^2)x$, der neue Krümmungsradius wird $\varrho_1 = n^2 p$. Also wird sowohl der Parameter p_1 als auch der untersuchte Krümmungsradius das n^2fache des vorigen.

§ 71) Die Cavalierische Verschiebung. In Figur 51 ist ein Kreis dadurch in eine Ellipse transformiert worden, dafs jedes Lot zur Geraden KL um einen Winkel α gedreht worden ist, jeder Punkt des Lotes aber parallel zu KL in die neue Lage auf der gedrehten Geraden gelangt ist.

Ist also der Abstand des Punktes von $KL = e$, so bleibt der Abstand unverändert, der Verschiebungsweg aber hat die Länge $w = e \tan \alpha$. Alle Punkte desselben Abstandes haben also denselben Verschiebungsweg, jede Parallele zu KL wird also in unveränderter Länge in die neue Lage verschoben. So ist z. B. D nach D_1 und die Gerade ACB in die Lage $A_1C_1B_1$ verschoben worden. Der Kreis geht dabei nach den in Bd. I gegebenen Bemerkungen in eine Ellipse über, diese aber hat, weil beide Flächen für gleiche Höhen gleiche Querschnittslinien haben, denselben Inhalt, wie der Kreis.

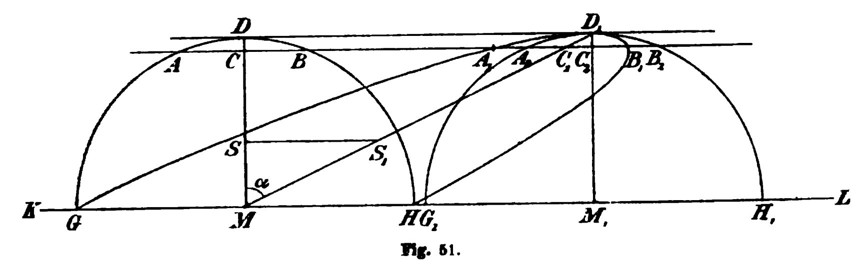


Fig. 51.

Diese Methode läſst sich auf jede Kurve bezw. Fläche anwenden. Sie soll als Cavalierische Verschiebung bezeichnet werden. Die Punkte von KL bleiben unverändert, daher soll KL die Achse der Verschiebung heiſsen, α heiſst der Winkel der Verschiebung. (Wieder handelt es sich um einen Sonderfall der Parallelprojektion und der Affinität.) Die Punkte unterhalb KL wandern dabei in entgegengesetzter Richtung, wie die oberhalb liegenden. (Figur 52).

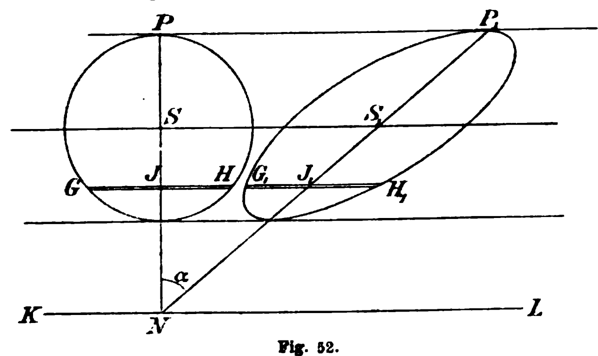


Fig. 52.

Bei dieser Transformation bleiben die Flächeninhalte unverändert.

Weil kein Punkt seinen Abstand von KL ändert, behält auch der Punkt mittleren Abstandes seinen Abstand e, unverändert bei, d. h. der Schwerpunkt verschiebt sich parallel zu KL nach dem neuen Schwerpunkte. Dieser liegt auf NP. Jedes Flächenteilchen f, welches in Bezug auf NP das Moment ef hatte, hat in der neuen Lage in Bezug auf NP_1 das Moment $e \cos \alpha \,.\, f$. Aus $\Sigma ef = 0$ in Bezug auf e wird also $\Sigma e \cos \alpha f = \cos \alpha \, \Sigma ef = 0$ in Bezug auf NP_1. Diese Linie ist also Schwerpunktsachse. Folglich:

Bei der Cavalierischen Verschiebung bleiben die Schwerpunkte der Flächen erhalten.

Für die Bogenlängen und ihre Schwerpunkte lassen sich jedoch keine Schlüsse ziehen, da die homogene Punktverteilung wiederum nicht erhalten bleibt. Wichtig aber ist folgendes:

Der Krümmungsradius im Berührungspunkte einer Tangente, die parallel zur Verschiebungsachse ist, ändert sich bei der Verschiebung nicht.

Zieht man nämlich in Figur 51 in kleinem Abstand h von der Tangente im ursprünglichen Krümmungskreise eine Sehne AB parallel zur Tangente, und halbiert man diese in C, so hat man, wie oben, $AC = CB = l$ und $h(2\varrho - h) = l^2$. Ist nun h unendlich klein, so darf man erstens AB als Sehne der Kurve ansehen, zweitens h^2 vernachlässigen, so dafs $2\varrho h = l^2$ wird. Durch die Verschiebung wird $A_1B_1 = AB = 2l$ Sehne der neuen Kurve und zugleich ihres Krümmungskreises, für diesen gilt also ebenso die Gleichung $2\varrho_1 h = l^2$, demnach ist $\varrho_1 = \varrho$.

Soll man also für einen beliebigen Punkt D_1 einer Ellipse (Figur 53) den Krümmungsradius konstruieren, so kann man sie

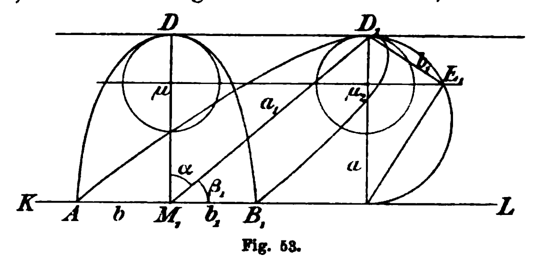


Fig. 53.

sich mit Hilfe des zu $D_1M_1 = a$ gehörigen konjugierten Radius b_1 und der Tangente in D_1, indem man M_1D senkrecht zu dieser stellt, in eine gegen M_1D symmetrische Ellipse verwandelt denken, deren Achsen $a = a_1 \sin\beta$ und $b = b_1$ sind. Für diese ist $\varrho = \frac{b^2}{a}$, ebenso grofs ist ϱ_1 für die andere Ellipse d. h. man hat $\varrho_1 = \frac{b_1^2}{a_1 \sin\beta_1}$, wo β_1 der von den konjugierten Achsen eingeschlossene Winkel ist.

Die Konstruktion geschieht nun einfacher. Man ziehe D_1M_1 und den konjugierten Radius $M_1B_1 = b_1$, fälle auf diesen das Lot D_1N_1 und zeichne einen Halbkreis mit diesem Lote als Durchmesser. In diesen lege man b_1 von D_1 aus als Sehne D_1E_1 ein und fälle von E_1 aus auf D_1N_1 das Lot $E_1\mu_1$, dann ist (nach Pythagoras) μ_1 der gesuchte Krümmungsmittelpunkt, denn $D_1E_1^2 = C_1\mu_1 \,.\, D_1N_1$, d. h. $b_1^2 = \varrho_1 \,.\, a_1 \sin\beta$.

Das Entsprechende für Parabel und Hyperbel ist leicht auszuführen. Allgemein hat man den Satz: Stehen über einer Sehne Kurvenbogen, die durch Cavalierische Verschiebung sich in einander überführen lassen, so sind die Krümmungsradien für die Berührungspunkte der allen Kurven gemeinschaftlichen Tangente von derselben Gröfse.

Dies gilt, abgesehen von den Kegelschnitten z. B. für Sinuskurven, Cykloiden, Epi-, Hypo-, Pericykloiden, Evolventen und andere elementar zu behandelnde Kurven

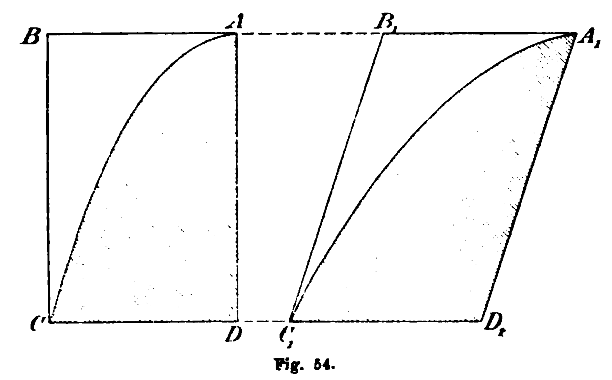


Fig. 54.

und die aus ihnen durch Cavalierische Verschiebung abzuleitenden.

Über die Flächen der Kegelschnitte sei folgendes gesagt:

a) Parabel. Nach Bd. II Seite 311 ist hier in Figur 54 die eingezeichnete Parabelfläche mit A als Scheitel und AD als Achse der dritte Teil des Rechtecks. Ebenso ist die Parabelfläche $A_1C_1D_1$ zwei Drittel vom Parallelogramme $A_1B_1C_1D_1$, denn die Flächen sind aus den vorigen durch die Cavalierische Verschiebung entstanden.

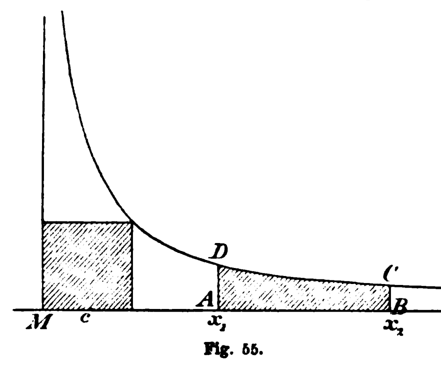


Fig. 55.

Nach Bd. III des methodischen Lehrbuchs der Elementarmathematik des Verfassers (Leipzig bei Teubner) läfst sich für die Hyperbel

$$x \cdot y = c^2$$

elementar zeigen, dafs die von x_1 bis x_2 gerechnete Fläche $ABCD$ (Figur 55) folgenden Inhalt hat:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = c^2 \, {}^e\!lg \frac{x_2}{x_1},$$

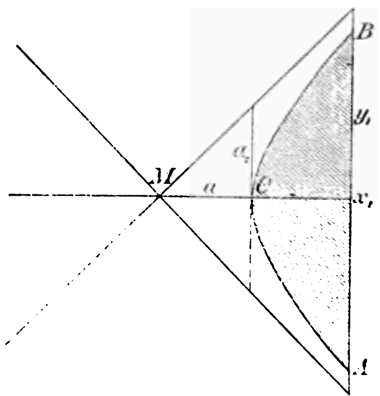


Fig. 56.

Auf Seite 47 desselben Buches wird daraus elementar abgeleitet, dafs das in Figur 56 dargestellte Segment der gleichseitigen Hyperbel

$$x^2 - y^2 = a^2$$

folgenden Inhalt hat:

$$\overset{x_1}{\underset{a}{F}} = x_1 \sqrt{x_1^2 - a^2} - a^2 \, {}^e\!lg \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}$$

(was sich auch kürzer als

$$x_1 y_1 - a^2\,{}^e lg \frac{x_1 + y_1}{a}$$

schreiben läfst).

Für die allgemeine Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ folgt daraus durch Cavalierische Erweiterung mit dem Faktor n in senkrechter Richtung, wobei $n a_1 = b$ wird, dafs die entsprechende Segmentfläche wird

$$\overset{x_1}{\underset{a}{F}} = \frac{b}{a}\left[x_1 \sqrt{x_1^2 - a^2} - a^2\,{}^e lg \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}\right].$$

Dafür kann man auch schreiben, da $\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2} = y_1$ ist

$$\overset{x_1}{\underset{a}{F}} = x_1 y_1 - ab\,{}^e lg\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right).$$

Unterwirft man dies der Cavalierischen Verschiebung, so bleibt der Inhalt unverändert.

Verbindet man A und B mit M, so entsteht eine Fläche $AMBC$, die von den beiden Geraden und der Hyperbel eingeschlossen ist. Sie heifst hyperbolischer Sektor und hat, wie sich ebenso leicht zeigen läfst, die Fläche

$$F = a^2 lg \frac{x_1 + y_1}{a} \text{ für die gleichseitige Hyperbel,}$$

$$F = ab\, lg\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right) \text{ für die allgemeine Hyperbel.}$$

Diese Flächenformeln sollen Beispiele für den Guldinschen Inhaltssatz ermöglichen.

§ 73) **Bemerkung über Kollineation.** Kennt man für eine Kurve den zu einem ihrer Punkte gehörigen Krümmungsradius, so kennt man auch den entsprechenden Krümmungsradius für jede aus ihr durch Kollineation (z. B. Centralprojektion) entstehende Kurve. Transformiert man nämlich den Kreis mit, so geht er über in einen Kegelschnitt, der mit der neuen Kurve drei Punkte gemein hat. Für den Kegelschnitt aber kann man nach obigem den Krümmungskreis konstruieren,

der zur gegebenen Stelle gehört. Dieser aber ist zugleich der der neuen Kurve, weil er mit dieser dieselben drei Punkte gemein hat.

Dasselbe gilt von Raumkurven bei räumlicher Kollineation. Die räumliche Affinität ist von dieser nur ein Sonderfall, bei dem der Kegelschnitt eine Ellipse wird.

λ) Beispiele zur Guldinschen Inhaltsformel für Drehungsgebilde, die aus Kegelschnitten und sonstigen ebenen Kurven hervorgehen.

§ 74) Eine symmetrische oder unsymmetrische Halbellipse drehe sich um eine in ihrer Achse liegende Ebene. Wie lautet die Guldinsche Inhaltsformel für den entstehenden Körper? (Figur 57).

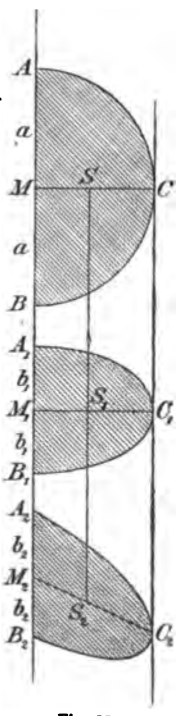


Fig. 57.

Auflösungen. a) Fall der Symmetrie. Sind a_1 und b_1 die Halbachsen, so ist $F_1 = \frac{\pi a_1 b_1}{2}$, $M_1 S_1 = \varrho_1$ ergiebt sich durch Vergleich mit dem Halbkreise vom Radius a als $\varrho_1 = \frac{4 a_1}{3\pi}$. Ist das so bestimmte S_1 von der Drehungsachse um e entfernt, so ist $J = 2\pi e F_1$.

b) Fall der Nichtsymmetrie. Ist $M_2 C_2 = a_2$ und $MB_2 = b_2$ die konjugierte Halbachse, so ist, wie der Vergleich mit dem vorigen Falle zeigt, $\varrho_2 = \frac{4 a_2 \sin \gamma_2}{3\pi}$ der Abstand des Punktes S_2 vom konjugierten Durchmesser, $\varrho_2 = \frac{4 a_2}{3\pi}$ der vom Punkte M_2. Dabei ist

$$F_2 = \frac{\pi a_1 b_1}{2} = \frac{1}{2} \pi a_2 b_2 \sin \gamma_2 .$$

Hier ist γ_2 der Winkel zwischen den konjugierten Halbmessern. Ist das so bestimmte S_2 um e von der beliebig liegenden

Drehungsachse entfernt, so sind die Werte einzusetzen in $J = 2\pi e F_2$.

§ 75) **Dieselbe Aufgabe für Ellipsensegmente, bei denen durch die Sehne der n^{te} Teil des konjugierten Halbmessers abgeschnitten ist.**

Auflösung. Für den Kreis der Figur 58 ist das Segment von der Fläche

$$F = \frac{a^2}{2}(\hat{\beta} - \sin\beta),$$

wo sich β aus $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{n-1}{n}$ und $\hat{\beta}$ aus $\hat{\beta} = \pi\frac{\beta^0}{180^0}$ bestimmt. Für die Ellipsen ist also ein Hilfswinkel β^0 und ein Hilfsbogen $\hat{\beta}$ nach diesen Formeln zu berechnen, und es werden beide Segmente

1)
$$F_1 = \frac{a_1 b_1}{2}(\hat{\beta} - \sin\beta),$$

$$F_2 = \frac{a_2 b_2 \sin\gamma_2}{2}(\hat{\beta} - \sin\beta).$$

Für das Kreissegment ist

$$MS = \varrho = \frac{4a}{3n^3}\,\frac{(2n-1)^{\frac{3}{2}}}{\hat{\beta} - \sin\beta},$$

für die Ellipsensegmente ist $M_1S_1 = N_2S_2$ ebenso grofs, also

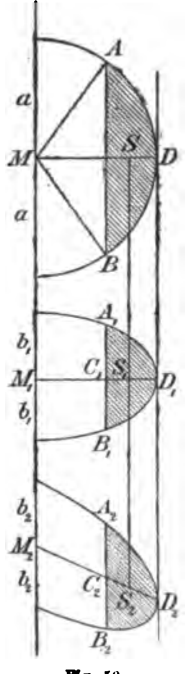


Fig. 58.

$$\varrho_1 = \frac{4a_1}{3n^3}\,\frac{(2n-1)^{\frac{3}{2}}}{\hat{\beta} - \sin\beta},\quad \varrho_2 = \frac{4a_2\sin\gamma_2}{3n^3}\,\frac{(2n-1)^{\frac{3}{2}}}{\hat{\beta} - \sin\beta}.$$

Die Inhaltsformel für den Fall, dafs der Abstand des Schwerpunktes S_1 bezw. S_2 von der sonst beliebig liegenden Drehungsachse gleich e ist, ist die obige.

Ohne dafs auf solche Beispiele besonderer Wert gelegt wird, sollen einige Übungsbeispiele ausgeführt werden.

§ 76) **Der Mittelpunkt einer Ellipse mit den Halbachsen a und b habe von der Drehungs-**

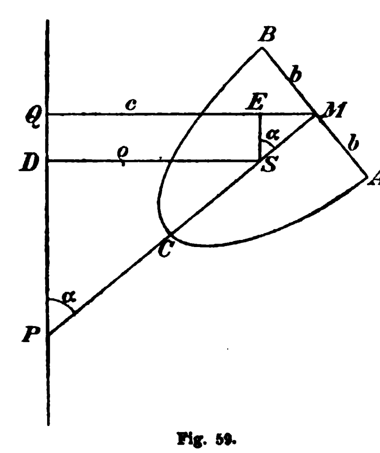


Fig. 59.

achse PQ die Entfernung c. Ihre Hauptachse MC bilde mit PQ einen Winkel α. Jede der beiden durch $AB = 2b$ bestimmten Halbellipsen giebt einen Guldinschen Körper, dessen Inhalt bestimmt werden soll.

Auflösung. $SM = \frac{4a}{3\pi}$, also $EM = \frac{4a}{3\pi}\sin\alpha$,

demnach

1) $$\varrho = c - \frac{4a}{3\pi}\sin\alpha,$$

2) $$F = \frac{1}{2}\pi ab,$$

folglich

$$J = 2\pi\varrho F = 2\pi\cdot\frac{\pi ab}{2}\left(c - \frac{4a}{3\pi}\sin\alpha\right)$$

oder

3) $$J = \frac{\pi^2 ab}{3\pi}(3\pi c - 4a\sin\alpha) = \frac{\pi ab}{3}(3\pi c - 4a\sin\alpha).$$

Die andere Halbellipse giebt

3*) $$J = \frac{\pi ab}{3}(3\pi c + 4a\sin\alpha).$$

Die Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ sind die wichtigeren.

§ 77) Von derselben Ellipse werde ein symmetrisches Segment dadurch abgeschnitten, dafs man von C aus von der Achse CM den n^{ten} Teil abschneidet und durch den Teilpunkt die Sehne A_1B_1 parallel zu AB zieht. MQ soll gleich c bleiben. Der Inhalt des zugehörigen Guldinschen Körpers soll berechnet werden.

Auflösung. Zunächst ist im Anschlufs an § 75 der Hilfswinkel β (für den Hilfskreis) mit Hilfe von

1) $$\cos\frac{\beta}{2}=\frac{n-1}{n}$$

und daraus der Bogen

2) $$\hat{\beta}=\pi\frac{\beta^0}{180^0}$$

zu bestimmen. Die Segmentfläche wird

3) $$F=\frac{ab}{2}[\hat{\beta}-\sin\beta].$$

Der Schwerpunktsabstand von AB wird

4) $$e=\frac{4a}{3n^3}\,\frac{(2n-1)^{\frac{3}{2}}}{\hat{\beta}-\sin\beta},$$

also der Schwerpunktsabstand von PQ

5) $$\varrho=c-e\sin\alpha=c-\frac{4a}{3n^3}\,\frac{(2n-1)^3}{\hat{\beta}-\sin\beta}\sin\alpha.$$

Der Inhalt ist dann

$$J=2\pi\varrho F.$$

§ 78) Segmente ähnlicher Ellipsen von derselben Sehne h. Durch Cavalierische Erweiterung gehen die Kreissegmente der Figur 60 in elliptische über, die ähnlichen Ellipsen angehören. Folglich: Segmente ähnlicher Ellipsen mit Sehnen von derselben Länge $h=2b$ geben, wenn sie um die gemeinschaftliche Achse $A_1M_1B_1$ rotieren, inhaltsgleiche Körper. Der gemeinschaftliche Inhalt ist

$$J=\frac{4\pi}{3}a^3\frac{b}{a}=\frac{4\pi}{3}a^2b.$$

Dasselbe gilt auch dann, wenn noch die Cavalierische Verschiebung stattfindet, durch welche die Segmente unsymmetrisch werden. Die entstehenden Körper sind jedoch dann nicht mehr von Ellipsoiden begrenzt.

Bemerkungen. a) Ebenso kann man von den Figuren 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 58 aus zu Teilen

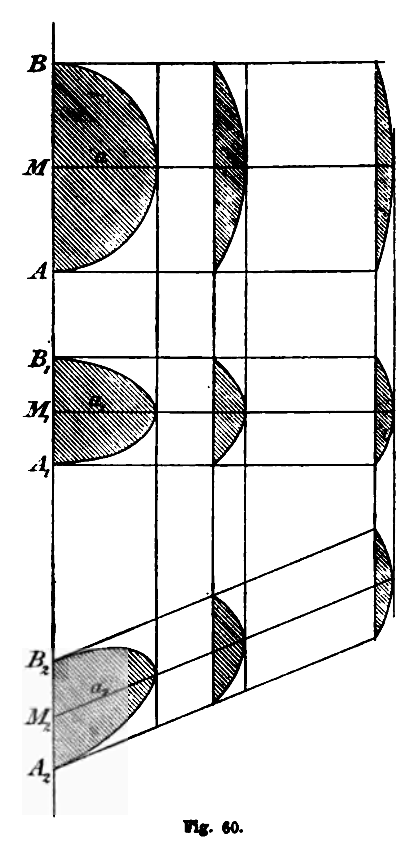


Fig. 60.

elliptischer Flächen übergehen, die von parallelen oder nicht parallelen Sehnen begrenzt werden.

b) Durch Cavalierische Erweiterung erhält man aus den Figuren 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42 elliptische Hohlkehlen und Wulste und Gefäße von Querschnitten, die Ellipsensegmente enthalten, ebenso Walzenprofile für die Herstellung elliptischer Stäbe, Tunnelquerschnitte mit elliptischer Wölbung und dergl.

Handelt es sich um konzentrische Kreise und um Figuren, die von zwei Kreisen begrenzt werden, so gehen diese Kreise in ähnliche Ellipsen über. Man kann aber auch von Figuren ausgehen, die z. B. von einem Kreise und einer Ellipse begrenzt werden und so zu unähnlichen Ellipsen gelangen.

§ 79) **Berechnung elliptischer Sektoren.** Man ziehe in Figur 58 A_1M_1 und B_1M_1, A_2M_2 und B_2M_2. Wie vorher, hat der zugehörige Kreissektor einen Centriwinkel β, der, wenn $DC = \frac{1}{n} DM$ ist, sich aus

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{n-1}{n}$$

bestimmt. Sein Radius ist $a = a_1 = a_2 \sin\gamma$. Der Inhalt des Kreissektors ist $F = \frac{a^2\hat{\beta}}{2}$, wo

$$\hat{\beta} = \pi \frac{\beta^0}{180^0}$$

ist. Durch Cavalierische Verkürzung mit dem Faktor $\frac{b}{a}$ wird für beide Ellipsensektoren der Figur

$$F_1 = F_2 = \frac{a_1 b_1 \hat{\beta}}{2} = \frac{a_2 b_2 \hat{\beta} \sin\gamma}{2}.$$

Für den Kreissektor und für die Ellipsensektoren ist der Schwerpunktsabstand

$$\varrho = \varrho_1 = \varrho_2 = \frac{4 a_1 \sqrt{2n - 1}}{3 n \hat{\beta}} = \frac{4 a_2 \sin\gamma \sqrt{2n - 1}}{3 n \hat{\beta}}.$$

Damit sind die Grundlagen für die Guldinschen Berechnungen gefunden.

§ 80) Schwerpunktsbestimmung für die einfachsten Parabelflächen. In das Rechteck $ABCD$ mit den Seiten b und h sei eine Parabel einbeschrieben, die bei A ihren Scheitel und AD zur Achse hat. Nach Bd. II, S. 311 ist dann die Fläche $ADC = \frac{2}{3} bh$, $ABC = \frac{1}{3} bh$.

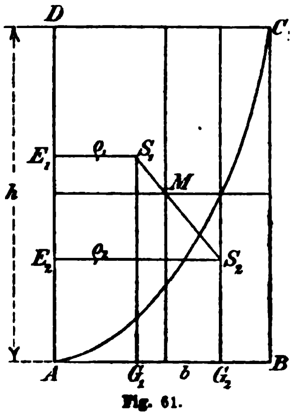


Fig. 61.

Die dort gezeichnete Pyramide hat ihren Schwerpunkt im Abstande $\frac{3}{4} h$ von der Spitze, dasselbe gilt nach Cavalieri von dem dort gezeichneten parabolischen Cylinder. Daher ist hier $E_2 S_2 = \frac{3}{4} b$. Dasselbe ergiebt sich mit Hilfe der Guldinschen Regel. Nach Bd. II, Seite 309 ist nämlich der Inhalt des Paraboloids, welches durch Drehung der Parabelfläche ACD um die Achse AD entsteht, gleich der Hälfte des zugehörigen Cylinders. Dasselbe gilt vom Aufsenkörper. Es ist also

$$2\pi \varrho_2 F_2 = \frac{1}{2} \pi b^2 h \text{ oder } 2 \varrho_2 \cdot \frac{bh}{3} = \frac{1}{2} b^2 h, \text{ also } \varrho_2 = \frac{3}{4} b.$$

Ebenso findet man

$$2\pi\varrho_1 F_1 = \frac{1}{2}\pi b^2 h \text{ oder } 2\varrho_1 \cdot \frac{2}{3} bh = \frac{1}{2} b^2 h, \text{ also } \varrho_1 = \frac{3}{8} b.$$

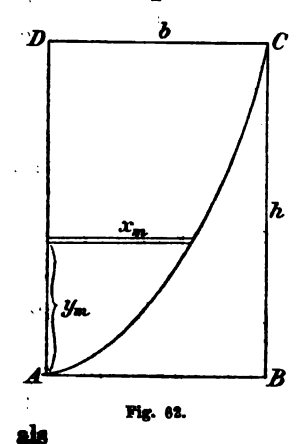


Fig. 62.

Etwas unbequemer sind die Schwerpunktshöhen y_1 und y_2 zu bestimmen. Man kann folgende Methode wählen. Man teile $AD = h$ in n gleiche Teile ein und lege durch die Teilpunkte horizontale Gerade. Dadurch entstehen Parallelstreifen von der Höhe $\frac{h}{n}$ und einer Breite, die sich für den Abstand $y_m = m\frac{h}{n}$ aus der Proportion

$$y_m : h = x_m^2 : b^2$$

als

$$x_m = b\sqrt{\frac{y_m}{h}} = b\sqrt{\frac{m\frac{h}{n}}{h}} = b\sqrt{\frac{m}{n}}$$

bestimmt. Der Inhalt des Streifens ist um so genauer gleich $\frac{h}{n} x_m = \frac{bh}{n}\sqrt{\frac{m}{n}}$, je gröfser n ist. Das statische Moment des Streifens in Bezug auf KL erhält man durch Multiplikation mit dem Abstande $\frac{mh}{n}$, es ist also gleich

$$\frac{mh}{n} \cdot \frac{bh}{n}\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}} bh^2.$$

Die Zahl m nehme nun der Reihe nach die Werte $1, 2, 3, \ldots n$ an, dann ist die Summe der Momente für $n = \infty$ gleich

$$bh^2 \frac{1^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{3}{2}} + \ldots + n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}+1}} = bh^2 \frac{1}{\frac{3}{2}+1} = bh^2 \frac{2}{5}.$$

Das gesamte statische Moment der Fläche ist aber gleich $y_1 . F_1 = y_1 \frac{2}{3} bh$. Also hat man die Gleichung

$$y_1 \frac{2}{3} bh = bh^2 \frac{2}{5} \text{ oder } y_1 = \frac{3}{5} h.$$

Weil ferner die Gerade $S_1 S_2$ durch M geht und dort im umgekehrten Verhältnis der Flächen geteilt ist (Satz der statischen Momente), so ist $S_2 M = 2 S_1 M$, also ist S_2 doppelt so weit von der horizontalen Mittellinie des Rechtecks entfernt, als S_1. Daraus folgt

$$y_2 = \frac{3}{10} h.$$

Damit sind die Schwerpunkte für beide Flächen bestimmt.

Als Beispiele für die Anwendung der Guldinschen Inhaltsformel behandle man die Körper, die durch Drehung beider Flächen um die anderen Rechtecksseiten entstehen.

§ 81) Durch Cavalierische Verschiebung geht die letzte Figur in ein Parallelogramm mit einbeschriebener Parabel über. Die Flächen bleiben dieselben, ebenso die Abstände $H'_1 S'_1$, $G'_1 S'_1$, $H'_2 S'_2$, $G'_2 S'_2$, während die Schrägabstände werden

$$E'_1 S'_1 = \frac{\varrho_1}{\sin\alpha}, \quad E'_2 S'_2 = \frac{\varrho_2}{\sin\alpha}.$$

Fig. 68.

Beim vollen Parabelsegment liegt der Schwerpunkt auf der zur Achse parallelen „Mittellinie“ AD, die durch den Berührungspunkt A der zur Sehne parallelen Tangente geht, und dabei ist

$$AS = \frac{3}{5} h = \frac{3}{5} AD.$$

§ 82) **Parabolischer Parallelstreif.** Es handelt sich um parabolische Flächen, die durch zwei parallele Sehnen begrenzt werden. (Fig. 65.)

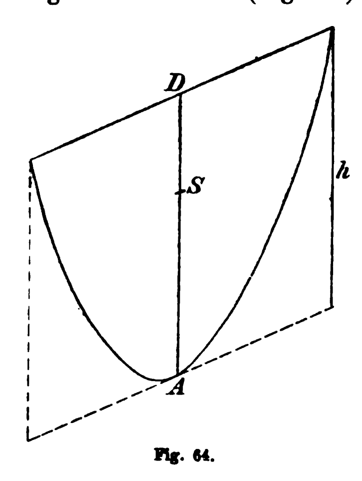


Fig. 64.

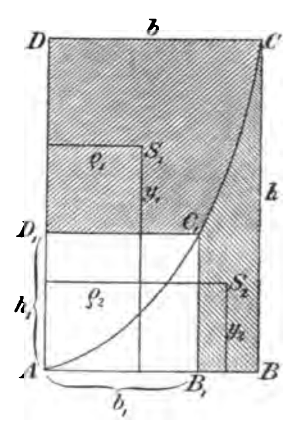


Fig. 65.

a) Für DCC_1D_1 wird nach Guldin

$$\varrho_1 = \frac{J_1}{2\pi F_1} = \frac{\frac{\pi}{2}(b^2 h - b_1^2 h_1)}{2\pi\left(\frac{2}{3} bh - \frac{2}{3} b_1 h_1\right)} = \frac{3}{8} \frac{b^2 h - b_1^2 h_1}{bh - b_1 h_1}.$$

Nach dem Momentensatze wird in Bezug auf AB, wenn AC_1D_1 mit F'_1, ACD mit F bezeichnet wird

$$\frac{3}{5} h_1 . F'_1 + y_1 F_1 = \frac{3}{5} hF,$$

also

$$y_1 = \frac{3}{5} \frac{hF - h_1 F'_1}{F_1} = \frac{3}{5} \frac{h \frac{2}{3} bh - h_1 \frac{2}{3} b_1 h_1}{\frac{2}{3} bh - \frac{2}{3} b_1 h_1}$$

$$= \frac{3}{5} \frac{bh^2 - b_1 h_1^2}{bh - b_1 h_1}.$$

b) Für BCC_1B_1 wird nach Guldin

$$\varrho_2 = \frac{J_2}{2\pi F_2} = \frac{\frac{\pi}{2}(b^2h - b_1^2h_1)}{2\pi\left(\frac{1}{3}bh - \frac{1}{3}b_1h_1\right)} = \frac{3}{4}\,\frac{b^2h - b_1^2h_1}{bh - b_1h_1}.$$

Der Momentensatz giebt wie vorher

$$y_2 = \frac{3}{10} \cdot \frac{h\frac{1}{3}bh - h_1\frac{1}{3}b_1h_1}{\frac{1}{3}bh - \frac{1}{3}b_1h_1} = \frac{3}{10}\,\frac{bh^2 - b_1h_1^2}{bh - b_1h_1}.$$

c) Der Übergang zu schrägen Parallelstreifen geschieht durch Cavalierische Verschiebung und bietet nichts Neues. Aber auch für parallel begrenzte Streifen lassen sich die Rechnungen ohne Schwierigkeiten durchführen.

Bemerkung. Die Berechnung parabolischer Bogen ist elementar durchführbar (vergl. des Verfassers methodisches Lehrbuch, Bd. III Seite 224), da aber die Oberfläche des Drehungsparaboloids schwieriger zu behandeln ist, soll die Schwerpunktsberechnung des Bogens vorläufig unterbleiben.

§ 33) Das symmetrische Segment der gleichseitigen Hyperbel und sein Schwerpunkt. Figur 66 stellt ein symmetrisches Segment einer gleichseitigen Hyperbel von der Halbachse $MC = a$ dar, deren Asymptoten durch MG und MH angedeutet sind. Die Gleichung der Kurve ist

1) $$x^2 - y^2 = a^2.$$

Die Fläche ist

Fig. 66.

2) $$F = x_1\sqrt{x_1^2 - a^2} - a^2\,{}^e lg\, x_1 + \frac{\sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}$$

$$= x_1y_1 - a^2\,{}^e lg\,\frac{x_1 + y_1}{a},$$

wo $MD = x_1$, $DB = y_1 = \frac{h}{2} = \sqrt{x_1^2 - a^2}$ ist. [Diese Formel läfst sich elementar ableiten, wie z. B. im methodischen Lehrbuch des Verfassers Bd. III Seite 47—49 gezeigt ist.]

Durch Drehung um PQ entsteht ein Cylinder mit Radius $MD = x_1$ und von der Höhe $AB = 2y_1$, ein gleichseitiges Drehungshyperboloid und der zugehörige Restkörper. Für die beiden ersten ist (nach Bd. II, Seite 297) die Inhaltsbestimmung nach der Simpsonschen Regel gestattet, folglich auch für den Restkörper. Dessen Inhalt wird also

$$2)\quad J = \frac{h}{6}\left[o + o + 4\pi\left(x_1^2 - a^2\right)\right] = \frac{2\pi h}{3}\left(x_1^2 - a^2\right)$$

$$= \frac{4\pi y_1}{3}\left(x_1^2 - a^2\right) = \frac{4\pi}{3} y_1^3.$$

Der Schwerpunktsabstand MS wird nach Guldin

$$3)\quad \varrho = \frac{J}{2\pi F} = \frac{\frac{4}{3}\pi y_1^3}{2\pi F} = \frac{2y_1^3}{3F} = \frac{2y_1^3}{3\left[x_1 y_1 - a^2\, {}^e lg \frac{x_1 + y_1}{a}\right]}$$

oder auch

$$3^*)\quad \varrho = \frac{2\left(x_1^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3\left[x_1\sqrt{x_1^2 - a^2} - a^2\, {}^e lg \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}\right]}.$$

§ 84) Bemerkungen. Der Inhalt des Drehungskörpers mit Achse PQ ist nach Gleichung 2) gleich dem einer Kugel vom Radius y_1, wie grofs auch a gewählt werden mag. Alle konzentrischen und symmetrischen gleichseitigen Hyperbelsegmente von derselben Sehne geben also inhaltsgleiche Drehungskörper. Zu ihnen gehört das Asymptotendreieck MGH. Durch Vergleich mit Figur 30 folgt der bemerkenswerte Satz:

Drehen sich konzentrische Kreissegmente und konzentrische und symmetrische Segmente gleichseitiger Hyperbeln von derselben Sehne h um den zu diesen Sehnen parallelen Durchmesser, so sind

alle entstehenden Drehungskörper von demselben Inhalte. (Fig. 67.)

Man kann den Satz auch dahin deuten, dafs sämtliche Segmente dieser Art in Bezug auf die Drehungsachse PQ dasselbe statische Moment haben, nämlich:

$$M = \varrho F = \frac{J}{2\pi} = \frac{4\pi}{3} y_1^3 \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{2}{3} y_1^3.$$

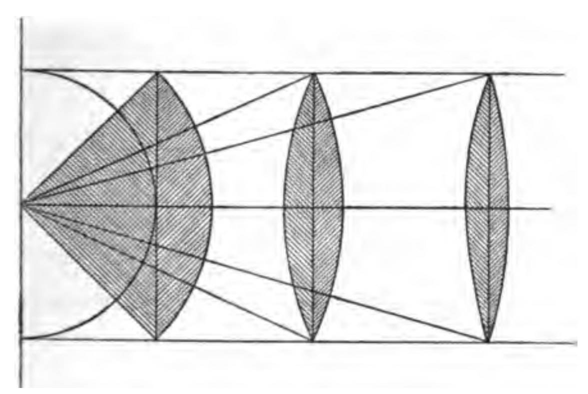


Fig. 67.

Man versuche die in § 63 gemachten Bemerkungen, abgesehen von den auf Bogen und Mantelflächen bezüglichen, soweit es möglich ist, hierher zu übertragen.

§ 85) Der Hyperbelsektor. In der Gleichung 2) bedeutet $x_1 y_1$ den Inhalt des Dreiecks MAB, folglich ist der zweite Teil

$$1) \quad F = a^2 \, {}^e lg \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a} = a^2 \, {}^e lg \frac{x_1 + y_1}{a}$$

die Fläche des Sektors $ACBM$ der gleichseitigen Hyperbel. Da sowohl auf den aus dem Dreieck MAB entstehenden Drehungskörper, als auch auf den aus dem Segment entstehenden die Simpsonsche Regel anwendbar ist, so läfst sich auch der Inhalt des aus dem Sektor entstehenden Drehungskörpers nach dieser Regel berechnen, d. h. es wird

$$2) \quad J = \frac{h}{6}(o + o + 4\pi a^2) = \frac{2\pi}{3} a^2 h = \frac{4\pi}{3} a^2 y_1,$$

was mit der Formel für den Inhalt des entsprechenden aus dem Kreissektor entstehenden Körpers übereinstimmt, wenn a der Kreisradius ist.

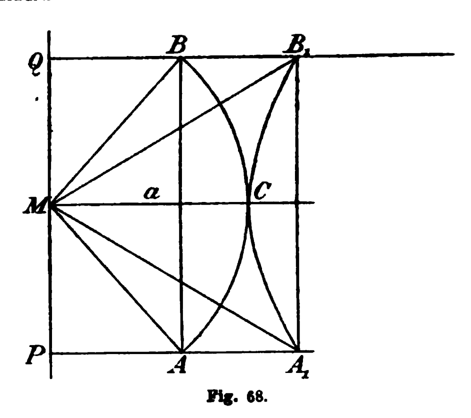


Fig. 68.

Nach Guldin wird der Abstand des Hyperbelsektors von M gegeben durch

$$3)\quad \varrho = \frac{J}{2\pi F} = \frac{\frac{4\pi}{3} a^2 y_1}{2\pi a^2 \, {}^e lg \frac{x_1 + y_1}{a}} = \frac{2}{3} \frac{y_1}{{}^e lg \frac{x_1 + y_1}{a}},$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$3^*)\quad \varrho = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{x_1^2 - a^2}}{{}^e lg \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}}$$

Das statische Moment des Sektors in Bezug auf PQ ist

$$M = \varrho F = \frac{J}{2\pi} = \frac{\frac{4\pi}{3} a^2 y_1}{2\pi} = \frac{2}{3} a^2 y_1.$$

§ 86) Berühren einander der Kreisbogen ACB und der Bogen A_1CB_1 der gleichseitigen Hyperbel, die beide von derselben Höhe $PQ = 2y_1$ sind, so sind die aus der Drehung beider entstehenden Körper inhaltsgleich,

folglich auch die statischen Momente der Flächen in Bezug auf PQ.

Berührt also der Hyperbelbogen das Asymptotendreieck MGH, so entsteht aus dem Sektor $MBCA$ ein Drehungskörper, dessen Inhalt gleich dem Kugelinhalte

$$\frac{4\pi}{3} y_1^3 = \frac{4\pi}{3} a_1^3$$

ist. —

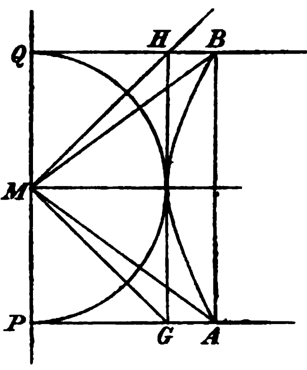


Fig. 69.

Haben Hyperbel- und Kreissektor dieselbe Höhe $2y$ und gehören sie zu derselben Sehne, so ist die Inhaltsdifferenz beider Drehungskörper (d. h. der Inhalt des durch Drehung der Linse $ACBC_1$ entstehenden Körpers)

$$D = \frac{4\pi}{3} r^2 y_1 - \frac{4\pi}{3} a^2 y_1 = \frac{4\pi}{3}(r^2 - a^2) y_1$$
$$= \frac{4\pi}{3} y_1 [x_1^2 + y_1^2 - (x_1^2 - y_1^2)] = \frac{8\pi}{3} y_1^3,$$

also gleich dem doppelten Inhalte einer Kugel vom Radius y_1. Die Inhaltssumme beider ist ebenso

$$S = \frac{4\pi}{3} y_1 [x_1^2 + y_1^2 + (x_1^2 - y_1^2)] = \frac{8\pi y_1}{3} x_1^2,$$

d. h. gleich dem doppelten Inhalte eines Ellipsoids von den Halbachsen x_1, x_1 und y_1, oder auch gleich dem doppelten Inhalte des zu dem gemeinschaftlichen Dreiecke MAB gehörigen Körpers. Der letztere Körper hat also als Inhalt das arithemtische Mittel der Inhalte der beiden anderen.

§ 87) Durch Cavalierische Verkürzung in senkrechter Richtung mit Hilfe des Faktors $\varrho = \frac{b}{a}$ erhält man aus Figur 67 Segmente und Sektoren ähnlicher Ellipsen und ähnlicher Hyperbeln, über die sich entsprechende Sätze aussprechen lassen. Die Flächeninhalte werden die $\frac{b}{a}$ fachen,

die Körperinhalte ebenfalls, die Schwerpunktsabstände von M bleiben dieselben, wie oben, da $\varrho = \frac{J}{2\pi F}$ übergeht in

$$\varrho = \frac{\frac{b}{a} J}{2\pi \frac{b}{a} F} = \frac{J}{2\pi F},$$

so dafs keine Änderung eintritt. Es sei dem Leser überlassen, die neuen Sätze in Worte zu kleiden.

Entsprechendes entsteht durch Cavalierische Verschiebung in senkrechter Richtung, wodurch die Rechtecke in Parallelogramme verwandelt werden, die Schwerpunktsabstände von PQ sich nicht ändern und auch die Flächen- und die Körperinhalte dieselben bleiben.

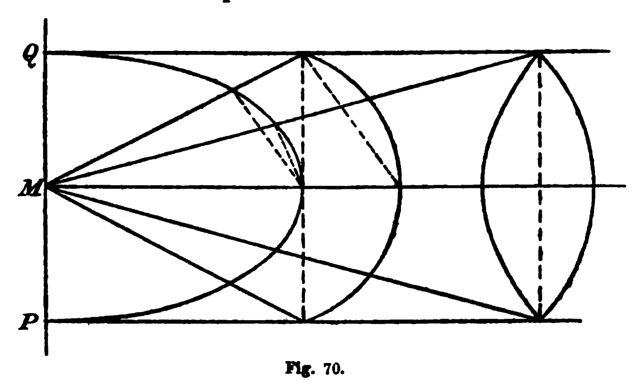


Fig. 70.

Für den Fall der Figur 70 wird jedes der Hyperbelsegmente für sein besonderes $a = MC$ nach der Formel

$$F = \frac{b}{a}\left[x_1 \sqrt{x_1^2 - a^2} - a^2\, {}^e lg \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}\right]$$
$$= x_1 y_1 - ab\, {}^e lg \left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)$$

berechnet, denn es ist $\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2} = y_1$, jeder Hyperbelsektor nach der Formel

$$F = ab\,{}^e lg\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right) = ab\,{}^e lg \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}.$$

§ 88) **Schwerpunkt für die obere Hälfte des Hyperbelsegments.** Bei der gleichseitigen Hperbel handelt es sich um die Fläche CDB der Figur 66, die durch

$$F_1 = \frac{F}{2} = \frac{1}{2}\left[x_1 y_1 - a^2\,{}^e lg \frac{x_1 + y_1}{a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_1\sqrt{x_1^2 - a^2} - a^2\,{}^e lg \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}\right]$$

gegeben ist. Durch Drehung um die Achse MD entsteht ein Segment des gleichseitigen zweimanteligen Drehungshyperboloids, auf welches nach Band II wiederum die Simpsonsche Regel anwendbar ist. Dabei hat man $CD = x_1 - a$ als Höhe zu betrachten. Der Unterschnitt ist $M = 0$, der Oberschnitt $O = \pi y_1^2 = \pi(x_1^2 - a^2)$. Der Mittelschnitt wird πy_2^2, wo y_2^2 sich aus

$$y_2^2 = x_2^2 - a^2 = \left(\frac{x_1 + a}{2}\right)^2 - a^2$$

bestimmt. Die Simpsonsche Regel giebt also

$$J_1 = \frac{\pi(x_1 - a)}{6}[0^2 + y_1^2 + 4y_2^2]$$

$$= \frac{\pi(x_1 - a)}{6}\left[(x_1^2 - a^2) + 4\left\{\left(\frac{x_1 + a}{2}\right)^2 - a^2\right\}\right]$$

$$= \frac{\pi(x_1 - a)}{6}[(x_1^2 - a^2) + (x_1^2 + 2x_1 a + a^2 - 4a^2)]$$

oder

$$J_1 = \frac{2\pi(x_1 - a)}{6}[x_1^2 + ax_1 - 2a^2] = \frac{\pi}{3}[x_1^3 - 3a^2 x_1 + 2a^3].$$

Nach Guldins Regel wird der senkrechte Schwerpunktsabstand der oberen Hälfte des Segments von der Drehungsachse

$$\varrho_1 = \frac{J_1}{2\pi F_1} = \frac{J_1}{2\pi \frac{F}{2}} = \frac{\frac{\pi}{3}[x_1^3 - 3a^2 x_1 + 2a^3]}{\pi\left[x_1 y_1 - a^2\, {}^e lg \frac{x_1 + y}{a}\right]}$$

$$= \frac{x_1^3 - 3a^2 x_1 + 2a^3}{3\left[x_1\sqrt{x_1^2 - a^2} - a^2\, {}^e lg \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}\right]}.$$

Der Horizontalabstand von PQ bleibt, wie vorher

$$\varrho = \frac{2(x_1^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{3\left[x_1\sqrt{x_1^2 - a^2} - a^2\, {}^e lg \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}\right]}.$$

Die obige Verkürzung mit Hilfe des Faktors $\frac{b}{a}$ und die Cavalierische Verschiebung erweitern die Aufgabe in leichter Weise. Der durch die „verkürzte" Hyperbel entstehende Drehungskörper giebt

$$J_1' = \frac{\pi b^2}{3a^2}[x_1^3 - 3a^2 x_1 + 2a^3].$$

Der durch Drehung der Fläche $MCBQ$ in Figur 66 um die x-Achse entstehende Körper wird für die allgemeine Hyperbel unter Benutzung der Hyperbelgleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$J = \pi x_1 y_1^2 - \frac{\pi b^2}{3a^2}[x_1^3 - 3a^2 x_1 + 2a^3]$$

$$= \frac{3\pi b^2}{3a^2}(x_1^3 - a^2 x_1) - \frac{\pi b^2}{3a^2}(x_1^3 - 3a^2 x_1 + 2a^3)$$

$$= \frac{2\pi b^2}{3a^2}(x_1^3 - a^3).$$

Ähnlich kann man die Hälften von Kreis- und Ellipsensegmenten, von Kreis-, Ellipsen- und Hyperbelsektoren behandeln.

§ 89) Bemerkungen zu den Analogien zwischen Kreis und gleichseitiger Hyperbel.

Die hier so häufig auftretenden Analogien haben einen tiefer liegenden analytischen Grund. Die Kreisgleichung $x^2+y^2=a^2$ läfst sich nämlich in der Form $x^2-(iy)^2=a^2$, wo $i=\sqrt{-1}$ ist, schreiben. Setzt man in letzterer Gleichung y an Stelle von iy, so hat man die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, die schon früher (Bd. II Seite 294) als Fortsetzung des Kreises betrachtet wurde.

Kennt man die Eulersche Formel*)

$$arc\tan\frac{y}{x}=\frac{1}{2i}\,{}^{e}lg\,\frac{x+yi}{x-yi},$$

so geht z. B. die Formel für den Kreissektor $F=a^2\frac{\hat{\alpha}}{2}$ leicht in eine andere über. Man hat für den Kreis $x^2+y^2=a^2$ den Sektor

$$F=a^2\,\frac{\hat{\alpha}}{2}=a^2\,arc\tan\frac{y_1}{x_1}=\frac{a^2}{2i}\,{}^{e}lg\,\frac{x_1+y_1 i}{x_1-y_1 i}$$

$$=\frac{a^2}{2i}\,{}^{e}lg\,\frac{\sqrt{a^2-y_1^2}+y_1 i}{\sqrt{a^2-y_1^2}-y_1 i}$$

---

*) Sie wird folgendermafsen gefunden. Jede komplexe Grösse $x\pm yi$ läfst sich in der Form $r(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)=re^{\pm\varphi i}$ schreiben, wo $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=arc\tan\frac{y}{x}$ ist. Dabei wird

$${}^{e}lg\,(x+yi)={}^{e}lg\left(re^{\varphi i}\right)={}^{e}lg\,r+{}^{e}lg\,e^{\varphi i}$$
$$={}^{e}lg\,r+\varphi i={}^{e}lg\sqrt{x^2+y^2}+i\,arc\tan\frac{y}{x},$$

$${}^{e}lg\,(x-yi)={}^{e}lg\left(re^{-\varphi i}\right)={}^{e}lg\,r+{}^{e}lg\,e^{-\varphi i}$$
$$={}^{e}lg\,r-\varphi i={}^{e}lg\sqrt{x^2+y^2}-i\,arc\tan\frac{y}{x}.$$

Durch Subtraktion folgt

$${}^{e}lg\,(x+yi)-{}^{e}lg\,(x-yi)=2\,i\,arc\tan\frac{y}{x}$$

oder

$${}^{e}lg\,\frac{x+yi}{x-yi}=2i\,arc\tan\frac{y}{x}.$$

oder endlich

$$F = \frac{a^2}{2i} \cdot lg \frac{\sqrt{a^2 + (y_1 i)^2} + y_1 i}{\sqrt{a^2 + (y_1 i)^2} - y_1 i}.$$

Setzt man in der Gleichung

$$Fi = \frac{a^2}{2} \cdot lg \frac{\sqrt{a^2 + (y_1 i)^2} + y_1 i}{\sqrt{a^2 + (y_1 i)^2} - y_1 i},$$

die y_1 nur in Verbindung mit dem Faktor i enthält, überall y' statt $y_1 i$, und links F' statt Fi, so erhält man für die Hyperbel $x^2 + (yi)^2 = a^2$ oder $x^2 - y^2 = a^2$ den Sektor

$$F' = \frac{a^2}{2} \cdot lg \frac{\sqrt{a^2 + y'^2} + y'}{\sqrt{a^2 + y'^2} - y'} = \frac{a^2}{2} \cdot lg \frac{x' + y'}{x' - y'}$$

Dies formt sich um zu

$$F' = a^2 \cdot lg \sqrt{\frac{x' + y'}{x' - y'}} = a^2 \cdot lg \sqrt{\frac{x' + y'}{x' - y'} \cdot \frac{x' + y'}{x' + y'}}$$

$$= a^2 \cdot lg \frac{x' + y'}{\sqrt{x'^2 - y'^2}} = a^2 \, lg \frac{x' + y'}{a}.$$

Und dies ist die in § 85 angegebene Form für den Hyperbelsektor. Die scheinbar so verschiedenen Formeln

$$F = a^2 \frac{\hat{\alpha}}{2} = a^2 \, arc \tan \frac{y}{x} \text{ und } F' = a^2 \, lg \frac{x' + y'}{a}$$

stehen also in einem einfachen analytischen Zusammenhange. Man beachte dabei, dafs es sich um den Fall handelt, bei dem die Bogen des Kreises und der Hyperbel einander berühren. (Vergl. Figur 68.)

Ebenso geht die Formel für das Kreissegment

$$F = a^2 \frac{\hat{\alpha}}{2} - x_1 y_1 = a^2 arc \tan \frac{y_1}{x_1} - x_1 y_1 = \frac{a^2}{2i} lg \frac{x_1 + y_1 i}{x_1 - y_1 i} - \frac{x_1 y i}{i}$$

über in

$$Fi = \frac{a^2}{2} lg \frac{x_1 + y_1 i}{x_1 - y_1 i} - x_1 y_1 i.$$

Daraus wird, wie oben

$$F' = \frac{a^2}{2} lg \frac{x'+y'}{x'-y'} - x'y' = a^2 lg \sqrt{\frac{x'+y'}{x'-y'}} - x'y'$$
$$= a^2 lg \frac{x'+y'}{a} - x'y',$$

was abgesehen vom Vorzeichen die Formel für das Segment der gleichseitigen Hyperbel ist.

Entsprechendes versuche man für die Inhalte der Drehungskörper um die Schwerpunktsabstände zu zeigen.

μ) Berechnung der Fläche des Drehungsparaboloids.

§ 90) Rektifikation der Parabel. In der Figur 71a sei die Parabel $x = y^2$ dargestellt.*) Man denke sich die Höhe $AP = y_1$ in n gleiche Teile $\frac{y_1}{n} = \delta$ eingeteilt. Ist n sehr grofs, so gehört zu jedem $\delta = \frac{y_1}{n}$ ein Teilchen σ des Parabelbogens $OP = s$, so dafs $\sigma = \frac{\delta}{\cos\beta}$ ist, wo β den Winkel bedeutet, den die Tangente der Parabel an der betreffenden Stelle mit der Y-Achse bildet. Bekanntlich bildet aber die Tangente mit der X-Achse einen Winkel, der sich aus $\tan\alpha = \frac{y}{2x}$ bestimmt, demnach ist

$$\tan\beta = \frac{2x}{y} = \frac{2y^2}{y} = 2y,$$

also

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+4y^2}}.$$

Jedes σ also bestimmt sich als

$$\sigma = \delta\sqrt{1+4y^2}$$

und daher ist

$$\frac{\sigma}{\delta} = \sqrt{1+4y^2},$$

*) In Figur 71a lies oben bei P nicht β sondern β_1.

und der Parabelbogen

$$s = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n = \delta\, \Sigma \sqrt{1 + 4y^2}.$$

Man setze nun die veränderliche Gröfse $\frac{\sigma}{\delta} = \xi$, so dafs man hat

$$\xi = \sqrt{1 + 4y^2}$$

oder

$$\frac{\xi^2}{1^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

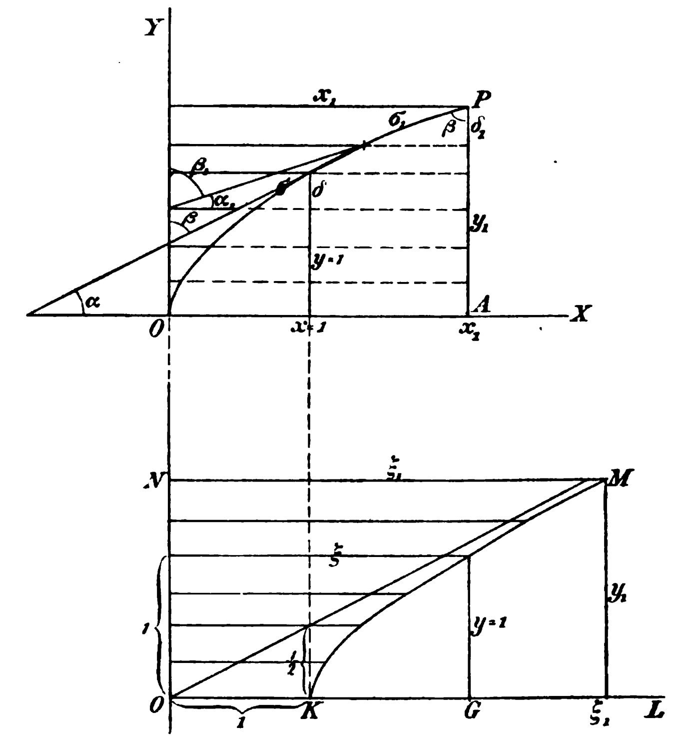


Fig. 71.

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel mit den Halbachsen 1 und $\frac{1}{2}$. Diese Hyperbel entsteht dadurch, dafs man in jeder Höhe y das entsprechende ξ als Abscisse anträgt. Die Fläche zwischen dieser Hyperbel und der Y-Achse ist von 0 bis y_1 von der Gröfse

$$\Sigma\delta\xi = \delta\Sigma\xi = \delta\Sigma\sqrt{1+4y^2}.$$

Demnach wird diese Fläche durch dieselbe Zahl ausgedrückt, wie die Länge des zugehörigen Parabelbogens.

Die hyperbolische Fläche aber ist bekannt, denn bei der Hyperbel $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist das halbe Segment KLM gleich $\frac{1}{2}\left[\xi_1 y_1 - ab\,{}^e lg\left(\frac{\xi_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)\right]$, also die Fläche

$$OKMN = \xi_1 y_1 - \frac{1}{2}\left[\xi_1 y_1 - ab\,{}^e lg\left(\frac{\xi_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\xi_1 y_1 + ab\,{}^e lg\left(\frac{\xi_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)\right],$$

oder, da $\xi_1 = a\sqrt{1 + \frac{y_1^2}{b^2}}$ ist,

$$OKMN = \frac{1}{2}\left[y_1 a\sqrt{1+\frac{y_1^2}{b^2}} + ab\,{}^e lg\left(\sqrt{1+\frac{y_1^2}{b^2}} + \frac{y_1}{b}\right)\right].$$

Hier aber war $a = 1$, und $b = \frac{1}{2}$, also wird die Fläche in Wirklichkeit

$$F = \frac{1}{2}\left[y_1\sqrt{1+4y_1^2} + \frac{1}{2}\,{}^e lg\left(\sqrt{1+4y_1^2} + 2y_1\right)\right].$$

Ebenso grofs ist aber nach obigem die Länge der Parabel, also wird diese Länge von 0 bis y_1

$$\overset{y_1}{\underset{0}{s}} = \frac{1}{2}\left[y_1\sqrt{1+4y_1^2} + \frac{1}{2}\,{}^e lg\left(\sqrt{1+4y_1^2} + 2y_1\right)\right].$$

§ 91) **Fläche des Drehungsparaboloides.** Läfst man die erste der beiden Figuren sich um die X-Achse

drehen, so giebt jedes σ eine Fläche $2\pi y\sigma = 2\pi y\delta\sqrt{1+4y^2}$. Bei der Drehung der zweiten Fläche entsteht aus jeder Schicht ein Ringkörper vom Inhalte $2\pi y\xi\delta = 2\pi y\delta\sqrt{1+4y^2}$. Der kleine Ringkörper hat also dieselbe Inhaltsformel, wie jene Fläche. Für die beiderseitigen Summen aller Elemente folgt also:

Die Fläche des ganzen Drehungsparaboloids (von $y=0$ bis $y=y_1$) wird durch dieselbe Zahl dargestellt, wie der Inhalt des Drehungskörpers der Fläche $OKMN$.

Dieser Drehungskörper hat aber nach § 88 für die Hyperbel $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ den Inhalt $\frac{2\pi b^2}{3a^2}(\xi^3 - a^3)$, also für $a=1$ und $b=\frac{1}{2}$ den Inhalt

$$\overset{y_1}{\underset{0}{J}} = \frac{\pi}{6}(\xi_1^3 - 1^3) = \frac{\pi}{6}\left[\sqrt{1+4y_1^2}^{\,3} - 1\right].$$

Demnach ist die Fläche des Drehungsparoboloids, welches aus der Parabel $x=y^2$ entsteht

$$\overset{y_1}{\underset{0}{F}} = \frac{\pi}{6}\left[\sqrt{1+4y_1^2}^{\,3} - 1\right]$$

oder

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{\pi}{6}\left[\sqrt{1+4x_1}^{\,3} - 1\right].$$

§ 92) Die Schwerpunktshöhe für die Fläche $OKLM$ ist nach Guldin

$$y_s = \frac{J}{2\pi F} = \frac{\frac{\pi}{6}\left[\sqrt{1+4y_1^2}^{\,3} - 1\right]}{2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[y_1\sqrt{1+4y_1^2} + \frac{1}{2}\,{}^e lg\left(\sqrt{1+4y_1^2} + 2y_1\right)\right]}.$$

oder

$$y_s = \frac{\sqrt{1+4y_1^2}^{\,3} - 1}{6\left[y_1\sqrt{1+4y_1^2} + \frac{1}{2}\,{}^e lg\left(\sqrt{1+4y_1^2} + 2y_1\right)\right]}.$$

Ebenso grofs ist die Schwerpunktshöhe y_s für den parabolischen Bogen OP.

Bemerkung. Dem Leser bleibe es überlassen, die Formeln für den allgemeinen Fall $y^2 = 2px$ oder auch für $x = ky^2$ aufzustellen, was nur ein einfaches Übungsbeispiel ist.

§ 93) Eine Folgerung, auf die ein späterer Abschnitt näher eingehen soll, sei schon hier angedeutet. Man teile in Figur 71a die X-Achse in gleiche Teile $\delta_1 = \frac{x_1}{n}$ und lege durch die Teilpunkte senkrechte Gerade, die auf der Kurve OP andere Teilchen σ geben, als vorher. Jetzt handelt es sich bei der Tangente um den Winkel $\tan\alpha = \frac{y}{2x}$. Die Kurve $y^2 = x$ ist jetzt in der Form $y = \sqrt{x}$ zu schreiben, so dafs jetzt $\tan\alpha = \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ist, und so wird jetzt

$$\cos\alpha = \frac{\delta_1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}x}}.$$

Jetzt denke man sich auf der X-Achse der neuen Zeichnung Lote

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}$$

errichtet, dann erhält man eine Kurve von dieser Gleichung, deren Fläche $\overset{x_1}{\underset{0}{F}}$ ebenfalls so grofs sein mufs, wie die Länge der Parabel von 0 bis x_1, nämlich

Fig. 72.

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \overset{x_1}{\underset{0}{s}} \,.\, 1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{x_1(1+4x_1)} + \frac{1}{2}\,lg\left(\sqrt{1+4x_1} + 2\sqrt{x_1}\right)\right].$$

Um von der neuen Kurve eine Vorstellung zu erhalten, schreibe man sie in der Form

$$\eta^2 = 1 + \frac{1}{4x}$$

oder

$$\frac{1}{x} = 4\eta^2 - 4.$$

Während nun die Kurve $x' = 4\eta^2 + 4$ eine leicht zu konstruierende Parabel vorstellte, stellt die hier gefundene Gleichung eine Kurve vor, die aus dieser Parabel mit Hilfe reciproker Abscissen zu konstruieren ist. (Diese ergeben sich mit Hilfe der Projektion $x : 1 - 1 : x'$). Die Fläche

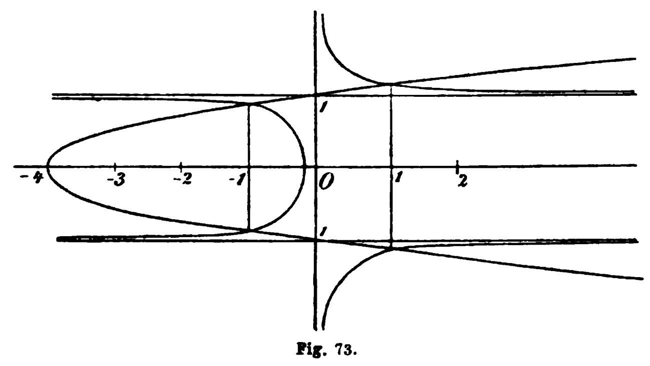


Fig. 73.

der Kurve von 0 bis x_1 ist also gleich dem Ausdrucke $\overset{x_1}{\underset{0}{F}}$. Dreht sich die neue Fläche um die Y-Achse, so erhält man einen Inhalt, der durch dieselbe Formel ausgedrückt wird, wie die Drehungsfläche, die durch die Drehung der Parabel um die Scheiteltangente entsteht.

So sind der parabolischen Kurve zwei Flächen zugeordnet worden, die zu ihr in einem einfachen Zusammenhange stehen, der später genauer untersucht werden soll.

ν) Anwendung der Guldinschen Inhaltsformel auf die einfachsten Schraubengewinde.

§ 94) Das flache Schraubengewinde (mit Rechteckprofil). Es sei r der Radius des Kern-Cylinders,

a und b seien die Seiten des Rechtecks, dann ist der Schwerpunktsabstand von der Cylinderachse $\varrho = r + \frac{b}{2}$, der Inhalt für jeden Umgang also (unabhängig von der Steigung) nach § 36

$$J = 2\varrho\pi F = 2\left(r + \frac{b}{2}\right)\pi ab = \pi(2r + b)ab.$$

Für die Mutter gilt, wenn $a_1 = a$ ist, dieselbe Formel. Der Normalschnitt zu PQ hat den Flächeninhalt $\frac{J}{h}$, wenn h die Höhe für den Umgang ist. Dies gilt für alle Gewinde.

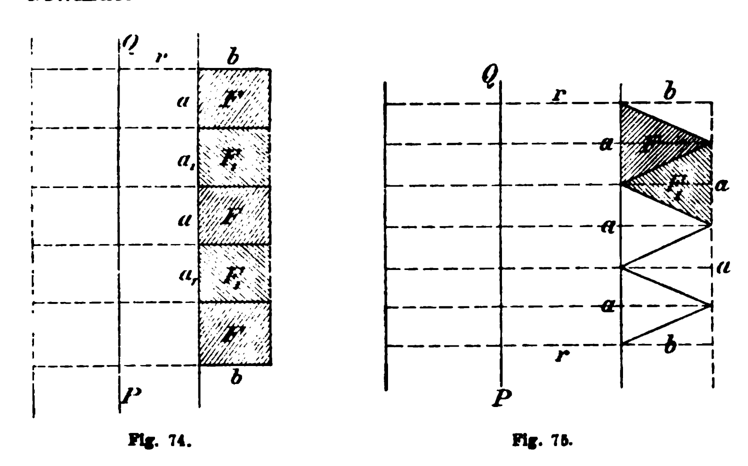


Fig. 74. Fig. 75.

§ 95) Das scharfe Schraubengewinde hat theoretisch zum Profil ein gleichschenkliges Dreieck. Sind a und b Grundlinien und Höhe des letzteren, so ist $F = \frac{ab}{2}$, der Schwerpunktsabstand von PQ ist $\varrho = r + \frac{b}{3}$, also der Inhalt für den Umgang

$$J = 2\pi\left(r + \frac{b}{3}\right)\frac{ab}{2} = \pi\left(r + \frac{b}{3}\right)ab.$$

Für die Schraubenmutter ist theoretisch entsprechend

$$J_1 = 2\pi\left(r + \frac{2b}{3}\right)\frac{ab}{2} = \pi\left(r + \frac{2b}{3}\right)ab.$$

(Die Summe der beiden Inhalte ist

$$J + J_1 = 2\pi(r + b)\frac{ab}{2} = 2\pi\frac{r+b}{2}ab,$$

was dem Umgange eines Parallelogramms mit $F = ab$ (oder dem eines Rechtecks) entspricht. Der Unterschied ist

$$J_1 - J = \pi\frac{b}{3}ab = \frac{\pi ab^2}{3}.\Big)$$

§ 96) Das trapezische Gewinde.

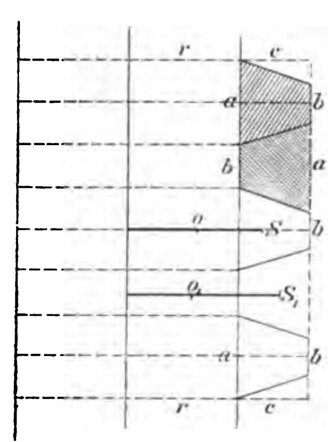


Fig. 76.

$$F = \frac{a+b}{2}c,$$

Schwerpunktsabstand

$$\varrho = r + \frac{a+2b}{a+b}\cdot\frac{c}{3},$$

also Inhalt für den Umgang

$$J = 2\pi\left[r + \frac{a+2b}{a+b}\cdot\frac{c}{3}\right]\frac{a+b}{2}c$$

$$= \frac{\pi c}{3}[r(a+b) + (a+2b)c].$$

Für das Gewinde der Mutter hat man durch Vertauschung von a und b

$$J_1 = 2\pi\left[r + \frac{b+2a}{b+a}\cdot\frac{c}{3}\right]\frac{b+a}{2}c$$

$$= \frac{\pi c}{3}[r(b+a) + (b+2a)c].$$

§ 97) Ein Halbkreis drehe sich um seinen Durchmesser und steige dabei (an letzterem als Spindel)

so aufwärts, dafs seine Punkte Schraubenlinien zurücklegen. (Vgl. z. B. Figur 18.)

Der Inhalt des Gewindes für einen Umgang ist dann gleich dem der entsprechenden Kugel, also

$$J = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

Für die entsprechende Mutter würde werden

$$J_1 = \frac{2\pi}{3} r^3.$$

Die Summe beider Inhalte ist gleich $2\pi r^3$, d. h. gleich dem Inhalte des den Kugel umbeschriebenen Cylinders. —

Fig. 77.

§ 98) Man konstruiere auch das zur Hohlkehle der Figur 77 gehörige Schraubengewinde für beliebige Steigung und führe dessen Inhaltsberechnung aus. Auch elliptische Hohlkehlen machen keine Schwierigkeit.

Das in Figur 78 dargestellte Profil soll von der als Sinoide bezeichneten Kurve begrenzt sein, die durch Cavalierische Erweiterung aus der Sinuslinie entsteht. Auch das entsprechende Schraubengewinde kann konstruiert und elementar berechnet werden. Dieses Profil kommt vielfach an Säulen mit Schraubengewinden vor, ebenso wie das an den Kerncylinder angesetzte Halbkreisgewinde Figur 79. Romanische, gotische, vlämische und Renaissance - Architektur benützen Schraubengewinde aller Art, die zu einer bestimmten Art von Ornamentik geführt haben, wobei Flechtwerk, Perlenschnüre und der-

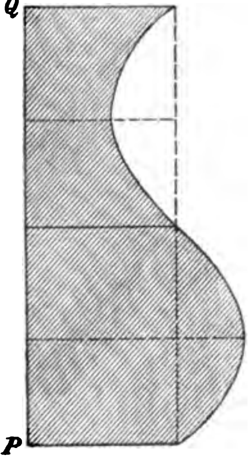


Fig. 78.

gleichen Rolle spielen. Solche Säulen finden sich in Rom in der Peterskirche, im Kreuzgang von St. Paolo, am Bischofsstuhl von St. Lorenzo, in Siena am Dom, in Syracus am Palazzo Montalto, in Freiberg an der goldenen Pforte des Doms, in Basel an der Galluspforte des Münsters, im Kreuzgang zu Königslutter u. s. w. Selbstverständlich ist für diese Ornamentik nur die strenge Konstruktion, nicht die Berechnung von Bedeutung. —

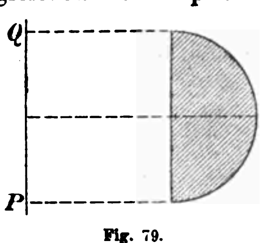


Fig. 79.

Zweiter Abschnitt.

Die Schraubenflächen, ihre Abwickelbarkeit auf Drehungsflächen, ihr Zusammenhang mit der Guldinschen Flächenformel und ihre konforme Abbildung auf die Ebene und auf andere Flächen.

α) Die gewöhnliche Schraubenregelfläche und ihre Abwickelbarkeit auf Drehungshyperboloide und auf allgemeinere Schraubenregelflächen.

§ 99) Man denke sich auf einem Cylinder vom Durchmesser r eine Schraubenlinie von der Ganghöhe h gezeichnet, deren Steigungswinkel γ also durch $\tan\gamma = \frac{h}{2\pi r}$ gegeben ist. Von jedem Punkte B_n der Schraubenlinie denke man sich an die Achse nach oben hin eine Gerade von gegebener Länge $B_n A_n = a$ gezeichnet. Alle diese Geraden schneiden die Achse unter konstantem Winkel α und bilden eine gewöhnliche Schraubenregelfläche, die, weil die a einander nicht schneiden, sondern kreuzen, nicht abwickelbar auf die Ebene ist. Sie schneiden auch die Schraubenlinie unter einem gewissen Winkel ξ, der leicht zu berechnen ist. Man denke sich in Figur 80 das Rechteck $A_1 G B_1 D_1$ vollendet und auf seiner Ebene in den Eckpunkten Lote von gleichen Längen errichtet, womit ein Rechteckskörper bestimmt ist.

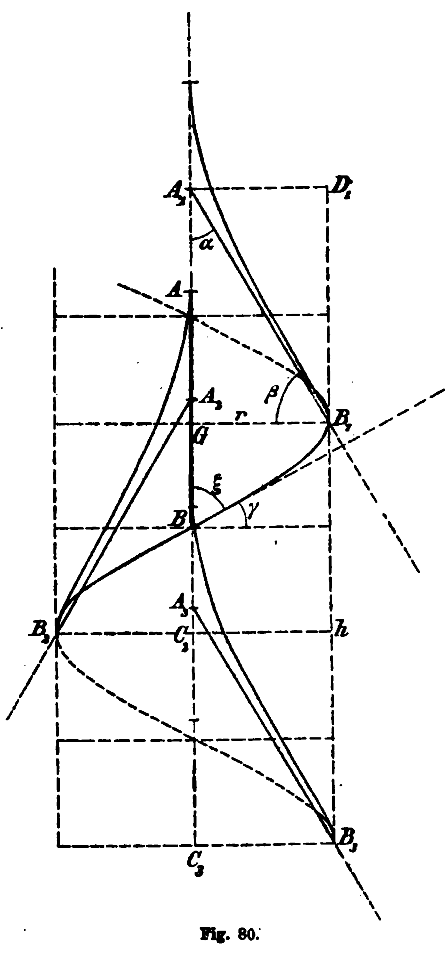


Fig. 80.

Auf dessen erstgenannter Fläche ist von B_1 aus die Gerade $B_1 A_1$ gezeichnet, die mit $B_1 G$ den Winkel β bildet. Auf einer der anstoſsenden Flächen giebt die Tangente der Schraubenlinie in B_1 eine Gerade $B_1 X_1$, welche mit der entsprechenden Horizontalkante den Steigungswinkel γ bildet. Nach Band II Seite 13 § 28) bilden dann die Geraden $B_1 X_1$ und $B_1 A_1$ den gesuchten Winkel ξ, den auch BV und BA bilden, und der sich aus $\cos \xi = \sin \beta \sin \gamma$ oder auch aus

1) $$\cos \xi = \cos \alpha \sin \gamma$$

bestimmt. Sind also von der untersuchten Schraubenfläche a, α und die Ganghöhe h gegeben, so ist $r = a \sin \alpha$, die Kurvenlänge für einen Umgang $s = \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}$, also der Steigungswinkel durch

2) $$\sin \gamma = \frac{h}{s} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2 \sin^2 \alpha}}$$

gegeben, für den Winkel ξ aber folgt

$$3)\qquad \cos\xi = \cos\alpha\sin\gamma = \frac{h\cos\alpha}{s} = \frac{h\cos\alpha}{\sqrt{h^2+4\pi^2r^2}}$$
$$= \frac{h\cos\alpha}{\sqrt{h^2+4\pi^2a^2\sin^2\alpha}}.$$

Denkt man sich die Geraden a nach unten bis ins Unendliche verlängert, so erkennt man, dafs jede Schraubenlinie der Regelfläche ihre besondere Steigung γ hat und von den Geraden der Fläche unter einem besonderen Winkel ξ geschnitten wird. Für $a=0$ z. B. ist $h=s$, d. h. die Schraubenlinie fällt mit der Cylinderachse zusammen, und dabei wird $\cos\xi_0 = \cos\alpha$, d. h. $\xi=\alpha$, wie auch die Verlängerung von B_1A_1 und C_1A_1 über A_1 hinaus zeigt. Für $a=\infty$ wird $\gamma=0$ und $\xi=90^0$, so dafs im Unendlichen rechtwinkliges Schneiden stattfindet und die Fläche dort den Charakter eines Kegels annimmt.

§ 100) Die Verlängerung der Geraden a über die A hinaus giebt eine Fortsetzung der Fläche, die der hier behandelten Hälfte kongruent ist, also keiner Untersuchung bedarf.

Beiläufig sei bemerkt, dafs, da alle Schraubenlinien dieselbe Ganghöhe haben $\left(\text{in Figur 81 ist } DG=\frac{h}{4}\right)$, mit abnehmender Länge von a also steiler und steiler werden, sie in der Aufrifszeichnung in verschiedenem Mafse über die erzeugende Gerade hinausgreifen und von einer Kurve umhüllt werden, die an einen Hyperbelarm erinnert und z. B. A_1B_1 zur Asympotete hat.

Fig. 81.

[Für $\alpha=90^0$ handelt es sich um die Minimal-

schraubenregelfläche, die eine Ausnahmestellung einnimmt und einer besonderen Behandlung bedarf. Sie ist hier aus der Betrachtung auszuschliefsen. Dasselbe gilt vom Falle $\alpha = 0$, der den Cylinder giebt. Dieser ist auf die Ebene abwickelbar.]

§ 101) Man denke sich aus der Schraubenfläche einen Streifen ausgeschnitten, der von der Cylinderachse und einer der Schraubenlinien begrenzt ist, so dafs er lauter Gerade von der Länge a enthält. Von beliebigen zweien dieser Geraden a soll der Streifen in seiner Länge begrenzt sein. Hat dabei der abgeschnittene Teil der Achse die Länge l, so berechnet sich die Länge l_1 des abgeschnittenen Teils der begrenzenden Schraubenlinie aus $h:s = l:l_1$ als

$$4) \qquad l_1 = l\frac{s}{h} = l\frac{1}{\sin\gamma}.$$

Die Fläche soll jetzt so gebogen werden, dafs die Geraden a geradlinig bleiben (man denke sie sich z. B. durch aufgeklebte Holzstäbchen dazu gezwungen), und zwar soll die Achse l in einen Kreis gebogen werden, dessen Radius $\varrho = \frac{l}{2\pi}$ wird. Dann ordnen sich die Stäbchen a so an, dafs sie diesen Kreis sämtlich unter dem unveränderlichen Winkel α treffen und zwar aus Gründen der Kongruenz in ganz derselben Weise. Es mufs also eine Schicht einer Fläche entstehen, die durch Figur 272 des ersten Bandes dargestellt ist, d. h. eines einschaligen Drehungshyperboloids. Demnach wird die begrenzendeSchraubenlinie ganz von selbst in einen Kreis vom Radius $\varrho_1 = \frac{l_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{l}{\sin\gamma} = \frac{\varrho}{\sin\gamma}$ umgebogen, der von den Geraden unter dem Winkel ξ geschnitten wird.

§ 102) [Man kann sich bequem ein Modell dieser hyperbolischen Fläche herstellen. Man nehme zwei kreisförmige Pappscheiben, deren Radien etwas gröfser als ϱ und ϱ_1 sind und bringe sie in solche Lage, dafs sie einen Kegelstumpf darstellen. An den Rändern bringe man zum Durchziehen von Fäden Löcher an, die auf Kreisen von den genauen Radien ϱ und ϱ_1 liegen und zwei regelmäfsige Polyogone von derselben Seitenzahl geben. Durch die Löcher ziehe

man Fäden so, dafs sie den Seiten des Kegelstumpfes entsprechen und jeder die Länge a erhalte. Denkt man sich jetzt die obere Scheibe gegen die andere um die (sich dabei verkleinernde) Achse des Kegels gedreht, so entsteht ein Drehungshyperboloid, d. h. eine Schicht einer in Figur 272 des ersten Bandes veranschaulichten Fläche. Solcher Hyperboloide entstehen unendlich viele, je nach dem Grade der Drehung, und zwar sind alle von einander verschieden (vom Symmetriefalle abgesehen). Bewirkt man, dafs der kleinere Kreis von den Fäden unter dem obigen Winkel α getroffen wird, so hat man das Hyperboloid, auf welches sich der betrachtete Streif der Schraubenfläche vollständig auflegen (abwickeln) läfst, derart also, dafs die ganze Drehungsfläche bedeckt wird. Der kleinste Kreis des Hyperboloids kann aufserhalb der Kreisflächen oder zwischen ihnen liegen. Die Grenzlagen sind für jedes a durch den bezw. durch die beiden möglichen Kegel bestimmt, für die der „Striktionskreis" den Durchmesser Null hat. Je nach der Länge l des abgeschnittenen Teiles der Achse der Schraubenfläche wird der Striktionskreis seine Gröfse und Lage erhalten.]

§ 103) Man kann z. B. untersuchen, wie grofs l genommen werden mufs, damit der kleinere Kreis der kleinste eines entsprechenden Hyperboloids werde. Zu diesem Zwecke

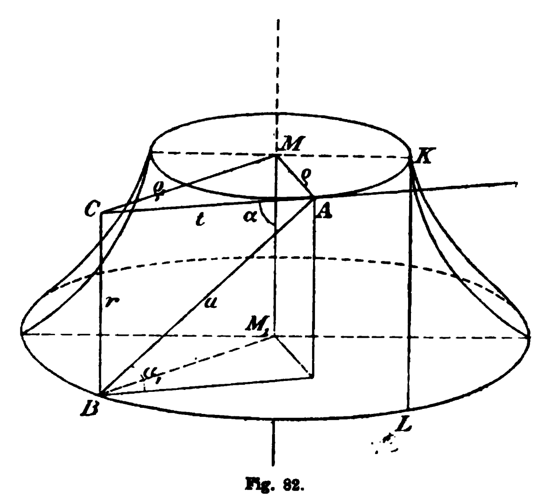


Fig. 82.

gehe man von einem Hyperboloid aus, dessen Striktionskreis einen vorläufig unbestimmten Radius ϱ habe. (Figur 82.) Die zugehörige Gerade a bilde mit der Tangente t überall den Winkel α, dessen Schenkel jetzt in derselben senkrechten Ebene liegen müssen, weil es z. B. bei KL der Fall ist. Man vollende das rechtwinklige Dreieck ABC, welches dem Dreieck ABG der Figur 81 entspricht, so dafs $BC = r = a \sin \alpha$ ist, während $t = a \cos \alpha$ wird. Da auch $t^2 = \varrho_1^2 - \varrho^2$ ist, so wird, wenn ϱ bekannt ist, ϱ_1 durch die Gleichung $\varrho_1^2 = t^2 + \varrho^2$ bestimmt.

Ist die Ganghöhe der zugehörigen Schraubenlinie $h = n 2 \varrho \pi$, wo n irgend ein reeller Faktor ist, so ist die Länge der Schraubenlinie für den vollen Umgang $s = n 2 \varrho_1 \pi$, also der Steigungswinkel γ zu bestimmen aus

$$\sin \gamma = \frac{h}{s} = \frac{n 2 \varrho \pi}{n 2 \varrho_1 \pi} = \frac{\varrho}{\varrho_1},$$

d. h. er stimmt überein mit dem von t und ϱ_1 gebildeten Winkel ACM, für den $\tan \gamma = \frac{\varrho}{t}$ ist. Die Ganghöhe der Schraube ist also

$$h = 2 \pi r \tan \gamma = 2 \pi r \frac{\varrho}{t} = 2 \pi \varrho \frac{r}{t} = 2 \pi \varrho \tan \alpha = l \tan \gamma.$$

Daraus folgt $l = \frac{h}{\tan \alpha}$.

Folglich: Soll der kleinere Kreis der Hyperboloidschicht der Striktionskreis des Hyperboloids werden, so mufs man von der Achse der Schraubenlinie das Stück

$$l = \frac{h}{\tan \alpha}$$

abschneiden, wobei h die Ganghöhe ist.

(Für $\alpha = 45^0$ z. B. mufs $l = h$ sein.)

Dabei handelt es sich um ein Hyperboloid, bei dem der Striktionskreis von den Geraden unter dem Winkel α geschnitten wird. Im allgemeinen Falle ist der Winkel ein anderer, weil ein anderer Kreis unter α geschnitten wird. Daher kommt die Unähnlichkeit der möglichen Hyperboloide.

Das Wichtigste ist der Satz:

Jede Schraubenregelfläche gewöhnlicher Art läfst sich auf gewisse Drehungshyperboloide abwickeln. Man kann es so einrichten, dafs die Achse zur Striktionslinie des entstehenden Hyberboloids wird.

§ 104) Man kann allgemein auch so verfahren, dafs man das abgeschnittene Stück der Achse als Schraubenlinie um einen Cylinder biegt und die Geraden dabei zwingt, Gerade zu bleiben. Dabei entsteht eine allgemeine Schraubenregelfläche, denn die Geraden liegen dann, ähnlich wie beim Hyperboloid, nicht mehr mit der Cylinderachse in derselben Ebene. Also:

Auch die allgemeinsten Schraubenregelflächen lassen sich auf gewisse Drehungshyperboloide abwickeln.

Auch die Umkehrung ist leicht auszusprechen.

§ 105) Von den Folgerungen dieses Satzes seien nur einige besonders wichtige angegeben.

1) Die allgemeinen Schraubenregelflächen, bei denen die erzeugenden Geraden die Cylinderachse kreuzen, sind nicht wesentlich von denen unterschieden, bei denen sie die Achse schneiden, denn sie können in solche durch Biegung übergeführt werden.

2) Bei der Abwickelung einer allgemeinen Schraubenregelfläche auf ein geeignetes Drehungshyperboloid gehen die Schraubenlinien in die Kreisschnitte des letzteren über, die Orthogonalkurven der Schraubenlinien in die Orthogonalkurven der Kreisschnitte, d. h. in die hyperbolischen Hauptschnitte.

3) Die Fläche einer Schicht des Drehungshyperboloids kann mit Hilfe des Guldinschen Flächensatzes berechnet werden, wenn man die Länge des Hyperbelbogens und seinen Schwerpunkt kennt. Folglich kann man unter der entsprechenden Bedingung auch die Fläche des Streifens einer Schraubenregelfäche berechnen. Dabei sind mafsgebend die Länge der entsprechen-

den Orthogonalkurven der Schraubenlinien und der Schwerpunktsabstand der auf obige Art zur Hyperbel gebogenen Orthogonalkurve.

4) Weil das Drehungshyperboloid durch die Kreisschnitte und deren hyperbolische Orthogonalkurven in kleine Quadrate eingeteilt werden kann, so kann man auch die allgemeine Schraubenregelfläche durch ihre Schraubenlinien und deren Orthogonalkurven in kleine Quadrate einteilen.

5) Die Loxodromen des Drehungshyperboloids gehen dabei in Kurven über, welche die Schraubenlinien der Schraubenregelfläche unter konstantem Winkel schneiden. Auch durch diese Loxodromen läfst sich die allgemeine Schraubenregelfläche in kleine Quadrate einteilen.

β) Abwickelbarkeit der allgemeinsten Schraubenflächen auf Drehungsflächen und der dadurch bedingte Zusammenhang mit Guldins Flächenformel.

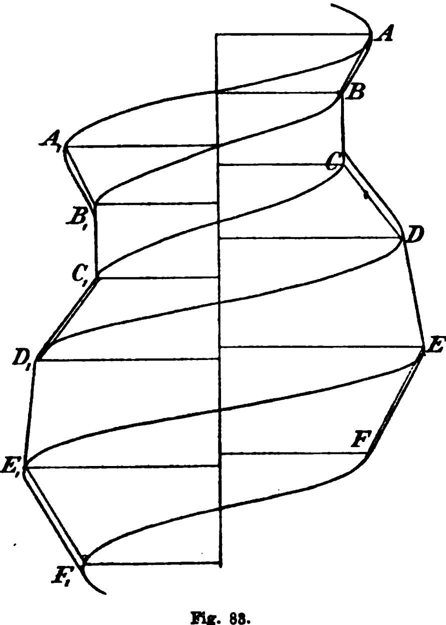


Fig. 83.

§ 106) Aus jedem ebenen oder nicht-ebenen Zuge *ABCDEF*... gerader Linien, aus einer beliebigen Achse *PQ* und einer gegebenen Ganghöhe *U* läfst sich ein durch entsprechende Schraubenlinien bestimmtes Gebilde konstruieren, dessen Seitenflächen Schraubenregelflächen sind. Jedes solche Gebilde ist abwickelbar auf ein Rotationsgebilde,

bei dem die Geraden $AB, BC, DE \ldots$ im allgemeinen Gerade bleiben, während der Hauptschnitt aus Hyperbelbogen entsprechender Art besteht.

Horizontale Gerade sind dabei vorläufig noch auszuschliefsen. Da aber bei beliebigen Kurven etwaige horizontale Teilchen unendlich klein sind, so gilt für den Fall, dafs die obigen Geraden unendlich klein und unendlich zahlreich gedacht werden, der Satz:

§ 107) Jede Schraubenfläche beliebigen Profils ist auf eine bestimmte Drehungsfläche abwickelbar. (Ist das Profil eine geschlossene Kurve, so ist die Fläche z. B. längs einer der Schraubenlinien aufzuschneiden, damit die betreffende Umbiegung ermöglicht werde.)

Dieses Theorem ist von Bour aufgestellt worden und, wie man sieht, der elementaren Lösung zugänglich. Ohne weiteres folgt:

§ 108) Jede Schraubenfläche beliebigen Profils läfst sich durch ihre Schraubenlinien und deren Orthogonalkurven in kleine Quadrate einteilen, ebenso durch zwei Loxodromenscharen, welche die Schraubenlinien unter konstanten Winkeln α und $\beta = 90^0 + \alpha$ durchsetzen.

§ 109) Kennt man den Flächeninhalt der Drehungsfläche (z. B. mit Hilfe der Guldinschen Flächenformel), so kennt man auch den des entsprechenden Streifens der Drehungsfläche.

§ 110) Danach ist im Prinzip die Geometrie der Schraubenflächen auf die von Drehungsflächen zurückgeführt. Der körperliche Inhalt wurde schon vorher in bestimmte Beziehungen zur Guldinschen Inhaltsformel gesetzt, jetzt ist auch der Flächeninhalt zur Guldinschen Flächenformel in eine andere Art von Beziehungen gesetzt. Wichtig ist auch, dafs das Krümmungsmafs der allgemeinen Schraubenfläche $\left(\text{also der Gaufssche Ausdruck } \frac{1}{r\varrho}\right)$ für jede Stelle dasselbe ist, wie bei der durch die Biegung entstandene Drehungsfläche, dafs auch den geodätischen Linien der einen geodätische Linien der anderen entsprechen. Da man z. B. für

jede Stelle des Drehungshyperboloids nach den früheren Auseinandersetzungen die Krümmungsradien ϱ und r der Fläche kennt, so kennt man ihr Produkt auch für jede entsprechende Schraubenregelfläche.

§ 111) In physikalischer Hinsicht sei auch darauf aufmerksam gemacht, dafs die elektrischen stationären Strömungen auf beiden Arten von Flächen einander entsprechen.

Jede Kurve der einen Flächengruppe kann nämlich mit Hilfe quadratischer Einteilungen auf die andere konform übertragen werden. (Ähnlich, wie der Maler irgend ein Originalbild kopiert, indem er dieses in ein von Geraden gebildetes Quadratnetz einteilt und Quadrat für Quadrat nachbildet.)

§ 112) Bemerkungen. Bei solcher Wichtigkeit der Schraubenregelflächen ist eine eingehende Beschäftigung mit ihnen anzuempfehlen. Der Leser versuche z. B. nachzuweisen, dafs bei der gewöhnlichen Schraubenregelfläche die unter gleichen Achsenabständen aufeinander folgenden Geraden in der Projektion auf einen Normalschnitt zur Achse Radien geben, deren Längen in arithmetischer Reihe z. B. in der Reihe $o, p, 2p, 3p, \ldots$ aufeinander folgen, während ihre Richtungen unter gleichen Winkeln aufeinander folgen. Danach giebt der Normalschnitt zur Achse eine Archimedische Spirale. Diese Grundrifszeichnung erleichtert die Anschauung für weitergehende Untersuchungen. Die technische Bedeutung der Schraubenregelflächen trat schon bei den scharfen und den trapezischen Gewinden hervor. Das in diesem Abschnitt gesagte gilt aber auch von Gewinden allgemeinster Art. Ein einfacher Fall ist der des scharfen Gewindes, bei dem die Basis des Dreiecks die Loxodrome eines Cylinders wird, die Seiten des gleichschenkligen Dreiecks dagegen Gerade zweier Hyperboloide geben. Der Hauptschnitt des neuen Gebildes also giebt ein gleichschenkliges „Dreieck“, bei dem die Basis eine Gerade, die Schenkel zwei Hyperbelbogen sind.

Im nachstehenden Abschnitt soll der hier noch ausgeschlossene Fall $\alpha = 90^0$, der auf die sog. Minimalschraubenregelfläche führt, einer eingehenden Behandlung unterworfen werden, die in gewisser Richtung als eine erschöpfende be-

trachtet werden darf, da es gelingt, die konforme Abbildung auf die Ebene durchzuführen und die gesamte Geometrie der Ebene auf diese Schraubenfläche zu übertragen. In ähnlicher Weise würden dann andere Schraubenregelflächen zu behandeln sein. Wie für die übrigen Schraubenregelflächen im allgemeinen das Drehungshyperboloid mafsgebend ist (welches für $\alpha = 0$ in den Cylinder ausartet, für den Fall aber, dafs die Geraden der Fläche Tangenten einer Schraubenlinie sind, zur Ebene wird), so ist für die Minimalfläche, wie sich zeigen wird, ausnahmsweise das Katenoid, d. h. die durch die Rotation einer Kettenlinie um ihre Diretrix entstehende Fläche mafsgebend, die sich dabei ebenfalls einer elementaren Behandlung zugänglich zeigt.

γ) Die Minimalschraubenregelfläche und ihre Abwickelbarkeit auf das Katenoid.

§ 113) Die Konstruktion dieser Fläche und ihr Charakter als Minimalfläche wurde schon früher besprochen. Es handelt sich um den Grenzfall der gewöhnlichen Schraubenregelfläche, bei dem $\alpha = 90^0$ ist. Angenommen, auch diese Minimalfläche wäre auf ein Hyperboloid abwickelbar, so könnte dieses, da die Geraden mit den Grenzkreisen einen Winkel von 90^0 bilden, nur ein Kegelstumpf sein. Dieser aber ist auf die Ebene abwickelbar, also müfste, auch diese Schraubenfläche eine abwickelbare Fläche sein. Da jedoch ihre Geraden einander nicht schneiden, sondern kreuzen, so ist sie nicht abwickelbar, folglich ist auch ihre Abwickelung auf den Kegel unmöglich. Da dieser ferner eine Spitze hat, also einen Striktionskreis von unendlicher Kleinheit besitzt, so liegt auch darin die Unmöglichkeit der fraglichen Abwickelung. Dafs die Achse in einen Kreis umgebogen werden kann, ist selbstverständlich. Würden die Geraden Gerade bleiben können, so würden sie aus Gründen der Kongruenz der einzelnen „Sektoren“ einen Kegelstumpf (gegebenfalls einen seiner Sonderfälle, Cylinder, Kreisring) geben. Da dies unmöglich ist, können die Geraden bei jener Drehung nicht Gerade bleiben. Es liegt also einer der Fälle vor, in denen die Geraden der Schraubenregelfläche zu krummen Linien werden.

§ 114) Die Frage, in welche Kurven sie sich biegen müssen, wenn die Achse in einen Kreis umgebogen wird,

ist mit elementaren Hilfsmitteln nur auf Umwegen lösbar. Einen Einblick in das Problem erhält man aber auf folgendem Wege. Biegt man eine Fläche, so gehen die kürzesten Linien auf ihr wieder in kürzeste Linien über, denn keine Linie ändert dabei ihre Länge. Nun handelt es sich hier um eine Minimalfläche, bei der jeder Punkt der Schraubenlinie durch Gerade, also auf kürzestem Wege, mit der Achse verbunden ist. Diese Linien bleiben bei der Verbiegung kürzeste Linien, folglich mufs die durch Biegung entstehende Fläche eine Minimalfläche zwischen den neuen Grenzen bleiben. Aus Gründen der Kongruenz der Sektoren kann sie eine Drehungsfläche werden. Wie vorher, müssen dabei die Schraubenlinien in Kreise übergehen. Die Orthogonalkurven der ersteren, d. h. die Geraden werden Orthogonalkurven der Kreise. Das Bour'sche Theorem über die

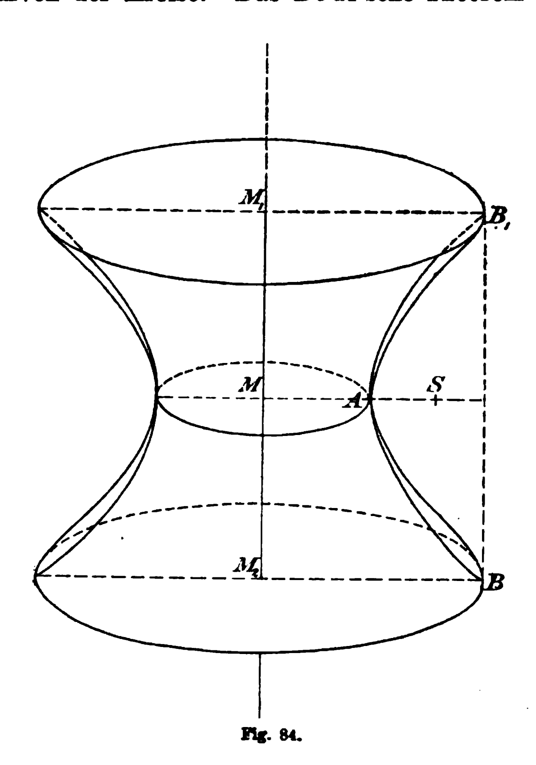


Fig. 84.

Möglichkeit der Abwickelung auf eine gewisse Drehungsfläche gilt also auch hier.

Nimmt man neben der in der Regel dargestellten Minimalschraubenfläche auch noch ihre Fortsetzung über die Achse hinaus so weit, dafs beide Teile gleichwertig sind und verbiegt man z. B. die Achsenlänge $l = h$ in einen Kreis, so mufs dieser der kleinste Kreis (Striktionskreis) der entsprechenden Drehungsfläche werden. (Dies gilt hier von jeder Länge l.) Aus Gründen der Kongruenz der Sektoren entsteht ein gegen die Ebene des Striktionskreises symmetrisches Gebilde. Diese Drehungsfläche mufs die Minimalfläche zwischen den beiden (gröfseren) Grenzkreisen sein.

Bis hierher reicht die reine Elementarmathematik aus.

§ 115) Für die nachstehenden vorläufigen Bemerkungen mögen mechanische Vorstellungsweisen zu Grunde gelegt werden.

Man nehme zwei gleich grosse Drahtkreise M_1 und M_2, die mit Griffen versehen sind. Man lege beide fest aufeinander und tauche sie in Glycerin-Seifenwasser ein. Dann versuche man beide von einander zu entfernen und in die in Figur 84 dargestellte Lage zu bringen. Es wird leicht gelingen, eine Seifenblase zwischen beiden entstehen zu lassen, die im Anfang der Figur 84 entspricht, da infolge des Kontraktionsbestrebens der Flüssigkeit die Fläche eine Minimalfläche werden mufs. (Bei grösserer Entfernung der Kreise reifst plötzlich die Fläche durch und es bleiben getrennte Seifenblasen in der Form zweier Kreisscheiben übrig, weil deren Flächen zusammen schliefslich kleiner werden, als jede zwischen den Drähten mögliche Drehungsfläche.)

§ 116) Eine andere Vorstellung ist folgende. Die Drehungsfläche mufs bei der obigen Biegung eine Minimalfläche werden. Die Länge b der Geraden, die in den Bogen B_1AB_2 übergegangen ist, ist unverändert geblieben. Soll nun die Fläche die obige Minimalfläche werden, so folgt aus der Guldin'schen Flächenformel $M = 2\pi\varrho b$, dafs der Schwerpunktsabstand ϱ des Bogens b ein Minimum werden mufs. Denkt man sich also $M_1 M_2$ horizontal, so fragt es sich, welche unter den Kurven von derselben Länge l die zwischen B_1 und B_2 angebracht werden können, den am tiefsten liegenden Schwerpunkt

hat. Man denke sich also z. B. eine dünne Kette oder einen schweren, sehr biegsamen Faden von der Länge l zwischen B_1 und B_2 aufgehängt. Nach einem Schwerpunktsprinzip der Statik kann die Kette nur dann im Gleichgewicht sein, wenn der Schwerpunkt die überhaupt mögliche tiefste Lage hat.

Bezeichnet man die mit Hilfe jeder Uhrkette leicht zu veranschaulichende Linie als Kettenlinie, ohne sich vorläufig um ihre geometrischen Eigenschaften und ihre Gleichung zu kümmern, so erkennt man, dafs bei jener Biegung der Minimalschraubenfläche in eine Drehungsfläche eine bestimmte Drehungsfläche der Kettenlinie entstehen mufs, die als Katenoid bezeichnet werden soll, ohne dafs jetzt eine weitere geometrische Definition gegeben wird. Es handelt sich vorläufig nur darum, aus den obigen Darlegungen elementar abzuleiten, was aus ihnen gefolgert werden kann.

§ 117) Berechnung des Inhalts der Minimalschraubenfläche. ABB_1A_1 sei eine von zwei Geraden $AB = r$ und $A_1B_1 = r$ begrenztes Stück der betreffenden Schraubenfläche. Das Achsenstück AA_1 soll gleich $\frac{h}{n}$ sein, wo h die Ganghöhe bedeutet. Für die begrenzende Schraubenlinie LB_1B bestimmt sich der Steigungswinkel γ aus

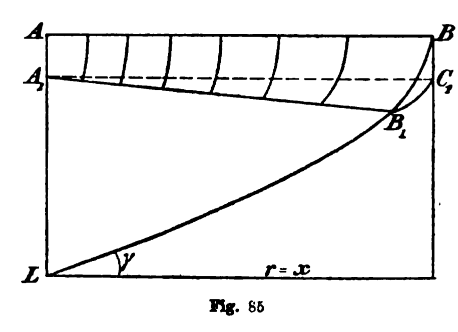


Fig. 85

1) $$\tan\gamma = \frac{h}{2\pi r},$$

die Länge für einen Umgang aus

2) $$s = \sqrt{h^2 + 4\pi r^2} = \frac{h}{\sin\gamma}.$$

Die Radien AB und A_1B_1 sind um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ gegeneinander gedreht, weil $AA_1 = \frac{h}{n}$ ist. Dieser Winkel ist auch durch den Horizontalschnitt $B_1A_1C_1$ dargestellt.

Ist n sehr grofs, so kann man das durch $B_1 C_1 B$ dargestellte Stück der Cylinderfläche dieser Schraubenlinie als ein ebenes rechtwinkliges Dreieck betrachten, dessen Seiten folgende Längen haben:

$$BC_1 = \frac{h}{n},\ B_1 C_1 = \frac{2\pi r}{n},\ B_1 B = \frac{s}{n},\ \text{demnach ist}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)^2 = \left(\frac{h}{n}\right)^2 + \left(\frac{2\pi r}{n}\right)^2.$$

Setzt man $\frac{h}{n} = a$, $r = x$, $\frac{s}{n} = y$, so geht die Gleichung über in

$$y^2 = a^2 + \frac{4\pi^2 x^2}{n^2},$$

oder

3) $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{n}{2\pi}\right)^2} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel. Das für jedes x zu brechnende y giebt die Länge des Stücks der entsprechenden Schraubenlinie der obigen Fläche an. Denkt man sich also sehr viele Schraubenlinien in die Fläche eingetragen, schneidet man die Fläche längs dieser Linien auf und läfst man die unendlich schmalen Streifen senkrecht an AB herabhängen, so bilden diese die Ordinatenstreifen einer Hyperbel. (Dagegen könnte eingewandt werden, die Fläche sei windschief, könnte als nicht auf eine ebene hyperbolisch begrenzte Fläche abgewickelt werden. Es leuchtet aber ein, dafs die Streifen bei unendlich grofser Anzahl und bei sehr kleinem $\frac{h}{n}$ die Gestalt ebener Rechtecke von sehr geringer Breite annehmen. Gerade durch das Einschneiden ist jeder Streif von dem Krümmungszwange befreit worden, der in der Verbindung mit den andern lag. Und gerade die entstehenden kleinen Treppenflächen, die unendlich klein zweiter Ordnung sind und schliefslich auf den Inhalt der entstehenden Fläche keinen Einflufs haben, zeigen die Verschiebungen der Punkte gegeneinander an.)

§ 118) Nach § 33 läfst sich elementar zeigen, dafs das Hyperbelsegment EB_1A_1 die Fläche

$$F_2 = \frac{1}{2} y_1 x_1 - \frac{1}{2} a \frac{h}{2\pi}\, {}^{e}lg \left[\frac{y_1}{a} + \frac{x_1}{\left(\frac{h}{2\pi}\right)} \right]$$

hat, denn $AA_1 = a = \frac{h}{n}$ und $b = \frac{h}{2\pi}$ sind nach Gleichung 3) ihre Halbachsen. Die der Schraubenfläche entsprechende Fläche AA_1B_1B hat demnach den Inhalt $F_1 = x_1 y_1 - F_2$ oder

$$F_1 = \frac{x_1 y_1}{2} + \frac{h^2}{4n\pi}\, {}^{e}lg \left[\frac{y_1}{\left(\frac{h}{n}\right)} + \frac{x_1}{\left(\frac{h}{2\pi}\right)} \right] = \frac{rs}{2n} + \frac{h^2}{4n\pi}\, {}^{e}lg \frac{s + 2\pi r}{h}.$$

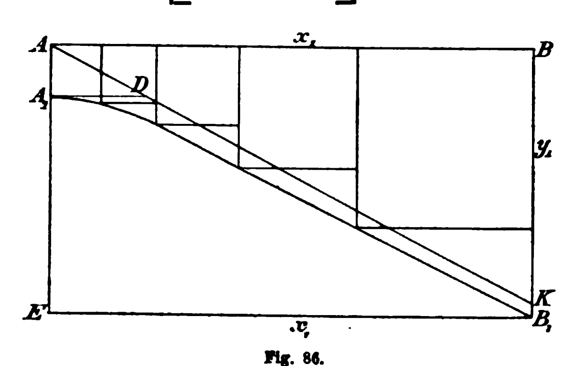


Fig. 86.

Für den vollen Umgang der Schraubenfläche erhält man das n-fache. Die Gesamtfläche F ist also, je nachdem zwei der Gröfsen h, r, γ für die begrenzte Schraubenlinie gegeben sind:

$$4)\quad \begin{cases} F = \frac{r}{2}\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2} + \frac{h^2}{4\pi}\, {}^{e}lg \frac{2\pi r + \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}{h}, \\ F = \pi r^2 \left[\frac{1}{\cos\gamma} + \tan^2\gamma\, {}^{e}lg \frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma} \right] = \pi r^2 \left[\frac{1}{\cos\gamma} + \frac{\tan^2\gamma}{2}\, {}^{e}lg \frac{1+\cos\gamma}{1-\cos\gamma} \right], \\ F = \frac{h^2}{2\pi} \left[\frac{1}{\tan\gamma \sin\gamma} + \frac{1}{2}\, {}^{e}lg \frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma} \right] = \frac{h^2}{2\pi} \left[\frac{1}{\tan\gamma \sin\gamma} + \frac{1}{4}\, {}^{e}lg \frac{1+\cos\gamma}{1-\cos\gamma} \right]. \end{cases}$$

Reicht der Streif der Schraubenfläche nicht von $r = 0$ bis $r = x$, sondern von einem beliebigen r_1 bis zu einem beliebigen r_2, so bilde man aus 4) die Formeln für F_1 und F_2. Durch Subtraktion zusammengehöriger findet man dann $F = F_2 - F_1$.

§ 110) Berechnung der Fläche des zugehörigen Katenoids. Man denke sich die Schraubenfläche über die Achse hinaus dadurch erweitert, daſs jedes r um sich selbst verlängert wird. Durch die obige Verbiegung entsteht dann ein Katenoid, dessen Kettenlinie DEF die Länge $l = 2r$ hat. Die Achse PQ hat eine noch unbekannte Länge, aber der Striktionsradius ϱ ist durch

$$\varrho = \frac{h}{2\pi} = r \tan \gamma$$

gegeben, wenn die Ganghöhe h zum Kreise umgebogen wurde. Ebenso ist

Fig. 87.

$$\varrho_1 = \frac{s}{2\pi} = \frac{h}{2\pi \sin \gamma} = \frac{r}{\cos \gamma}.$$

Man beachte, daſs $\frac{\varrho}{\varrho_1} = \sin \gamma$, $\varrho_1^2 - \varrho^2 = r^2 \left[\frac{1}{\cos^2 \gamma} - \tan^2 \gamma\right]$ $= r^2 \frac{1 - \sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma} = r^2$ ist. PQ werde als die Direktrix der Kettenlinie bezeichnet. Nach obigem ist, wenn z. B. die Länge r und eine der Gröſsen $\gamma, h, \varrho, \varrho_1, s$ gegeben ist, die Mantelfläche leicht aus einer der Formeln 4) abzuleiten, nur ist dabei $2F$ zu Grunde zu legen.

Statt dessen wird in der Regel anderes gegeben sein, z. B. die Länge $l = 2r$ der symmetrischen Kettenlinie und die Pfeilhöhe $EG = g$. Dabei ist nach obigem

$$g = \varrho_1 - \varrho = r\left[\frac{1}{\cos\gamma} - \tan\gamma\right] = r\,\frac{1-\sin\gamma}{\cos\gamma}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach $\sin\gamma$ kann z. B. folgendermafsen erfolgen. Man hat

$$g^2 = r^2\frac{(1-\sin\gamma)^2}{1-\sin^2\gamma} = r^2\cdot\frac{(1-\sin\gamma)^2}{(1+\sin\gamma)(1-\sin\gamma)} = r^2\cdot\frac{1-\sin\gamma}{1+\sin\gamma}.$$

Die Auflösung giebt

5) $$\sin\gamma = \frac{r^2-g^2}{r^2+g^2},$$

ferner

6) $$\cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} = \frac{2gr}{r^2+g^2}$$

7) $$\tan\gamma = \frac{r^2-g^2}{2gr}.$$

Man merke noch, dafs nach 7)

$$\varrho = r\tan\gamma = \frac{r^2-g^2}{2g},$$

also $r^2 = g(2\varrho+g) = (\varrho_1-\varrho)(\varrho_1+\varrho) = \varrho_1^2-\varrho^2$ ist.

Die entsprechenden Gröfsen sind in die Formeln 4) einzusetzen, z. B. in die nur r und γ enthaltende,

$$M = 2F = 2\pi r^2\left[\frac{1}{\cos\gamma} + \tan^2\gamma\, lg\,\frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma}\right].$$

Dies giebt die Mantelfläche

$$M = 2\pi r^2\left[\frac{r^2+g^2}{2gr} + \left(\frac{r^2-g^2}{2gr}\right)^2 lg\,\frac{1+\frac{2gr}{r^2+g^2}}{\frac{r^2-g^2}{r^2+g^2}}\right].$$

Da der zu logarithmierende Ausdruck sich in

$$\frac{(r+g)^2}{r^2-g^2} \text{ oder } \frac{(r+g)^2}{(r+g)(r-g)} = \frac{r+g}{r-g}$$

umwandelt, so folgt schliefslich

8) $$M = \frac{\pi r}{g}\left[r^2+g^2+\frac{(r^2-g^2)^2}{2gr}\,lg\,\frac{r+g}{r-g}\right].$$

Dies ist die Mantelfläche eines Katenoids, dessen symmetrische Kettenlinie von der Länge $l = 2r$ ist und die Pfeilhöhe g besitzt, während die Drehungsachse vom Scheitelpunkte die Entfernung $\varrho = \frac{r^2 - g^2}{2g}$ hat. In Kartesischen Koordinaten soll sie unten abgeleitet werden.

§ 120) Die Schwerpunktsentfernung e dieser Kettenlinie von der Achse PQ ergiebt sich nach der Guldinschen Mantelformel $M = 2\pi e_s s = 4\pi e_s r$ als

9) $$e_s = \frac{M}{4\pi r} = \frac{1}{4g}\left[r^2 + g^2 + \frac{(r^2 - g^2)^2}{2gr} {}^e lg \frac{r+g}{r-g}\right].$$

Der Abstand e_1 des Schwerpunktes vom Scheitel ist

10) $$e_1 = e_s - \varrho = e_s - \frac{r^2 - g^2}{2g} = e_s - \frac{2(r^2 - g^2)}{4g}$$
$$= \frac{1}{4g}\left[3g^2 - r^2 + \frac{(r^2 - g^2)^2}{2gr} {}^e lg \frac{r+g}{r-g}\right].$$

Zwischen D und F sind viele Kettenlinien möglich, aber für diese ist im allgemeinen PQ nicht die Direktrix, d. h. die Umdrehung um PQ giebt nicht die Minimalfläche zwischen den beiden Kreisen ϱ_1.

Kennt man von der Kettenlinie r und g, so findet man den Abstand der Direktrix durch $\varrho = \frac{r^2 - g^2}{2g}$, also konstruiert sie sich z. B. mittels der Proportion

$$\varrho : (r + g) = (r - g) : 2g \text{ oder } \varrho : \sqrt{r^2 - g^2} = \sqrt{r^2 - g^2} : 2g.$$

Sind dagegen ϱ und g, oder was dasselbe ist ϱ und ϱ_1 gegeben, so findet man die Länge $r = \sqrt{\varrho_1^2 - \varrho^2}$ der fraglichen Kettenlinie EF, welche jene Minimalfläche giebt, mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks PFH. Aufserdem mufs aber der Abstand $MP = MQ$ berechnet werden, was unten geschehen soll, denn aus ϱ_0 und ϱ_1 allein lassen sich unendlich viele Kettenlinien (für die verschiedenen Abstände PM) bilden, für welche PM nicht die Direktrix ist

Ist jedoch die Kettenlinie **nebst ihrer Direktrix** gezeichnet, d. h. fertig gegeben, so ist ihre **Rektifikation** mit Hilfe des Dreiecks PFH leicht zu erledigen.

§ 121) Die Tangente für einen beliebigen Punkt F der Kettenlinie ist leicht zu konstruieren. Der Winkel $PFH = \gamma$, für den $\sin\gamma = \frac{\varrho}{\varrho_1}$ ist, der also gleich dem Steigungswinkel der begrenzenden Schraubenlinie der Minimalschraubenfläche war, ist nur nach der anderen Seite von PF anzulegen, um die Tangente $FL = t$ zu geben.

Der Beweis kann folgendermaſsen geführt werden. Denkt man sich die Kettenlinie $\widehat{EF} = r$ in n gleiche Bogen $b = \frac{r}{n}$ eingeteilt, so läſst sich der Abstand jedes z. B. des m^{ten} Teilpunktes von PQ, mit Hilfe der Formel $\varrho_m = \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2(mb)^2}}{2\pi}$ (nach der betreffenden Schraubenlinienformel) leicht berechnen. Für den letzten Abstand PF, der jetzt ϱ_n heiſsen soll, findet man also $\varrho_n = \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2(nb)^2}}{2\pi}$ für den vorletzten $\varrho_{n-1} = \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2(n-1)^2 b^2}}{2\pi}$, es wird also

$$\varrho_n^2 - \varrho_{n-1}^2 = \frac{h^2 + 4\pi^2 n^2 b^2}{4\pi^2} - \frac{h^2 + 4\pi^2(n-1)^2 b^2}{4\pi^2} = (2n-1)b^2.$$

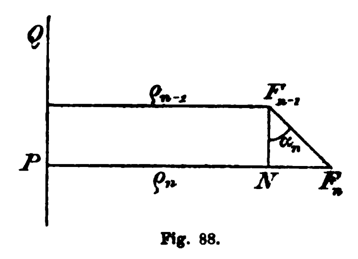


Fig. 88.

Für unendlich groſses n wird

$$b = \frac{r}{n}$$

geradlinig. Der Winkel α_n, den b mit F_nN oder PQ bildet, bestimmt sich demnach mittels

$$\sin\alpha_n = \frac{NF_n}{F_nF_{n-1}}$$

oder

$$\sin \alpha_n = \frac{\varrho_n - \varrho_{n-1}}{b} = \frac{(\varrho_n - \varrho_{n-1})(\varrho_n + \varrho_{n-1})}{b(\varrho_n + \varrho_{n-1})} = \frac{\varrho_n^2 - \varrho_{n-1}^2}{b(\varrho_n - \varrho_{n-1})}$$

$$= \frac{(2n-1)b^2}{b(\varrho_n + \varrho_{n-1})} = \frac{(2n-1)b}{\varrho_n + \varrho_{n-1}} = \frac{(2n-1)\frac{r}{n}}{\varrho_n + \varrho_{n-1}} = \frac{2r - \frac{r}{n}}{\varrho_n + \varrho_{n-1}}.$$

Für $n = \infty$ wird aber $\frac{r}{n} = 0$ und $\varrho_{n-1} = \varrho_n$, also wird $\sin \alpha_n = \frac{2\,r}{2\,\varrho_n} = \frac{r}{\varrho_n}$. Nun ist aber nach Dreieck FHP auch $\cos y = \frac{r}{\varrho_n}$, folglich ist $\alpha_n = 90^0 - \gamma$, in Figur 87 also die Tangente FL symmetrisch (gegen PF) zu FH, und aufserdem ist, wenn man $PH = ME$ jetzt mit ϱ_0 bezeichnet,

$$\tan \alpha_n = \frac{r}{\varrho_0} = \frac{\sqrt{\varrho_n^2 - \varrho_0^2}}{\varrho_0},$$

die Tangente also leicht zu konstruieren.

§ 122) **Übereinstimmung mit der Kettenlinie der Analysis.** Man nehme die Einheit gleich ϱ_0, so dafs $\tan \alpha_n = \sqrt{\varrho_n^2 - 1}$ wird. Ferner mache man im Sinne der analytischen Geometrie QP zur X-Achse, M zum Anfangspunkte der Koordinaten, MG zur Y-Achse, man denke sich also die Figur um 90^0 gedreht. Setzt man noch $\varrho_n = y$, so hat man die Gleichungen

$$1) \qquad \tan \alpha_n = \sqrt{y^2 - 1}, \quad \tan \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

Diese Gleichungen reichen hin, nachzuweisen, dafs die hier gefundene Kettenlinie identisch ist mit der in der analytischen Geometrie bezw. analytischen Mechanik durch eine der Gleichungen

$$2) \; y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x = {}^e lg(y + \sqrt{y^2 - 1}), \quad e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

definierten. (Die letztere kann nach der ersten dieser

Gleichungen dadurch konstruiert werden, dafs man zu den Ordinaten der beiden logarithmischen Linien $y = e^{x}$ und $y = e^{-x}$ das arithmetische Mittel sucht, d. h. an jeder Stelle D die Gerade $D_1 D_2$ halbiert.)

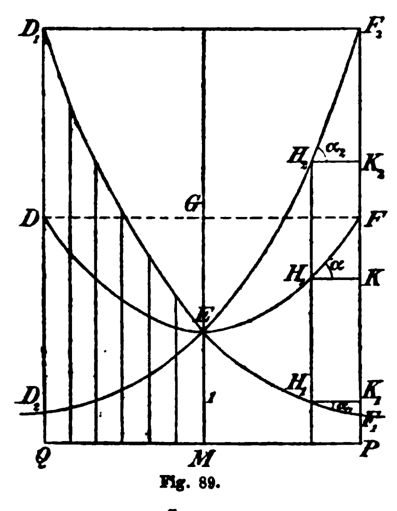


Fig. 89.

Für die Kurve $y = e^{x}$ läfst sich nämlich elementar nachweisen,*) dafs die Subtangente überall gleich 1 ist, die Tangente also mit der X-Achse einen Winkel α_1 einschliefst, der durch

$$\tan \alpha_1 = \frac{e^{x}}{1} = e^{x}$$

bestimmt wird. Bei der Kurve $y = e^{-x}$, die symmetrisch zu jener (gegen die X-Achse) ist, ergiebt sich ebenso

$$\tan \alpha_2 = -e^{-x}.$$

Vergleicht man in Figur 89 die kleinen Dreiecke HFK, $H_1F_1K_1$, HF_2K_2, so ergiebt sich leicht, dafs, weil PK das arithmetische Mittel zu PK_1 und PK_2 ist,

$$FK = \frac{F_1K_1 + F_2K_2}{2}$$

ist, also dort

$$3) \qquad \tan \alpha = \frac{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2}{2} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

ist. Ersetzt man hier nach der letzten der Gleichungen 2) e^{x} durch $y + \sqrt{y^2 - 1}$, so wird hier

*) Vergl. z. B. die Ingenieur-Mathematik des Verfassers, Band I Seite 150.

$$\tan\alpha = \frac{1}{2}\left[y + \sqrt{y^2 - 1} - \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[y + \sqrt{y^2 - 1} - \frac{y - \sqrt{y^2 - 1}}{(y + \sqrt{y^2 - 1})(y - \sqrt{y^2 - 1})}\right],$$

oder, da der Nenner des Bruches in $y^2 - (\sqrt{y^2 - 1})^2 = 1$ übergeht,

4) $$\tan\alpha = \sqrt{y^2 - 1}.$$

Dies stimmt aber zur Gleichung 1), für gleiche y haben also beide Kurven gleichgerichtete Tangenten. Daraus folgt ohne weiteres, daſs, wenn zwei benachbarte Ordinaten y_n und y_{n-1} der einen Kurve mit solchen der anderen übereinstimmen, auch deren Abstände übereinstimmen müssen, denn die Dreiecke $F_n K_n F_{n-1}$ sind für beide Kurven kongruent, weil sie in allen Winkeln und in der Seite $K_n F_n$ übereinstimmen. Folglich decken sich beide Kurvenflächen Streifen für Streifen und damit ist die Kongruenz nachgewiesen. So fallen insbesondere die Geraden ME für beide aufeinander. Die Gleichungen 2) dürfen von jetzt ab für die weiteren Untersuchungen benutzt werden.*)

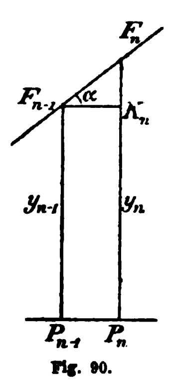


Fig. 90.

Um zur ursprünglichen Kurve zurückzukehren, setze man wiederum $EM = \varrho_0$, d. h. man miſst EM mit einer anderen Einheit, der $\frac{1}{\varrho_0}$-fachen, so daſs y sich als $y' = \varrho_0 y$, x als $x' = \varrho_0 x$ abmiſst. Die Gleichungen 2) gehen dadurch über in

---

*) Analytisch ist der Nachweis der Übereinstimmung natürlich kürzer zu führen. Aus Gleichung 1) folgt unmittelbar $\frac{dy}{dx} = \tan\alpha = \sqrt{y^2 - 1}$, $dx = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}}$, durch Integration also $x = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = {}^e lg\,(y + \sqrt{y^2 - 1})$, oder $e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$, also $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Differentiale und Integrale sollen aber hier ausgeschlossen bleiben.

$$\frac{y'}{\varrho} = \frac{e^{\frac{x'}{\varrho_0}} + e^{-\frac{x'}{\varrho_0}}}{2},$$

$$\frac{x'}{\varrho_0} = lg\left(\frac{y'}{\varrho_0} + \sqrt{\left(\frac{y'}{\varrho_0}\right)^2 - 1}\right),\ e^{\frac{x'}{\varrho}} = \frac{y'}{\varrho_0} + \sqrt{\left(\frac{y'}{\varrho_0}\right)^2 - 1},$$

oder, wenn man die Marken an den y und x wegläfst, ebenso an ϱ, in

5) $$y = \varrho \frac{e^{\frac{x}{\varrho}} + e^{-\frac{x}{\varrho}}}{2},$$

$$x = \varrho lg \frac{y + \sqrt{y^2 - \varrho^2}}{\varrho},\ e^{\frac{x}{\varrho}} = \frac{y + \sqrt{y^2 - \varrho^2}}{\varrho}.$$

Jetzt ist also die Gröfse PF durch dieses y, die Gröfse MP durch dieses x gegeben, und mit letzterem der oben unberücksichtigt gebliebenen Abstand MP für das Katenoid als Minimalfläche bestimmt.

§ 123) Flächenbestimmung für die Kettenlinie. In der „Ingenieurmathematik" findet man an der angegebenen Stelle den elementaren Nachweis, dafs für die Kurve $y = e^x$ die zwischen M und $P\,(MP = x)$ liegende Fläche MPF_1E durch

$$\alpha)\ \overset{x}{\underset{0}{F}} = e^x - 1,$$

die von $x = -\infty$ bis M reichende durch $\overset{0}{\underset{-\infty}{F}} = 1$, also die von $-\infty$ bis x reichende durch $\overset{x}{\underset{\infty}{F}} = (e^x - 1) + 1 = e^x$ gegeben ist.

Daraus folgt $\overset{-x}{\underset{-\infty}{F}} = e^{-x}$, und demnach ist

$$\beta)\ \overset{0}{\underset{-x}{F}} = 1 - e^{-x}.$$

Für die symmetrische Kurve $y = e^{-x}$ ist die zur vorigen kongruente Fläche $\overset{x}{\underset{0}{F}}$ ebenfalls durch den Ausdruck $1 - e^x$ gegeben.

Da endlich die entsprechende Fläche der Kettenlinie mit dem „Parameter" $ME = 1$ nach der obigen Konstruktion das arithemetische Mittel zwischen den berechneten Flächen der beiden logarithmischen Linien ist, so folgt für sie

$$6)\qquad \overset{x}{\underset{0}{F}} = \frac{(e^{x} - 1) + (1 - e^{-x})}{2} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[y + \sqrt{y^2 - 1} - \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}}\right] = \sqrt{y_2 - 1} = \tan \alpha_x,$$

wo unter α_x der zur Abscisse x gehörige Neigungswinkel der Tangente zu verstehen ist. (Die Umformung der eckigen Klammer war schon oben durchgeführt.)

Schreibt man, um auf die Kettenlinie mit dem Parameter $ME = \varrho$ zu kommen, in den obigen Gleichungen statt x und y überall $\frac{x}{\varrho}$ und $\frac{y}{\varrho}$ so giebt Gleichung 6) die $\frac{1}{\varrho^2}$-fache Fläche. Will man also die richtige erhalten, so hat man noch mit ϱ^2 zu multiplizieren. Dies giebt die Gleichung

$$7)\qquad \overset{x}{\underset{0}{F}} = \varrho^2 \frac{e^{\frac{x}{\varrho}} - e^{-\frac{x}{\varrho}}}{2} = \varrho^2 \sqrt{\frac{y^2}{\varrho^2} - 1} = \varrho\sqrt{y^2 - \varrho^2}$$

$$= \varrho r = \varrho^2 \tan^2 \alpha_x.$$

Demnach ist die Fläche *MEFP* der Kettenlinie doppelt so grofs, als die des Dreiecks *PFH*, oder gleich dem Rechteck aus ϱ und r.

§ 124) **Inhalt des Katenoidkörpers.** Auf Seite 152 des ersten Bandes der „Ingenieurmathematik" ist auf elementarem Wege gezeigt, dafs das statische Moment der Fläche F_1 oder $\overset{x}{\underset{0}{F}}$ der logarithmischen Linie $y = e^{x}$ in Bezug auf die X-Achse von der Gröfse

$$\overset{x}{\underset{0}{M_1}} = \frac{1}{4}(e^{2x} - 1) = \frac{1}{4}(e^{x} + 1)(e^{x} - 1)$$

ist. Unabhängig von der Guldin'schen Regel ergab sich

daher der Schwerpunktsabstand dieser Fläche von der X-Achse als

$$y_{s_1} = \frac{M_1}{F_1} = \frac{\frac{1}{4}(e^x + 1)(e^x - 1)}{e^x - 1} = \frac{1}{4}(e^x + 1).$$

Für die Kurve $y = e^{-x}$ wird die entsprechende Fläche $F_2 = 1 - e^{-x}$, das entsprechende statische Moment wird $M_2 = \frac{1}{4}(1 - e^{-2x}) = \frac{1}{4}(1 - e^{-x})(1 + e^{-x})$, also der Schwerpunktsabstand

$$y_{s_2} = \frac{M_2}{F_2} = \frac{1}{4}\frac{(1 + e^{-x})(1 - e^{-x})}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{4}(1 + e^{-x}).$$

Weil nun der Schwerpunktsabstand jedes Streifens der Fläche der Kettenlinie das arithmetische Mittel von den Schwerpunktsabständen für die entsprechenden Streifen der Flächen der beiden logarithmischen Linien ist, so ist auch der Schwerpunktsabstand der Fläche der Kettenlinie das arithmetishe Mittel von den Schwerpunktabständen der beiden anderen Kurvenflächen, d. h., es ist

$$1)\quad y_s = \frac{y_{s_1} + y_{s_2}}{2} = \frac{\frac{1}{4}(1 + e^x) + \frac{1}{4}(1 + e^{-x})}{2}$$

$$= \frac{e^x + e^{-x} + 2}{8} = \frac{2y + 2}{8} = \frac{y + 1}{4}.$$

Das statische Moment ihrer Fläche

$$\overset{x}{\underset{0}{F}} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sqrt{y^2 - 1}$$

in Bezug auf die X Achse ist also

$$2)\quad M_x = y_s \overset{x}{\underset{0}{F}} = \frac{e^x + e^{-x} + 2}{8} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{y + 1}{4} \cdot \sqrt{y^2 - 1}.$$

Der körperliche Inhalt des Katenoids ist demnach:

$$3)\quad J = 2\pi M = \frac{\pi}{8}(e^{x} + e^{-x} + 2)(e^{x} - e^{-x}) = \frac{\pi}{2}(y+1)\sqrt{y^2 - 1}.$$

Nimmt man die symmetrische Hälfte des Körpers dazu, so erhält man das Doppelte. Dies alles gilt für den Parameter $ME = 1$.

Das statische Moment M_y der Fläche $\overset{x}{\underset{0}{F}}$ in Bezug auf die Y-Achse ergiebt sich in ähnlicher Weise. Für die Fläche der Kettenlinie $y = e^{x}$ handelt es sich um $M'_y = e^{x}(x - 1) + 1 = xe^{x} - e^{x} + 1$. (Elementare Entwickelung in Ingenieur-Mathematik, Band I, Seite 151.) Für $y = e^{-x}$ folgt nach derselben Methode $M''_y = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$, also wird das arithmetische Mittel für die Kettenlinie

$$M_y = \frac{(xe^{x} - e^{x} + 1) + (-xe^{-x} - e^{-x} + 1)}{2}$$

$$= \frac{x(e^{x} - e^{-x}) - (e^{x} + e^{-x}) + 2}{2}$$

Daraus folgt als Schwerpunktsabstand der Fläche

$$x_s = \frac{M_y}{F} = \frac{x(e^{x} - e^{-x}) - (e^{x} + e^{-x}) + 2}{e^{x} - e^{-x}}.$$

Der durch Drehung um die Y-Achse entstehende Körper hat also den Inhalt

$$2\pi M_y = 2\pi x_s F = \frac{x(e^{x} - e^{-x}) - (e^{x} + e^{-x}) + 2}{2}$$

Wie sich später zeigen wird, ist mit x_s auch der Schwerpunktsabstand x_s der Kurve gefunden, so dafs auch die neue Mantelfläche bestimmt ist.

Für die Kettenlinie mit Parameter $ME = \varrho$ erhält man der Reihe nach

1*) $$y_s = \varrho \frac{e^{\frac{x}{\varrho}} + e^{\frac{-x}{\varrho}} + 2}{8} = \varrho \frac{\frac{2y}{\varrho} + 2}{8} = \frac{y+\varrho}{4} = \frac{\varrho_1 + \varrho_0}{4},$$

2*) $$M = y_s F = \varrho \frac{e^{\frac{x}{\varrho}} + e^{\frac{-x}{\varrho}} + 2}{8} \cdot \varrho^2 \frac{e^{\frac{x}{\varrho}} - e^{\frac{-x}{\varrho}}}{2} = \frac{y+\varrho}{4} \cdot \sqrt{y^2 - \varrho^2}.$$

3*) $$J = 2\pi M = \frac{\pi\varrho^3}{8}\left(e^{\frac{x}{\varrho}} + e^{\frac{-x}{\varrho}} + 2\right)\left(e^{\frac{x}{\varrho}} - e^{\frac{-x}{\varrho}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\varrho(y+\varrho))\sqrt{y^2+\varrho^2} = \frac{\pi}{2}\varrho_0(\varrho_1+\varrho_0)r.$$

Rotiert schliefslich die symmetrische Fläche (Figur 87 $PFEDQ$) um die Achse PQ, so entsteht ein Körper von doppeltem Inhalte,

4*) $$J' = \pi\varrho(y+\varrho)\sqrt{y^2-\varrho^2} = \pi\varrho_0(\varrho_1+\varrho_0)r = 2\pi\frac{\varrho_1+\varrho_0}{2}\varrho_0 r,$$

Der Inhalt ist also gleich dem eines Hohl-Cylinders, der durch eine Drehung des Rechteks aus $FH = r$ und $PH = \varrho$ um eine Achse entsteht, die von seinem Schwerpunkte die Entfernung $\frac{\varrho_1+\varrho_0}{2}$ hat und zu einer der Rechtecksseiten parallel ist.

§ 125) Die Mantelfläche des symmetrischen Katenoids $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (mit Parameter $\varrho = 1$) in Kartesischen Koordinaten. Ist in Figur 87 $\varrho = 1$, $\varrho = y$, so ist $EG = g = y - 1$, und $r = \sqrt{\varrho_1^2 - \varrho^2} = \sqrt{y^2 - 1}$. Daraus folgt $r^2 - g^2 = 2(y-1)$, $r^2 + g^2 = 2y(y-1)$. Endlich folgt $\frac{r+g}{r-g} = \frac{\sqrt{y^2-1}+(y-1)}{\sqrt{y^2-1}-(y-1)} = \frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y-1}} \cdot \frac{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}}$

$$= \frac{(\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1})^2}{(\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1})(\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1})} = y + \sqrt{y^2-1}.$$

Dies ist einzusetzen in die in § 119 abgeleitete Mantelgleichung

$$M = \frac{\pi r}{g}\left[r^2 + g^2 + \frac{(r^2 - g^2)^2}{2gr}\, {}^e lg \frac{r+g}{r-g}\right].$$

Man erhält

$$M = \frac{\pi\sqrt{y^2-1}}{y-1}\left[2y(y-1) + \frac{4(y-1)^2}{2(y-1)\sqrt{y^2-1}}\, {}^e lg(y+\sqrt{y^2-1})\right]$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}\left[y(y-1) + \sqrt{\frac{y-1}{y+1}}\, {}^e lg(y+\sqrt{y^2-1})\right]$$

oder endlich

1) $$M = 2\pi\left[y\sqrt{y^2-1} + {}^e lg(y+\sqrt{y^2-1})\right].$$

Will man mittels der Gleichung $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ oder $e^x = y + \sqrt{y^2-1}$, oder $x = lg(y+\sqrt{y^2-1})$, oder $\sqrt{y^2-1} = e^x - y = e^x - \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ durch x ausdrücken, so erhält man

$$M = 2\pi\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} + x\right]$$

oder

2) $$M = 2\pi\left[\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4} + x\right] = \frac{\pi}{2}\left[e^{2x} - e^{-2x} + 4x\right].$$

Die Länge der Kettenlinie ist dabei

$$l = 2r = 2\sqrt{y^2-1} = e^x - e^{-x},$$

ihr Schwerpunktsabstand von der X-Achse

$$= \frac{M}{2\pi l} = \frac{M}{2\pi . 2r} = \frac{1}{2\sqrt{y^2-1}}\left[y\sqrt{y^2-1} + {}^e lg(y+\sqrt{y^2-1})\right]$$

$$= \frac{1}{4\left(e^x - e^{-x}\right)}\left[e^{2x} - e^{-2x} + 4x\right].$$

In entsprechender Weise erhält man die Formeln für die Kettenlinie mit dem Parameter ϱ, wobei $g = y - \varrho$, $r = \sqrt{y^2 - \varrho^2}$ in die ursprüngliche Formel einzusetzen sind.

Man erhält

$$1^*)\quad M = 2\pi \left[y\sqrt{y^2 - \varrho^2} + \varrho^2\, {}^e lg\, \frac{y + \sqrt{y^2 - \varrho^2}}{\varrho} \right]$$

oder

$$2^*)\quad M = 2\pi\varrho^2 \left[\frac{e^{\frac{2x}{\varrho}} - e^{\frac{-2x}{\varrho}}}{4} + \frac{x}{\varrho} \right] = \frac{\pi\varrho^2}{2} \left[e^{\frac{2x}{\varrho}} - e^{\frac{-2x}{\varrho}} + \frac{4x}{\varrho} \right],$$

aufserdem

$$l = \varrho\left(e^{\frac{x}{\varrho}} - e^{\frac{-x}{\varrho}}\right),\ y_s = \frac{\varrho}{4\left(e^{\frac{x}{\varrho}} - e^{\frac{-x}{\varrho}}\right)} \left[e^{\frac{2x}{\varrho}} - e^{\frac{-2x}{\varrho}} + \frac{4x}{\varrho} \right].$$

δ) Die konforme Abbildung des Katenoids auf Parallelstreif und Ebene und die Geometrie auf der Katenoidfläche.

§ 126) **Eine wichtige Eigenschaft der Kettenlinie.** In folgendem kommt eine Eigenschaft der Kettenlinie zur Anwendung, die sich elnmentar beweisen läfst. Man denke sich auf der Direktrix z. B. von M aus gleiche Teile $MA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 \ldots = a$ abgeschnitten, die sehr klein

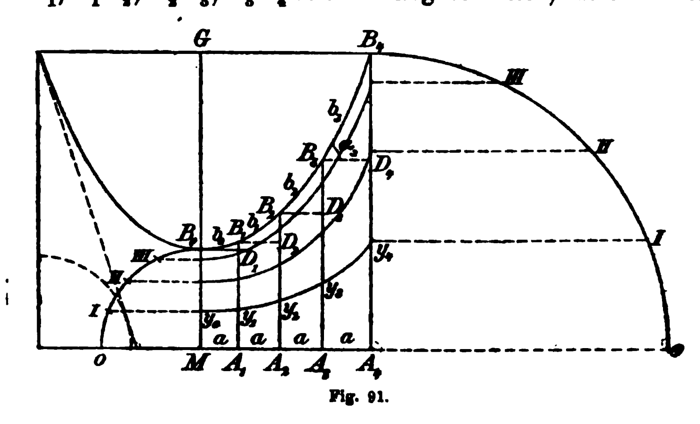


Fig. 91.

sein sollen. Durch die entsprechenden Lote erhält man oben die kleinen Bogen $B_0B_1 = b_1$, $B_1B_2 = b_2$, $B_2B_3 = b_3$ u. s. w., die mit den zugehörigen Horizontalen Winkel $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ bilden. Dabei ist nach den obigen Untersuchungen $\cos\alpha_m = \frac{\varrho_0}{y_m}$, also z. B. $b_m \cos\alpha_m = a$ und auch $b_n \cos\alpha_n = a$, also $b_m \cos\alpha_m = b_n \cos\alpha_n$. Demnach ist bei dieser Art der Einteilung

$$\frac{b_m}{b_n} = \frac{\cos\alpha_n}{\cos\alpha_m} = \frac{\left(\frac{\varrho_0}{y_n}\right)}{\left(\frac{\varrho_0}{y_m}\right)} = \frac{y_m}{y_n},$$

d. h.: **Folgen die Ordinaten der Kettenlinie in gleichen aber sehr kleinen Abständen aufeinander, so verhalten sich die abgeschnittenen Bogen wie die zugehörigen Ordinaten** (von der Direktrix aus gemessen).

§ 127) Kennt man also zwei benachbarte Ordinaten, z. B. y_0 und y_1 im Abstande a von einander, so kann man beliebig viele Punkte der Kettenlinie konstruieren. Zunächst ist das Trapez $MA_1B_1B_0$, also das zu y_0 gehörige $b_0 = B_0B_1$

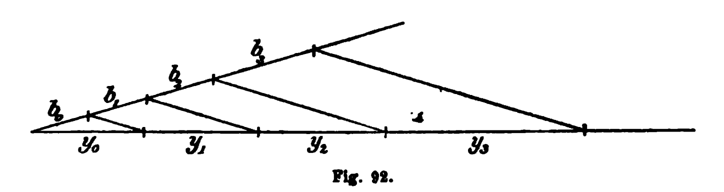


Fig. 92.

bekannt. Man bestimme b_1 mittels der Proportion $y_0 : y_1 = b_0 : b_1$, schlage um B_1 mit b_1 einen Kreis, der, wenn $y_1 > y_0$ war, das im Abstande $a = A_1A_2$ errichtete Lot im oberen Punkte B_2 schneidet, so daſs $y_2 = A_2B_2$ bekannt ist. Man bestimme jetzt b_2 mit Hilfe der Proportion $y_1 : y_2 = b_1 : b_2$ und finde ebenso, wie vorher y_3 u. s. w. Alles läſst sich in einer Zeichnung vereinigen. Die oberen Endpunkte der Lote liegen dann annähernd in einer Kettenlinie. Man hat damit eine brauchbare Annäherungskonstruktion gefunden. (Fig. 92.)

(Im Anschlufs an Figur 93 erkennt man, dafs die Quadrate mit diesen Seiten $b_0, b_1, b_2, \ldots$, längs einer Geraden aneinander gereiht mit derselben Annäherung ihre Eckpunkte in einer Hyperbel haben. Diese Zeichnung ist leicht auszuführen, schwieriger aber die allgemeine Berechnung der Länge Mk für $n = \infty$. Diese ist aber durch die Kettenlinie gegeben. Damit ist mit grofser Annäherung die Einteilung der zugehörigen Minimalschraubenfläche, also auch die des Katenoids in kleine Quadrate ermöglicht, wie sich nun des weiteren zeigen wird.)

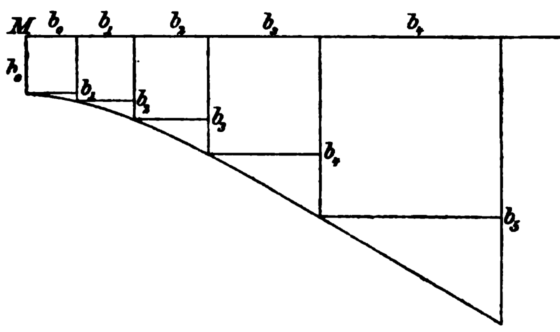


Fig. 93.

§ 128) **Einteilung der Katenoidfläche in kleine Quadrate.** Man denke sich das Katenoid durch Hauptschnitte, die unter gleichen Winkeln $\vartheta = \frac{2\pi}{n}$ auf einander folgen, in Meridianstreifen eingeteilt, wobei n sehr grofs sei. Der Striktionskreis wird dabei in Bogen von der Länge $b_0 = \frac{2\pi\varrho_0}{n}$ eingeteilt, die man bei grofsem n als geradlinig betrachten darf. Trägt man in Figur 91 auf dem Meridiane B_0B_4 den Bogen $B_0B_1 = b_0$ ab, und legt man durch B_1 einen Normalschnitt zur Achse, der auf dieser ein Stück $MA_1 = a$ abschneidet, so hat man nur noch Normalschnitte, die unter den Abständen a auf einander folgen, durch die Achse zu legen, um die quadratische Einteilung mit beliebiger Genauigkeit zu erhalten.

Dafs nämlich der erste Streifen (Zone) in kleine Quadrate von der Seite $b_0 = \frac{2\pi\varrho_0}{n}$ eingeteilt ist, ergiebt sich aus der Konstruktion. Nun ist $\frac{b_0}{b_m} = \frac{\varrho_0}{y_m} = \frac{\frac{2\pi\varrho_0}{n}}{\frac{2\pi y_m}{n}}$, da aber $b_0 = \frac{2\pi\varrho_0}{n}$ ist, so ist auch $b_m = \frac{2\pi y_m}{n}$, d. h. b_m gleich dem n^{ten} Teile der durch den m^{ten} Normalschnitt entstandenen Kreislinie. Also ist jeder m^{te} Streif in „Quadrate" eingeteilt.

Für $n = \infty$ ist $\sphericalangle\, \alpha_0 = 0$, also $a = b_0 \cos\alpha_0 = b_0$, sodafs man dann auch den Abstand der aufeinander folgenden Normalschnitte (auf der Achse gemessen) gleich b_0 setzen darf. Also: Teilt man den Striktionskreis in sehr viele gleiche Teile $\frac{2\pi\varrho}{n}$, und legt man Normalschnitte durch die Achse, die unter Abständen $\frac{2\pi\varrho}{n}$ auf einander folgen, so bilden die Schnittlinien mit den Grenzlinien von n gleichen Sektoren die quadratische Einteilung der Fläche.

§ 129) Winkeltreue (konforme) Abbildung der Katenoidfläche auf einem Parallelstreif der Ebene. Man denke sich die obige Quadrateinteilung des Katenoids so, dafs auf jeder Zone n Quadrate liegen, und dafs es sich vom Striktionskreise aus auf jedem Meridianstreifen um m Quadrate handelt. Die an ϱ_0 liegenden Quadrate haben die Seite $b_0 = \frac{2\pi\varrho_0}{n}$. Für ϱ_0 soll jetzt aus typographischen Gründen ϱ geschrieben werden.

In der Ebene denke man sich längs PQ ebenfalls n Quadrate von der Seite b_0 angeordnet, längs PS aber m solche. Dann entsteht ein Rechteck $PQRS$, dessen Quadrate der bereits eingeteilten Katenoidfläche entsprechen. Damit ist auch die Abbildung der ganzen Katenoidfläche auf den unbegrenzten Parallelstreif als erledigt zu betrachten.

Dabei finden folgende Mafsbeziehungen statt.

Schreibt man statt der obigen Bogenlänge r jetzt s, so hat man statt der obigen Gleichung $r = \sqrt{y^2 - \varrho^2}$ jetzt

$$s = \sqrt{y^2 - \varrho^2} = \sqrt{\left(\varrho \frac{e^{\frac{x}{\varrho}} + e^{-\frac{x}{\varrho}}}{2}\right)^2 - \varrho^2} = \varrho \sqrt{\left(\frac{e^{\frac{x}{\varrho}} - e^{-\frac{x}{\varrho}}}{2}\right)^2}$$

$$= \varrho \frac{e^{\frac{x}{\varrho}} - e^{-\frac{x}{\varrho}}}{2}.$$

Löst man die daraus folgende Gleichung

$$e^{\frac{2x}{\varrho}} - \frac{2s}{\varrho} e^{\frac{x}{\varrho}} = 1$$

nach $e^{\frac{x}{\varrho}}$ auf, so folgt

$$e^{\frac{x}{\varrho}} = \frac{s}{\varrho} + \sqrt{\frac{s^2}{\varrho^2} + 1} = \frac{s + \sqrt{s^2 + \varrho^2}}{\varrho}$$

oder

1) $$x = \varrho \lg \frac{s + \sqrt{s^2 + \varrho^2}}{\varrho}.$$

Dieses x ist das zur rektifizierten Bogenlänge s (früher r) gehörige Stück der Achse des Katenoids, also $x = m b_0 = m \frac{2\pi\varrho}{n}$. Ebenso grofs ist aber die horizontale Grundlinie des Rechtecks in der Abbildungsebene. Stellen wir in dieser die Koordinaten durch X und Y dar, so hat man zunächst die Beziehung

1*) $$X = \varrho \lg \frac{s + \sqrt{s^2 + \varrho^2}}{\varrho} = x.$$

Bezeichnet man die rechtwinklig gegen einen ersten Meridian stehenden Bogenabstände auf dem Katenoid als Ordinaten, so kann man diese z. B. als $y_m \vartheta$ messen, wo ϑ den Winkel zwischen den entsprechenden Meridianschnitten bedeutet. Auf dem Striktionskreise handelt es sich um den Bogen $\varrho\vartheta$, die gleich grofse Strecke Y in der Ebene ist

2) $$Y = \varrho \vartheta.$$

Folglich: In der Ebene und auf dem Katenoid entsprechen einander die Kurven

$$f(X,Y)=0 \text{ und } f\left(\varrho\, lg \frac{s+\sqrt{s^2+\varrho^2}}{\varrho},\ \varrho\vartheta\right)=0.$$

Für den zum Katenoid gehörigen Ausdruck kann man einfacher schreiben $f(x,\varrho\vartheta)=0$, wobei das x die auf der Achse abgemessene Koordinate bedeutet. Der kompliziertere Ausdruck wird jedoch im Hinblick auf die Minimalschraubenfläche benutzt. Umgekehrt entsprechen einander die Kurven

$$f\left(\varrho\frac{e^{\frac{X}{\varrho}}-e^{-\frac{X}{\varrho}}}{2},\ \frac{Y}{\varrho}\right)=0 \text{ und } f(s,\vartheta)=0.$$

Damit ist die gesamte Geometrie des unbegrenzten Parallelstreifs der Ebene auf das einfach bedeckte Katenoid, die der ganzen Ebene auf das unendlichfach überdeckte Katenoid übertragen. Insbesondere entspricht jeder quadratischen Einteilung der Ebene eine solche des Katenoids.

Wählt man die einfacheren Beziehungen $f(X,Y)=0$ und $f(x,\varrho\vartheta)=0$, bezw. $f\left(X,\frac{Y}{\varrho}\right)=0$ und $f(x,\vartheta)=0$, so finden Unterschiede in der Schreibweise kaum noch statt. Setzt man aber den Parameter ϱ des Katenoids gleich der Einheit, so fallen auch diese Unterschiede weg, und es entsprechen einander die Kurven

$$f(X,Y)=0,\ f(x,\vartheta)=0.$$

Folglich: Die analytische Geometrie der Ebene in Kartesischen Koordinaten und die dieses Katenoids in den Koordinaten x und ϑ, von denen die ersteren der Achse parallel sind, die anderen die Drehung um die Achse bedeuten, sind identisch.

Das Katenoid ist demnach sogar leichter zu behandeln, als die Kugel und ebenso leicht wie der Kreiscylinder.

δ) Beispiele konformer Übertragung für das Katenoid mit Parameter $\varrho = 1$ und die Eigenschaften seiner Loxodromen.

§ 130) Unter p soll ein Kurvenparameter verstanden werden, der, wenn quadratische Einteilungen erzielt werden sollen, Werte anzunehmen hat, die in arithmetischer Reihe aufeinander folgen. In der Regel soll es sich um die Reihe

$$p = 0, \pm c, \pm 2c, \pm 3c, \pm 4c, \ldots$$

handeln. Dabei soll c klein sein, damit man auf den krummen Flächen von „Quadraten" reden kann.

In der Ebene geben die Geradenscharen

$$X = p = 0, c, 2c, 3c, \ldots$$
$$Y = p = 0, c, 2c, 3c, \ldots$$

eine Einteilung in kleine Quadrate.

Folglich, auf dem Katenoid geben die Parallelkreise und Meridiane, die durch

$$x = p \text{ und } \vartheta = p$$

bestimmt sind, eine Einteilung in kleine „Quadrate".

Auch die beiden Diagonalenscharen dieser Quadrate in der Ebene geben kleine Quadrate. Ihre Gleichungen sind

$$X + Y = p, \; X - Y = p.$$

Auf dem Katenoid entsprechen ihnen die Loxodromen zu 45°, die durch die Gleichungen

$$x + \vartheta = p, \; x - \vartheta = p$$

bestimmt sind. Sie lassen sich elementar konstruieren, ebenso die quadratische Einteilung.

§ 131) In der Ebene geben die orthogonalen Geradenscharen *)

$$X + Y \tan\alpha = p, \; X - Y \cot\alpha = p,$$

---

*) Noch besser wählt man für die Parallelscharen die Gleichungen

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha = 0, \; \pm c, \; \pm 2c, \ldots = p$$
$$Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0, \; \pm c, \; \pm 2c \ldots = p.$$

die also unter α bezw. unter $\alpha + 90^0$ gegen die positive Richtung der X-Achse geneigt sind, eine Einteilung in kleine Quadrate. Folglich:

Auf dem Katenoid geben die orthogonalen Loxodromenscharen

$$x + \vartheta \tan\alpha = p, \quad x - \vartheta \cot\alpha = p,$$

die sich elementar konstruieren lassen, eine quadratische Einteilung.

§ 132) In der Ebene geben die konzentrischen Kreise und das zugehörige Radienbüschel

$$\begin{aligned} {}^e lg\, R = p &= 0, \pm c, \pm 2c, \pm 3c, \ldots \\ \theta = p &= 0, \pm c, \pm 2c, \pm 3c, \ldots \end{aligned}$$

eine quadratische Einteilung. (Vergl. Bd. I § 314.) Dabei ist

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \tan\theta = \frac{Y}{X},$$

so dafs man hat

$$\frac{1}{2}\, {}^e lg\, (X^2 + Y^2) = p, \text{ arctan} \frac{Y}{X} = p.$$

Ihnen entsprechen auf dem Katenoid die loxodromischen Kreise*) und das orthogonale Loxodromenbüschel

$$\frac{1}{2}\, {}^e lg\, (x^2 + \vartheta^2) = p, \text{ arctan} \frac{\vartheta}{x} = p.$$

Diese sind ebenfalls elementar zu konstruieren. Für die Konstruktion der kleinen Quadrate, die mit beliebiger Genauigkeit auszuführen ist, wie in der Ebene, vergleiche man das in Bd. I § 314 Gesagte.

---

*) Solche Kreise sind für gekrümmte Flächen im allgemeinen andere, als die geodätischen Kreise, denn die Loxodromen sind im allgemeinen keine geodätischen Linien, wie man schon an der abwickelbaren Kegelfläche sieht, deren geodätische Linien in der Abwickelung Gerade geben, während die Loxodromen logarithmische Spiralen werden.

§ 133) Die orthogonalen logarithmischen Spiralen, die jene Kreisschar der Ebene unter den Winkeln α und $90^0 - \alpha$ durchsetzen, haben die Gleichungen*)

$$ {}^e lg\, R - \theta \cot \alpha = p, \quad {}^e lg\, R + \theta \tan \alpha = p. $$

Sie geben eine quadratische Einteilung der Ebene. Ihnen entsprechen auf dem Katenoid die ebenso leicht zu zeichnenden „logarithmischen Spiralen“

$$ \frac{1}{2}\, {}^e lg\, (x^2 + \vartheta^2) - \operatorname{arctan} \frac{\vartheta}{x} \cot \alpha = p, $$

$$ \frac{1}{2}\, {}^e lg\, (x^2 + \vartheta^2) + \operatorname{arctan} \frac{\vartheta}{x} \tan \alpha = p. $$

Für $\alpha = 45^0$ ist $\tan \alpha = 1$, $\cot \alpha = -1$ einzusetzen.

§ 134) Der Büschelpunkt der Geraden der Ebene, d. h. der Mittelpunkt der konzentrischen Kreise kann an beliebiger Stelle $X_1 = a$, $Y_1 = b$ liegen, so dafs die Gleichungen für Kreisschar und Radienbüschel übergehen in

$$ \frac{1}{2}\, {}^e lg\, [(X-a)^2 + (Y-b)^2] = p, \quad \operatorname{arctan} \frac{Y-b}{X-a} = p, $$

für die Spiralen also in

$$ \frac{1}{2}\, lg\, [(X-a)^2 + (Y-b)^2] - \operatorname{arctan} \frac{Y-b}{X-a} \cot \alpha = p, $$

$$ \frac{1}{2}\, lg\, [(X-a)^2 + (Y-b)^2] + \operatorname{arctan} \frac{Y-b}{X-a} \tan \alpha = p. $$

Die entsprechenden Kurvengleichungen für die Katenoidfläche erhält man durch Einsetzung von x und ϑ für X und Y in diese Gleichungen.

§ 135) Das Kreisbüschel durch zwei beliebige Punkte der Ebene mit den Koordinaten a_1, b_1 bezw. a_2, b_2 und die dazu orthogonale Kreisschar haben die Gleichungen

$$ \theta_1 - \theta_2 = p, \quad lg\, R_1 - lg\, R_2 = p \text{ oder } lg \frac{R_1}{R_2} = p. $$

---

*) Noch günstiger sind die Gleichungen

$$ \cos \alpha\, lg\, R - \theta \sin \alpha = p $$
$$ \sin \alpha\, lg\, R + \theta \cos \alpha = p. $$

Auf dem Katenoid entsprechen ihnen die Kurven

$$arc\tan\frac{\vartheta-b_1}{x-a_1}-\arctan\frac{\vartheta-b_2}{x-a_2}=p$$

$$\frac{1}{2}\lg\frac{(x-a_1)^2+(\vartheta-b_1)^2}{(x-a_2)^2+(\vartheta-b_2)^2}=p.$$

§ 136) Die isogonalen Trajektorien, die jenes Kreisbüschel bezw. die Kreisschar unter Winkeln α und $90^0-\alpha$ durchsetzen, haben die Gleichung

$$\lg\frac{R_1}{R_2}-(\theta_1-\theta_2)\cot\alpha=p,\quad \lg\frac{R_1}{R_2}+(\theta_1-\theta_2)\tan\alpha=p.$$

Sie heifsen auch Bicirkularspiralen. Ihnen entsprechen auf dem Katenoid die Kurvenscharen

$$\frac{1}{2}\lg\frac{(x-a_1)^2+(\vartheta-b_1)^2}{(x-a_2)^2+(\vartheta-b_2)^2}.$$

$$-\left[arc\tan\frac{\vartheta-b_1}{x-a_1}-\arctan\frac{\vartheta-b_2}{x-a_2}\right]\cot\alpha=p$$

$$\frac{1}{2}\lg\frac{(x-a_1)^2+(\vartheta-b_1)^2}{(x-a_2)^2+(\vartheta-b_2)^2}$$

$$+\left[arc\tan\frac{\vartheta-b_1}{x-a_1}-\arctan\frac{\vartheta-b_2}{x-a_2}\right]\tan\alpha=p.$$

§ 137) Fallen a und b unendlich nahe an den Nullpunkt, so handelt es sich um die Gleichungen

$$\frac{X}{X^2+Y^2}=p \quad \text{und} \quad \frac{Y}{X^2+Y^2}=p,$$

welche Kreisscharen darstellen, die durch den Nullpunkt gehen, wobei die eine Schar die Y-Achse, die andere die X-Achse zur gemeinschaftlichen Tangente hat.

Die isogonalen Trajektorien haben nach Analogie der Geraden $x+y\tan\alpha=c$, $x-y\cot\alpha=c$ die Gleichungen

$$\frac{X}{X^2+Y^2}+\frac{Y}{X^2+Y^2}\tan\alpha=p,\quad \frac{X}{X^2+Y^2}-\frac{Y}{X^2+Y^2}\cot\alpha=p$$

und diese stellen wiederum orthogonale Kreisscharen dar.

§ 138) Das Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch zwei Punkte und die orthogonale Lemniskatenschar sind gegeben durch die Gleichungen

$$\theta_1 + \theta_2 = p \text{ und } {}^e lg\, R_1 + {}^e lg\, R_2 = p \text{ oder } {}^e lg\,(R_1 R_2) = p;$$

ihre isogonalen Trajektorien durch

$$\begin{aligned} {}^e lg\,(R_1 R_2) - (\theta_1 + \theta_2) \cot \alpha &= p, \\ lg\,(R_1 R_2) + (\theta_1 + \theta_2) \tan \alpha &= p. \end{aligned}$$

Bei der einen Schreibweise $\left(lg\, R_1 - lg\, R_2 \text{ statt } lg\,\frac{R_1}{R_2}\right)$ handelt es sich nur um Vorzeichenänderungen, die für das Katenoid den Fall des § 138 in den von § 137 umwandeln.

Absichtlich wurden hier nur die einfachsten Fälle behandelt, die elementar erledigt werden können und für die Lehre von den stationären Strömungen von Interesse sind.

§ 139) Aber eine die Anschauung störende Schwierigkeit liegt hier vor. Die für die XY-Ebene aufgestellten Kurven nämlich gehen durch zahlreiche Parallelstreifen der Gesamtebene. Denkt man sich das Katenoid mit unendlich vielen Flächen bedeckt, so entspricht allerdings jede einem der Streifen. Damit also Eindeutigkeit herrsche, ist es vorzuziehen, einen solchen auf die Gesamtebene abzubilden. Dies ist schon gelegentlich der Merkatorkarte und der Polarkarten in Band II geschehen, wo auf Seite 386 und 387 die Beziehungen tabellarisch zusammengestellt sind. (Nur wurde dort der Parallelstreif aus Gründen der Kartographie senkrecht gestellt, während er hier horizontal liegt, man hat also X und Y zu vertauschen. Die neue Ebene soll die Koordinaten ξ und η bezw. r und ψ haben. Dann hat man zu setzen

$$e^X = r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \text{also } X = lg\, r = lg \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$
$$e^X \cos \theta = \xi, \quad Y = \psi, \quad e^Y \sin \vartheta = \eta.$$

Jetzt ergiebt sich für die drei Flächen folgende Tabelle von Beziehungen:

	Katenoid,	Parallelstreif,	Ganze Ebene.
1)	$\begin{cases} f(x, \vartheta) = 0, \\ f\left[{}^e lg\,(s + \sqrt{s^2 + 1}),\ \vartheta\right] = 0, \end{cases}$	$f(X, Y) = 0$	$\begin{cases} f\left({}^e lg\, r, \psi\right) = 0, \\ f\left[{}^e lg \sqrt{\xi^2 + \eta^2},\ \operatorname{arctan} \frac{\eta}{\xi}\right] = 0, \end{cases}$
2)	$\begin{cases} f\left(e^x, \vartheta\right) = 0 \\ f\left[(s + \sqrt{s^2 + 1}),\ \vartheta\right] = 0, \end{cases}$	$f\left(e^X, Y\right) = 0,$	$\begin{cases} f(r, \psi) = 0 \\ f\left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2},\ \operatorname{arctan} \frac{\eta}{\xi}\right) = 0, \end{cases}$
3)	$\begin{cases} f\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}, \vartheta\right) = 0 \\ f(s, \vartheta) = 0 \end{cases}$	$f\left(\frac{e^X - e^{-X}}{2}, Y\right) = 0,$	$\begin{cases} f\left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right), \psi\right] = 0, \\ f\left[\frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{2\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},\ \operatorname{arctan} \frac{\eta}{\xi}\right] = 0, \end{cases}$
4)	$\begin{cases} f\left[e^x \cos \vartheta,\ e^x \sin \vartheta\right] = 0 \\ f\left[\begin{matrix}(s + \sqrt{s^2 + 1}) \cos \vartheta, \\ (s + \sqrt{s^2 + 1}) \sin \vartheta\end{matrix}\right] = 0 \end{cases}$	$f\left(e^X \cos Y,\ e^X \sin Y\right) = 0$	$f(\xi, \eta) = 0$ *)
5)	$f\left[\sqrt{x^2 + \vartheta^2},\ \operatorname{arctan} \frac{\vartheta}{x}\right] = 0$	$f(R, \Theta) = 0$	$f\left[\sqrt{(lg\, r)^2 + \psi^2},\ \operatorname{arctan} \frac{\psi}{lg\, r}\right] = 0.$

*) Auf der Tabelle auf Seite 387, Bd. II, ist unter 5) für X durch einen Schreibfehler Φ eingesetzt worden, so daſs dort eine kleine Änderung nötig ist.

Stellt man jetzt die Gleichungen der obigen isothermischen Probleme (§ 131 bis 138) in den Koordinaten ξ, η, r und ψ geschrieben zusammen, so hat man nur ξ durch $e^x \cos\vartheta$, η durch $e^x \sin\vartheta$, r durch e^x, ψ durch ϑ zu ersetzen, um die Übertragung auf die Katenoidfläche zu besorgen. So heifst es z. B.:

1) In der Ebene geben die Geradenscharen $\xi = p$ und $\eta = p$ eine Einteilung in kleine Quadrate, folglich thun dies auf dem Katenoid die Kurven $e^x \cos\vartheta = p$, $e^x \sin\vartheta = p$.

2) In der Ebene geben die Geradenscharen $\psi = b$ und die Kreise $lg\, r = p$ eine quadratische Einteilung, auf dem Katenoid thun dies die Kurven $x = p$ und $\vartheta = p$.

3) In der Ebene geben die logarithmischen Spiralen ${}^e lg\, r - \psi \cot\alpha = p$ und ${}^e lg\, r + \psi \tan\alpha = p$ eine quadratische Einteilung, auf dem Katenoid die Loxodromen $x - \vartheta \cot\alpha = p$ und $x + \vartheta \tan\alpha = p$.

Es bleibe dem Leser überlassen, alle diese Beziehungen in der neuen Form niederzuschreiben. Man erhält dann die Lösung einer Reihe von Problemen für stationäre elektrische Strömungen auf der einfach bedeckten Katenoidfläche. Bei diesen ist die Voraussetzung zu machen, dafs elektrische Beeinflussungen nur in der Fläche vor sich gehen, nicht aber durch den Raum hindurch von Flächenteilchen auf Flächenteilchen. Die eine Kurvenschar bedeutet dann die Stromlinien, die andere die Linien konstanten Potentials.

§ 140) Die überraschende Einfachheit der Beziehungen zwischen dem Parallelstreif und der Katenoidfläche läfst sich stereometrisch folgendermafsen deuten:

In das Katenoid läfst sich ein einbeschriebener Kreiscylinder stellen, der den kleinsten Kreis der ersteren enthält. Von jedem Punkte der Katenoidfläche läfst sich ein Lot auf die Achse fällen, welches die Cylinderfläche in dem dem ersteren zugeordneten Punkte schneidet. Durch diese Zuordnung erhält man die konforme Abbildung des Katenoids auf die Cylinderfläche.

Die Abbildungsaufgabe ist also durch eine Art von Projektion bequem zu erledigen. Die Geometrie der Lage läfst sich mit Hilfe der logarithmischen Abbildung bequem von der Gesamtebene auf den Mercatorstreif und den Cylinder, durch obiges auf das Katenoid übertragen Dazu sollen unten Beispiele gegeben werden. Etwas unbequemer ist es mit den Mafsbeziehungen.

§ 141) Das Vergröfserungsverhältnis zwischen Katenoid und Cylinder (bezw. Parallelstreif ist nach obigem für jede Stelle durch den Ausdruck $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ gegeben, und zwar für **sämtliche Richtungen** innerhalb dieses kleinen Bereiches. Jeder beliebig gerichteten kleinen Strecke $\bar{s}$ entspricht eine kleinere $\bar{S}$ auf dem Cylinder derartig, dafs $\bar{s} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \bar{S}$ ist. Der Winkel zwischen $\bar{s}$ und der dortigen Kettenlinie ist derselbe, wie der zwischen $\bar{S}$ und den dortigen Cylinder-Geraden. Die entsprechende Strecke $\bar{\sigma}$ der ganzen Ebene bestimmt sich nach den Untersuchungen über die Mercatorkante so, dafs $\bar{S} = \frac{\sigma}{r}$ ist, denn auf dem Einheitskreise stimmen die Dimensionen der Quadrate überein, in der Entfernung r sind sie auf der Ebene r-mal so grofs, als auf dem Streifen. Demnach ist

$$\bar{s} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \bar{S} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{\sigma}{r} = \frac{r + \frac{1}{r}}{2} \cdot \frac{\bar{\sigma}}{r} = \frac{r^2 + 1}{2} \bar{\sigma}.$$

Nur für $r = 1$ oder $x = 0$ stimmen $\bar{s}$ und σ überein.

Damit ist auch das Vergröfserungsverhältnis zwischen Katenoid und Gesamtebene für jede Stelle bestimmt.

§ 142) Bei der Bestimmung der Länge gröfserer Kurvenstrecken sind im allgemeinen höhere Rechnungen erforderlich, auch bei geodätischen Untersuchungen. Die Länge der Loxodromen des Katenoids aber läfst sich elementar bestimmen. Sämtliche Kettenlinien auf der

Fläche sind nämlich kongruent. Durchschneidet nun die Loxodrome das ganze System unter dem Winkel α, so ist jedes kleine Stück s der Kettenlinie das $\cos\alpha$-fache vom entsprechenden Stück der geschnittenen Loxodrome. Dieses Verhältnis gilt für alle Durchschnittsstellen. Demnach ist die Länge l der Loxodrome das $\frac{1}{\cos\alpha}$-fache von der entsprechenden Länge der Kettenlinie. Die letztere hat aber von 0 bis x gerechnet die Länge

$$s = \sqrt{y^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1} = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

also ist die entsprechende Loxodromenlänge zwischen 0 und x gegeben durch

$$1) \qquad l = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{y^2 - 1} = \frac{e^x - e^{-x}}{2\cos\alpha}.$$

Ist l_1 die Länge zwischen den auf der Achse gemessenen Koordinaten 0 und x_1, l_2 die entsprechende zwischen 0 und x_2, so folgt als Länge der Loxodrome zwischen den Koordinaten x_1 und x_2

$$2) \qquad l = l_2 - l_1 = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\sqrt{y_2^2 - 1} - \sqrt{y_1^2 - 1}\right]$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\left[\frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} - \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2}\right].$$

Damit sind die Maſsbeziehungen für jede Loxodrome in Ordnung gebracht.

§ 143) Sollen auf einer Katenoidloxodrome gleiche Längen l abgetragen werden und zwar von der Stelle $x = 0$ aus, so folgen die entsprechenden Achsenabstände folgendermaſsen aufeinander:

$$\text{Aus } l = \frac{e^x - e^{-x}}{2\cos\alpha} \text{ folgt } e^{2x} - 2l\cos\alpha\, e^x = 1,$$

$$\text{also} \quad e^x = l\cos\alpha + \sqrt{(l\cos\alpha)^2 + 1} \quad \text{und}$$

$$x = {}^e lg\left[l\cos\alpha + \sqrt{(l\cos\alpha)^2 + 1}\right].$$

Die Reihenfolge der (auf der Achse liegenden) Koordinaten, die den Teilpunkten entsprechen, wird demnach

$$x_0 = 0, \quad x_1 = {}^{e}lg\left[l \cos\alpha + \sqrt{(l\cos\alpha)^2 + 1}\right],$$

$$x_2 = {}^{e}lg\left[2\,l \cos\alpha + \sqrt{(2l\cos\alpha)^2 + 1}\right],$$

$$x_3 = {}^{e}lg\left[3\,l \cos\alpha + \sqrt{(3\,l\cos\alpha)^2 + 1}\right], \ldots .$$

§ 144) Aus 1 ergiebt sich noch die Lösbarkeit folgender Aufgabe.

Man denke sich vom Nullpunkte aus auf dem Katenoid ein Büschel von Loxodromen derselben Länge $l = c$ gezeichnet. Welche Kurve entspricht der durch die Endpunkte dargestellten Kurven im Parallelstreif bezw. auf der ganzen Ebene?

Auflösung. An Stelle von α hat man jetzt einen veränderlichen Winkel φ zu setzen, der infolge der Isogonalität den Winkel Θ des Polarkoordinatensystems des Parallelstreifens entspricht. Die Gleichung

$$l = c \text{ oder } \frac{e^{x} - e^{-x}}{2\cos\varphi} = c$$

geht für den Parallelstreif über in

$$\frac{e^{X} - e^{-X}}{2\cos\Theta} = c,$$

in der ganzen Ebene in

$$\frac{r - \frac{1}{r}}{2\,\frac{lg\,r}{\sqrt{\psi^2 + (lg\,r)^2}}} = c$$

oder

$$\frac{r^2 - 1}{2r} \cdot \frac{\sqrt{(lg\,r)^2 + \psi^2}}{lg\,r} = c.$$

Aus $X = lg r$, $Y = \psi$ folgt nämlich $\theta = \arctan \frac{Y}{X} = \arctan \frac{\psi}{lg r}$,

also $\tan \theta = \frac{\psi}{lg r}$, demnach $\cos \theta = \frac{lg r}{\sqrt{\psi^2 + (lg r)^2}}$.

Dafs diese Kurve kein loxodromischer Kreis im oben gebrauchten Sinne ist, geht aus den Formeln hervor. Die entsprechende Untersuchung für ein Loxodromenbüschel, welches von einem beliebigen Punkte der Fläche ausgeht, kann dem Leser überlassen bleiben.

ε) Beispiele konformer Übertragung für das Katenoid mit Parameter 1 und die Eigenschaften seiner Loxodromen und anderer Kurvenscharen.

§ 145) Einige Eigenschaften der Loxodromen und der loxodromischen Kreise des Katenoids gehen aus dessen Beziehung zum einbeschriebenen Cylinder und aus den Formeln für den Parallelstreif hervor.

Jede Loxodrome macht unendlich viele Windungen um das Katenoid. Jede dieser Windungen nimmt dieselbe „Ganghöhe“ $x = \frac{2\pi}{\tan \alpha}$ in Anspruch.

Geht man vom Nullpunkt aus, so ist die Länge des ersten Umgangs

$$l_1 = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2 \cos \alpha} = \frac{e^{2\pi \cot \alpha} - e^{-2\pi \cot \alpha}}{2 \cos \alpha}.$$

Die beiden ersten Umgänge haben zusammen die Länge

$$l_2 = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2 \cos \alpha} = \frac{e^{4\pi \cot \alpha} - e^{-4\pi \cot \alpha}}{2 \cos \alpha},$$

die n ersten haben

$$l_n = \frac{e^{2nx} - e^{-2nx}}{2 \cos \alpha} = \frac{e^{2n\pi \cot \alpha} - e^{-2n\pi \cot \alpha}}{2 \cos \alpha}.$$

§ 146) Keine Loxodrome schneidet sich selbst. „Parallele Loxodromen“ schneiden einander nicht.

Der auf der Höhe zu messende Abstand der Loxodromen bleibt konstant, ebenso der Drehungswinkel ϑ, durch den jede in die Lage der parallelen Loxodrome gedreht werden kann.

Gehen von einem Punkte A_0 des Parallelstreifs zwei Gerade A_0K_0 und A_0L_0 von den Neigungen α_0 und α_1 aus, so decken sich ihre Bilder auf dem Katenoid mit denen der Geraden A_1K_1 und A_1L_1, die von dem um 2π höher gelegenen Punkte A_1 ausgehen, ebenso mit dem der entsprechenden von A_2, A_3 ... ausgehenden. A_0L_0 und A_1K_1 schneiden einander in B. Dabei ist

$$A_0B : A_0A_1 = \sin\beta_0 : \sin(\alpha_1 - \alpha_0) = \sin(90^0 - \alpha_0) : \sin(\alpha_1 - \alpha_0) = \cos\alpha_0 : \sin(\alpha_1 - \alpha_0) = A_0B : 2\pi,$$

Fig. 94.

der horizontale Abstand A_0C also gleich

$$A_0B\cos\alpha_1 = 2\pi\frac{\cos\alpha_0}{\sin(\alpha_1 - \alpha_0)}\cos\alpha_1 = \frac{2\pi\cos\alpha_0\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1\sin\alpha_0},$$

oder

$$A_0C = x_1 = \frac{2\pi\cos\alpha_0\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_0)} = \frac{2\pi}{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_0}.$$

Folglich: Gehen von einem Punkte der Katenoidfläche zwei Loxodromen von den Steigungswinkeln α_0 und α_1 aus, so schneiden sie sich unendlich oft und zwar folgen die Schnittpunkte in gleichen Höhenabständen $x_1 = \dfrac{2\pi}{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_0}$ aufeinander.

Der loxodromische Kreis kann definiert werden als die Kurve, die das Loxodromenbüschel orthogonal schneidet.

Er hat die Eigenschaft, dafs die loxodromischen Peripheriewinkel über derselben loxodromischen Sehne einander gleich sind. Der Büschelpunkt soll als der Mittelpunkt des loxodromischen Kreises bezeichnet werden. Jetzt gilt der Satz:

Die winkelhalbierenden Loxodromen des Loxodromendreiecks schneiden einander in einem Punkte, dem Mittelpunkte des einbeschriebenen loxodromischen Kreises. Die Loxodromen, die einen Winkel und zwei Aufsenwinkel des Dreiecks halbieren, schneiden einander im Mittelpunkte eines äufseren loxodromischen Berührungskreises.

§ 147) Versteht man unter axialer Halbierung eines Loxodromenstücks des Katenoids nicht die gewöhnliche Halbierung, sondern eine derartige Teilung, dafs die Projektion des Teilpunktes auf die Achse das entsprechende Achsenstück halbiert, so folgt der Satz:

Die in den axialen Halbierungspunkten der Seiten eines loxodromischen Dreiecks errichteten loxodromischen Lote schneiden einander in einem Punkte, dem Mittelpunkte des einbeschriebenen loxodromischen Kreises.

Wie von axialer Halbierung eines Loxodromenbogens, kann man auch von axialer Teilung im Verhältnis $1:n$ reden.

§ 148) Die „loxodromischen Mittellinien“, die durch die axialen Halbierungspunkte der Seiten des loxodromischen Dreiecks gehen, schneiden einander in einem Punkte und haben das „axiale Teilungsverhältnis“ $1:2$. Auch die loxodromischen Höhen jedes solchen Dreiecks schneiden einander in einem Punkte. Ebenso ist das Analogon des Feuerbachschen Kreises leicht auszusprechen.

§ 149) Vier Punkte einer Loxodrome des Katenoids sollen harmonische heifsen, wenn die auf die Achse projizierten Punkte harmonische sind. Vier loxodromische Strahlen sollen harmonische heifsen, wenn sie von einem Punkte aus durch harmonische Punkte einer Loxodrome gelegt sind. Für die Achsenpunkte sei die Reihenfolge

$ACBD$, dann ist $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ oder $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1$.
Für die Schnittwinkel ist ebenso

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = -1.$$

Auch diese Gleichungen können zur Definition der harmonischen Punkte und Strahlen benutzt werden. Bei dem Schneiden einer Loxodrome durch das Strahlenbüschel wiederholen sich allerdings die Gruppen von je vier Punkten unendlich oft, es soll aber hier nur von einer Gruppe gesprochen werden.

Alle Sätze der Geometrie der Lage über harmonische Punkte und Strahlen bleiben für die harmonischen Punkte der Loxodromen und über harmonische Loxodromen des Katenoids erhalten.

Also: Halbierung der beiden Schnittwinkel zweier Loxodromen durch zwei andere Loxodromen giebt harmonische Loxodromen. Jede Loxodrome wird durch harmonische Loxodromen in harmonischen Punkten geschnitten. Jedes durch harmonische Punkte gehendes Loxodromenbüschel ist ein harmonisches (vergl. die eine der obigen Definitionen, die jedoch nicht an die Spitze gestellt zu werden braucht).

Die drei loxodromischen Diagonalen des vollständigen loxodromischen Vierseits teilen einander harmonisch.

§ 150) Der loxodromische Kreis des Katenoids hat dieselben harmonischen Eigenschaften, wie der Kreis der Ebene; folglich lassen sich die Sätze über Pol und Polare am Kreise, über Ähnlichkeitspunkte, die Sätze von Pascal und Brianchon über den Kreis auf den loxodromischen Kreis dieser Fläche übertragen. Der isothermischen Spiegelung gegen den Kreis der Ebene entspricht die isothermische Spiegelung gegen den loxodromischen Kreis auf dem Katenoid. (Um die Maſsrelation $R = \frac{1}{r}$, also die Methode der reciproken Radien zu vermeiden, kann man

einen Radius und einen Orthogonalkreis benutzen. Soll z. B. der Punkt A gegen den Kreis M gespiegelt werden, so ziehe man AM und lege durch A einen Orthogonalkreis μ zum gegebenen Kreise. A_1 ist der gesuchte Punkt.)

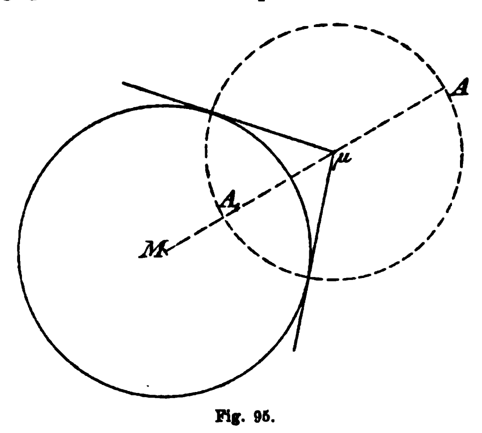


Fig. 95.

Die harmonischen Eigenschaften von zwei orthogonalen Kreisen, überhaupt die Haupteigenschaften des Kreisbüschels und der Kreisschar, auch die Steinerschen Sätze über Reihen von Berührungskreisen zwischen excentrischen Kreisen bleiben erhalten (Schliefsungssätze). Die Lösungen der Apollonischen Berührungsprobleme, der Malfattischen Aufgabe, u. s. w. sind denen der Ebene analog.

§ 151) Die Definition des Doppelverhältnisses für vier Punkte $ACBD$ einer Geraden durch den Ausdruck $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=k$ gilt auch für vier Punkte einer Loxodrome, nur sind dabei die entsprechenden Achsenpunkte zu benutzen. Die Definition des Doppelverhältnisses für vier Strahlen a, c, b, d durch den Ausdruck $\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}:\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}=k$ gilt ohne weiteres für vier loxodromische Strahlen des Katenoids. Spricht man von loxodromischer Projektion auf der Katenoidfläche in demselben Sinne, wie von Projektion in der Ebene mittels eines Strahlenbüschels oder einer Parallelschar von Geraden, so bleiben alle Sätze über Erhaltung der Doppelverhältnisse bestehen.

§ 152) Damit sind aber die projektiven Punktreihen auf den Loxodromen des Katenoids und die projektiven Loxodromenbüschel definiert, folglich gelten die entsprechenden

Sätze der Geometrie der Lage auch hier, insbesondere die folgenden:

Die Durchschnittspunkte entsprechender Loxodromen projektiver Loxodromenbüschel liegen auf einer Kurve, von der der Pascalsche Satz gilt.

Die verbindenden Loxodromen entsprechender Punkte projektiver Punktreihen auf zwei Loxodromen umhüllen eine Kurve, von der der Satz von Brianchon gilt.

§ 153) Einige weitere Bemerkungen über konforme Übertragungen.

a) Durch die konforme Abbildung des Parallelstreifs auf das ganze Katenoid hat man zugleich die Merkatorkante auf diese Fläche übertragen. Die Merkatorkante ist nach Bd. II § 524 bezw. I § 326/27 durch logarithmische Abbildung auf die Polarkarte, durch reciproke Radien auf die östliche (oder westliche) Halbkugel und ihre Erweiterung für die ganze Ebene, auf die Karte der gröſsten oder kleinsten Wassermasse und ihre Erweiterung auf die ganze Ebene (alles nach Hipparch), auf den kugelförmigen Globus mit seinen Meridianen und Parallelstreifen, auf die Kugel mit beliebigem Kreisbüschel und orthogonaler Kreisschar übertragen (stereographische Projektionen). Alle diese geographischen Einteilungen sind damit konform mit der Katenoidfläche in Beziehung gesetzt.

b) Jedes Rechteck des Parallelstreifens der Ebene läſst sich nach Bd. I § 357 elementar auf eine gewisse Drehungscyklide konform abbilden. Dasselbe gilt also von jedem „Rechteck" des Katenoids, welches von zwei Parallelkreisen desselben und von zwei Meridianen, oder auch von zwei Paaren paralleler Loxodromen begrenzt wird.

c) Jeder Sektor der Ebene mit dem Centriwinkel $\frac{2\pi}{n}$ läſst sich durch die Transformation $R = r^n$, $\vartheta = n\varphi$ auf die ganze Ebene übertragen. Da sich jeder Sektor zu einem Kegel umbiegen läſst, so läſst sich die Kegelfläche konform auf die ganze Ebene, den Parallelstreif und die Katenoidfläche übertragen.

d) Da sich das Katenoid zur Minimalschraubenfläche umbiegen läfst, ist auch diese auf alle genannten Flächen konform zu übertragen. Darüber soll der folgende Abschnitt besonders handeln.

e) Schneidet man das Katenoid längs eines Meridianes auf, so läfst es sich zu einer mehrfach überdeckten oder zu einer nur teilweise bedeckten Drehungsfläche umbiegen. Diese hat aber wieder den Charakter einer Minimalfläche. Die Kettenlinien werden also zu Kettenlinien mit anderem Parameter. Alle Katenoide verschiedenen Parameters sind demnach leicht auf einander abzubilden. Man braucht nur zwei beliebige Parallelkreise beider in gleichviele gleiche Teile zu teilen und die entsprechenden Quadrate zu zeichnen und das ganze Netz für jede der beiden Oberflächen zu bilden.

f) Bisher sind mit einander folgende Flächen in Beziehung gesetzt: Ganze Ebene, Parallelstreif, Sektor (Rechteck), Cylinder, Kegel, Kugel (Drehungscyklide), Katenoid, Schraubenfläche, und zwar können die einzelnen Drehungsflächen in verschiedene Anzahlen von Sektoren zerlegt sein. Die Geometrie jeder dieser Flächen ist konform auf die andere übertragen. Aber nur auf dem Kegel, dem Cylinder und der Kugel sind die geodätischen Linien bekannt geworden, bei den beiden ersten sind es die Kurven, die bei Abwickelung der Fläche auf die Ebene gerade Linien werden. Bei der Kugel sind es die gröfsten Kreise. Für die anderen Flächen ist also die Geometrie des Mafses nur unvollkommen übertragbar, während die der Lage vollkommen übertragbar ist.

Rechteck und Drehungcyklide sind eingeklammert worden, weil ihre Abbildung auf die Gesamtebene mit den elliptischen Funktionen zusammenhängt, während die gegenseitige Uebertragung keine Schwierigkeiten macht. Neben der Drehungscyklide können auch die in Band I behandelten Flächen, die durch Abbildung durch reciproke Radien aus ihr entstehen, also die allgemeinen Dupinschen Cykliden, herangezogen werden.

ζ) Quadratische Einteilung der Minimal-Schraubenfläche und ihre konforme Abbildung auf die Ebene und auf andere Flächen.

§ 154) Man denke sich die Ganghöhe h in sehr viele kleine Teilchen $\frac{h}{n}$ zerlegt. Dann hat man auf jeder durch einen Teilpunkt gehenden Geraden $B_0 B_1 = \frac{h}{n}$ zu setzen, um die erste Reihe von Quadraten zu erhalten. Die durch die B_1 gehende Schraubenlinie hat auf jedem Sektor eine Länge $B_1 C_1 = \frac{1}{n} \sqrt{h^2 + (2\pi b)^2}$. Diese nehme man für die folgende Quadratreihe als Seite, so daſs $B_1 B_2 = B_1 C$ wird. Dies giebt die folgende Schraubenlinie, und so fahre man fort. Die Berechnung ist unbequemer als die Konstruktion. Man benutze, um die Länge $B_0 B_m = r$ zu berechnen, das Katenoid, welches sich aus dem Umgang der Schraubenfläche abwickeln läſst. Für diesen Umgang ist hier

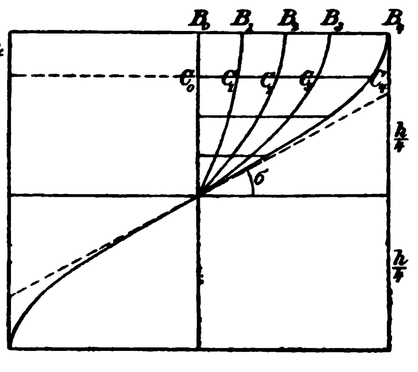


Fig. 96.

$$s^2 = h^2 + 4\pi^2 r^2,$$

woraus folgt

$$1) \qquad r^2 = \left(\frac{s}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2.$$

§ 155) Verbiegt man den Umgang zum Katenoid, so bedeutet r die Länge der Kettenlinie, $\frac{s}{2\pi} = y$ die Ordinate der Kettenlinie, $\frac{h}{2\pi}$ die kleinste der Ordinaten y. Für die

Kettenlinie war aber $r^2 = y^2 - \varrho^2$. Dies stimmt mit Gleichung 1) überein. Führt man also die Abscisse x der Kettenlinie ein, so hat man

$$r^2 = y^2 - \varrho^2 = \varrho^2 \left(\frac{e^{\frac{x}{\varrho}} + e^{-\frac{x}{\varrho}}}{2} \right)^2 - \varrho^2 = \varrho^2 \left(\frac{e^{\frac{x}{\varrho}} - e^{-\frac{x}{\varrho}}}{2} \right)^2,$$

also ist die Länge der Kettenlinie

$$2) \qquad r = \varrho \frac{e^{\frac{x}{\varrho}} - e^{-\frac{x}{\varrho}}}{2}.$$

§ 156) Daraus folgt für Katenoid und Schraubenfläche zugleich, da $\varrho = \frac{h}{2\pi}$ ist,

$$3) \quad x = \varrho\, {}^e lg \frac{r + \sqrt{r^2 + \varrho^2}}{\varrho} = \frac{h}{2\pi}\, {}^e lg \frac{r + \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}{\left(\frac{h}{2\pi}\right)}$$

$$= \frac{h}{2\pi}\, {}^e lg \frac{2\pi r + \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}}{h}.$$

Für das Katenoid bedeutete x den der Länge r der Kettenlinie entsprechenden Abstand von der Ebene $x = 0$, der also auf der Achse x als Koordinate zu messen war. Für die Schraubenfläche ist x zunächst ohne sichtbare Bedeutung. Es ist eine veränderliche Gröfse, die aus r leicht zu berechnen ist. Führt man den veränderlichen Steigungswinkel σ der Schraubenlinien ein, so hat man $\frac{h}{2\pi} = \tan \sigma$. Dann ist

$$x = \frac{h}{2\pi}\, {}^e lg \frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi r}\right)^2}}{\left(\frac{h}{2\pi r}\right)} = \frac{h}{2\pi}\, {}^e lg \frac{1 + \sqrt{1 + \tan^2 \sigma}}{\tan \sigma}$$

$$= \frac{h}{2\pi}\, {}^e lg \left(\frac{1}{\tan \sigma} + \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \sigma} + 1} \right) = \frac{h}{2\pi}\, {}^e lg \left[\frac{\cos \sigma}{\sin \sigma} + \frac{1}{\sin \sigma} \right],$$

oder endlich

$$4)\qquad x = \frac{h}{2\pi}\,{}^{e}lg\,\frac{1+\cos\sigma}{\sin\sigma} = \frac{h}{2\pi}\,{}^{e}lg\sqrt{\frac{1+\cos\sigma}{1-\cos\sigma}}$$

$$= \frac{h}{4\pi}\,{}^{e}lg\,\frac{1+\cos\sigma}{1-\cos\sigma}.$$

Daraus folgt

$$5)\qquad \cos\sigma + \frac{e^{\frac{4\pi x}{h}} - 1}{e^{\frac{4\pi x}{h}} + 1}.$$

§ 157) Setzte man im Parallelstreif der XY Ebene

$$X = x = \varrho\,{}^{e}lg\,\frac{r+\sqrt{r^2+\varrho^2}}{\varrho}$$

und $Y = \varrho\vartheta$, so hatte man die konforme Abbildung des Katenoids auf diesen Streifen durchgeführt. Hier hat man nur

$$X = \frac{h}{2\pi}\,{}^{e}lg\,\frac{2\pi r + \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}}{h} = \frac{h}{4\pi}\,{}^{e}lg\,\frac{1+\cos\sigma}{1-\cos\sigma}$$

zu setzen, aufserdem $Y = z$ (wo $z = \varrho\vartheta = \frac{h}{2\pi}\vartheta$ ist und beim Katenoid den Bogen des kleinsten Kreises, der aus der Schraubenachse entstanden war, also den Abstand auf der letzteren vom gewählten Nullpunkte bedeutet), um die Abbildung des Parallelstreifens auf den einen Umgang der Schraubenfläche, also die der gesamten Ebene auf die gesamte Schraubenfläche zu erhalten.

Da auch bei der Schraubenlinie $z:h = \vartheta:2\pi$ ist, so hat bei der gewählten Abbildung ϑ die Bedeutung des Winkels, unter dem die zu z gehörige Gerade die dem Nullpunkte zugehörige Gerade kreuzt, so hat ϑ auch für die Schraubenlinie die Bedeutung einer Koordinate.

§ 158) Die Beziehungen zwischen Gesamtebene und Minimalschraubenfläche von der Ganghöhe h sind also bei der gewählten konformen Abbildung derart, daſs einander, je nach den benutzten Koordinaten, folgende Kurven entsprechen:

Ebene.	Minimal-Schraubenfläche.
1) $f(XY) = 0,$	$\begin{cases} f\left(\frac{h}{2\pi}\cdot lg\,\frac{2\pi r + \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}}{h}, z\right) = 0. \\ f\left(\frac{h}{4\pi}\cdot lg\,\frac{1+\cos\sigma}{1-\cos\sigma}, z\right) = 0, \\ f\left(\frac{h}{2\pi}\cdot lg\,\frac{2\pi r + \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}}{h}, \frac{h}{2\pi}\vartheta\right) = 0, \\ f\left(\frac{h}{4\pi}\cdot lg\,\frac{1+\cos\sigma}{1-\cos\sigma}, \frac{h}{2\pi}\vartheta\right) = 0. \end{cases}$
2) $f\left(\frac{h}{2\pi}\,\frac{e^{\frac{2\pi X}{h}} - e^{\frac{2\pi X}{h}}}{2}, Y\right) = 0$	$\begin{cases} f(r, z) = 0 \\ f\left(r, \frac{h}{2\pi}\vartheta\right) = 0 \end{cases}$
3) $f\left(\frac{e^{\frac{4\pi X}{h}} - 1}{e^{\frac{4\pi X}{h}} + 1}, Y\right) = 0$	$\begin{cases} f(\cos\sigma, z) = 0 \\ f\left(\cos\sigma, \frac{h}{2\pi}\vartheta\right) = 0 \end{cases}$

$$4)\quad f\left(\arccos\frac{e^{\frac{4\pi X}{h}}-1}{e^{\frac{4\pi X}{h}}+1},\,Y\right)=0 \qquad \begin{cases} f(\sigma, z)=0,\\ f\left(\sigma, \dfrac{h}{2\pi}\vartheta\right)=0\end{cases}$$

$$5)\quad f\left(X, \frac{2\pi Y}{h}\right)=0 \qquad\qquad f\left(\frac{h}{4\pi}\cdot lg\,\frac{1+\cos\sigma}{1-\cos\sigma}, \vartheta\right)=0$$

$$6)\quad f\left(\arccos\frac{e^{\frac{4\pi X}{h}}-1}{e^{\frac{4\pi X}{h}}+1}\right)=0, \qquad\qquad f(\sigma, \vartheta)=0$$

$$7)\quad f[R, \Theta]=0, \quad \begin{cases} f\left[\sqrt{\dfrac{h}{2\pi}\cdot lg\dfrac{2\pi r+\sqrt{4r^2\pi^2+h^2}}{h}+z^2},\ \arctan\dfrac{z}{\dfrac{h}{2}\cdot lg\dfrac{2\pi r+\sqrt{4\pi^2r^2+h^2}}{h}}\right]=0,\\ f\left[\sqrt{\left(\dfrac{h}{4\pi}\cdot lg\,\dfrac{1+\cos\sigma}{1-\cos\sigma}\right)^2+z^2},\ \arctan\dfrac{z}{\dfrac{h}{4\pi}\cdot lg\,\dfrac{1+\cos\sigma}{1-\cos\sigma}}\right]=0.\end{cases}$$

§ 159) Auf diese Weise kann man noch eine ganze Reihe anderer Beziehungen aufstellen. Führt man aber für die Schraubenfläche einen Parameter

$$x = \frac{h}{2\pi}\,{}^{e}lg\,\frac{2\pi r + \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}}{h} = \frac{h}{4\pi}\,{}^{e}lg\,\frac{1+\cos\sigma}{1-\cos\sigma}$$

ein, so entsprechen einander einfacher die Kurven

$$f(X, Y) = 0,\ f(x, z) = 0.$$

Eine andere Art von Vereinfachung tritt ein, wenn man die Einheit gleich $\frac{h}{2\pi}$ wählt. Dann entsprechen einander z. B.

$$f(X, Y) = 0, \qquad f\left[{}^{e}lg\,(r + \sqrt{r^2+1}), z\right] = 0,$$

$$f\left(\frac{e^{X} - e^{-X}}{2}, Y\right) = 0, \qquad f(r, z) = 0,$$

$$f\left(e^{X}, Y\right) = 0, \qquad f\left[(r + \sqrt{r^2+1}), z\right] = 0.$$

$$f\left(e^{X}, e^{Y}\right) = 0 \qquad f\left[(r + \sqrt{r^2+1}), e^{z}\right] = 0.$$

u. s. w.

§ 160) Damit ist die gesamte Geometrie der ganzen XY Ebene auf die Minimalschraubenfläche konform und eindeutig übertragen.

Was den Geradenscharen $X + Y = p$, $X - Y = p$ der Ebene entspricht, was den Geradenscharen $X + Y\tan\alpha = p$, $X - Y\cot\alpha = p$ entspricht, läfst sich ohne weiteres hinschreiben. Das eine Mal handelt es sich um die Kurven, welche die Geraden und Schraubenlinien der Schraubenflächen unter $\pm 45^0$ durchsetzen, das andere Mal um die Geraden, welche sie unter α und $90^0 + \alpha$ durchsetzen. Ebenso ist leicht hinzuschreiben, was den konzentrischen Kreisen und der Radienschar $lg\,R = p$ und $\Theta = p$, oder $\frac{1}{2}\,lg\,(X^2 + Y) = p$ und $\arctan\frac{Y}{X} = p$ entspricht.

§ 161) In derselben Weise sind alle isothermischen Kurvenscharen der Ebene zu übertragen. Daraus folgt, dafs alle Probleme über stationäre Strömungen in der Ebene auch für die Minimalschraubenfläche erledigt sind, und dafs dasselbe von den kartographischen Beziehungen gilt.

Auch hier sind alle elementar lösbaren Probleme dieser Art im Anschlufs an die Ingenieurmathematik Bd. II leicht zusammen zu stellen.

Bisher waren die Kugel, der Cylinder und der Kegel die einzigen gekrümmten Flächen, die elementar mit der Gesamtebene in konforme eindeutige Beziehung gesetzt wurden. Jetzt ist mit dem Katenoid auch die Minimalschraubenfläche herangezogen worden.*)

Auf die Erhaltung der harmonischen Beziehungen, der Doppelverhältnisse u. s. w. bei gewissen Operationen auf dieser Schraubenfläche sei nur kurz aufmerksam gemacht, weil doch nur die für das Katenoid gefundenen Sätze wiederholt werden müfsten.

η) Die abwickelbare Schraubenregelfläche.

§ 162) Auch diese schon besprochene Fläche läfst eine elementare Behandlung zu. Der innere Cylinder habe den Radius r_1, die zugehörige Schraubenlinie habe die Gang-

---

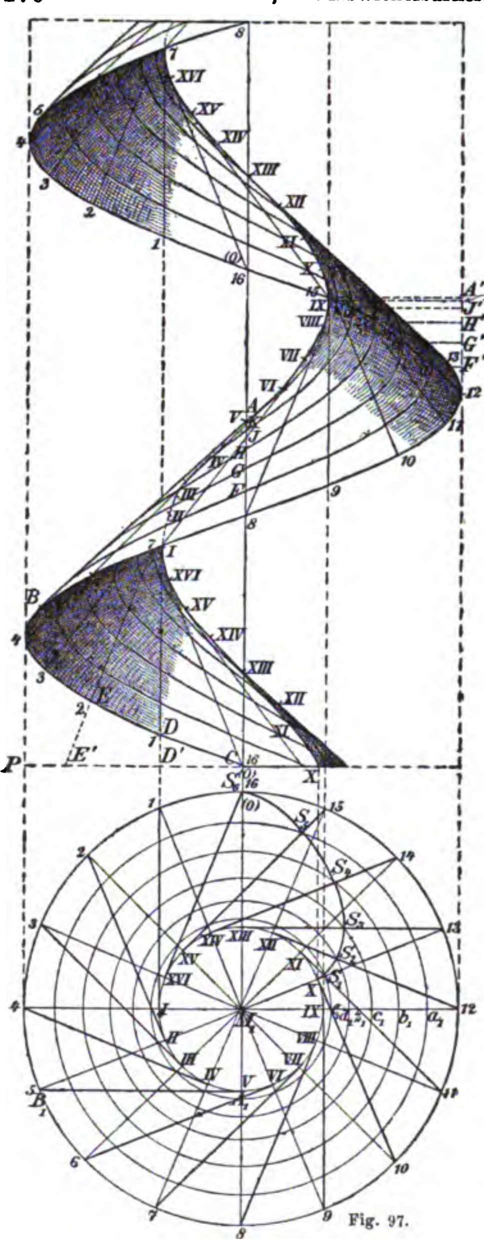
*) Für Kenner der Integralrechnung ist es von Interesse, zu sehen, welche Integrationen bei den obigen Elementarbetrachtungen umgangen sind. In jedem Sektor der Minimalschraubenfläche ist das m^{te} Quadrat in der Weise gröfser, als das erste, dafs, wenn man die betreffenden Seiten gleich dr bezw. dx setzt, $dr = dx\frac{s}{h} = dx\frac{\sqrt{h^2+4\pi^2r^2}}{h}$ und $dx = \frac{h\,dr}{\sqrt{h^2+4\pi^2r^2}}$ setzt. Durch Integration ergiebt sich

$$x = h\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{h^2+4\pi^2r^2}} = h\left|\frac{1}{2\pi}\,{}^e lg\left(2\pi r+\sqrt{h^2+4\pi^2r^2}\right)\right|_0^h$$

$$= \frac{h}{2\pi}\,{}^e lg\left(2\pi r+\sqrt{h^2+4\pi^2r^2}\right) - \frac{h}{2\pi}\,{}^e lg\,h$$

$$= \frac{h}{2\pi}\,{}^e lg\,\frac{2\pi r+\sqrt{h^2+4\pi^2r^2}}{h}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem oben für x gefundenen überein.


Fig. 97.

höhe h, so dafs der Steigungswinkel durch

$$\tan \gamma_1 = \frac{h}{2\pi r_1}$$

bestimmt sei. Dieselbe Neigung hat auch die im Aufrifs zu zeichnende Tangente AB, die irgend welche Länge t erhalte und im Grundrifs als A_1B_1 in der Länge

$$A_1B_1 = t \cos \gamma_1$$

erscheint und dort eine der Tangenten des inneren Kreises r_1 ist. Mit

$$M_1B_1 = r_2$$

ist dann der äussere Kreis zu zeichnen und die entsprechende Schraubenlinie in den Aufrifs zu übertragen. Im Grundrifs der Figur 97 ist A_1B_1 in sechs gleiche Teile eingeteilt, was fünf weitere konzentrische Kreise giebt, denen ebensoviele Schraubenlinien im Aufrifs entsprechen. Die

Grundrifskreise sind in der Figur in 16 gleiche Teile eingeteilt und so mit Zahlen bezeichnet, dafs die Verbindungslinien je zweier gleichzahliger Punkte eine Tangente des Innenkreises giebt. Dasselbe ist im Aufrifs mit den entsprechenden Punkten geschehen, und so sind dort die Tangenten der inneren Schraubenlinien entstanden.

Verlängert man AB über B hinaus bis zu unendlicher Länge, so geben die unendlich fernen Punkte schliefslich Schraubenlinien von unendlich kleinem Steigungswinkel, d. h. die Fläche wird allmählich zur Kegelfläche, deren Geraden die Neigung γ_1 haben. Die äufserste Schraubenlinie der Figur hat den Cylinderradius

$$r_2 = M_1 B_1 = \sqrt{A_1 B_1^2 + A_1 M_1^2} = \sqrt{t^2 \cos^2 \gamma_1 + r_1^2}$$

$$= \sqrt{r_1^2 + t^2 \frac{4\pi^2 r_1^2}{h^2 + 4\pi^2 r_1^2}} = r_1 \sqrt{\frac{h^2 + 4\pi^2 (t^2 + r_1^2)}{h^2 + 4\pi^2 r_1^2}}$$

Ihr Steigungswinkel bestimmt sich aus $\tan \gamma_2 = \frac{h}{2\pi r_2}$.

Eigentlich stellt die so erweiterte Figur nur eine Hälfte der Fläche dar, denn man kann die Tangenten auch über den Berührungspunkt hinaus verlängern. Um zu sehen, wie das fehlende Gebilde bei Verlängerung um t aussieht, hat man nur nötig, die Aufrifsfigur auf den Kopf zu stellen. Beide Teile treffen einander längs der inneren Schraubenlinie, die als gemeinschaftliche Gratlinie beider Teile erscheint.

§ 163) Verlängert man im Aufrifs die Tangente ID um einen ihrer Teile $\frac{t}{6}$, so reicht sie bis zum Punkte D' auf PQ, verlängert man ebenso die Tangente IIE um zwei ihrer Teile, so reicht sie ebenfalls bis PQ. Dies ist der Fall, weil $XVIC$ bis PQ reicht. Folglich: Verlängert man im Grundrifs auf einander folgende Tangenten, z. B. $\overline{I1}$, $\overline{II2}$, $\overline{III3}$ um einen, bezw. 2, 3, ... ihrer Teile, so erhält man die Bilder der Schnittpunkte D', E', ... des Aufrisses im Grundrifs. Verkürzt man umgekehrt auf einander folgende Tangenten um 1, 2, 3,... ihrer Teile, so kommt man schliefslich

auf die Tangentenlänge Null. In der Figur geschieht dies z. B. für die Grundrifsstelle X, weil im Aufrifs X auf PQ liegt. Die Tangenten XIS_1, $XIIS_2$. $XIIIS_3$, ... haben also im Grundrifs der Reihe nach die Längen $\frac{1}{6} t \cos \gamma_1$, $\frac{2}{6} t \cos \gamma_1$, $\frac{3}{6} t \cos \gamma_1$, ... Nun ist aber dort der Bogen $\widehat{XIX}$ nahezu gleich der Tangente XIS_1, also ist nahezu $\frac{2\pi r_1}{n} = \frac{1}{6} t \cos \gamma_1$. Ist aber die Teilzahl n unendlich grofs, so findet absolute Gleichheit statt. Ebenso ist die Tangente $XIIS_2$ dann gleich dem Kreisbogen $\overline{XIIX}$, $XIIS_3$ gleich dem Bogen XIIIX u. s. w. Die Endpunkte der Tangenten liegen also auf einer als **Kreis-Evolvente** bezeichneten Kurve. (Denkt man sich um den Kreis einen z. B. in I befestigsten Faden gewickelt, der so bis X reicht, und wickelt man ihn unter hinreichender Spannung ab, so bewegt sich sein Endpunkt auf der Abwickelungskurve oder Fadenlinie, die eben jenen Namen trägt.) Folglich:

Jede Normalebene zur Achse der abwickelbaren Schraubenregelfläche wird von den erzeugenden Tangenten in einer Kreis-Evolvente geschnitten.

Umgekehrt: Bewegt sich diese Evolvente parallel zu sich selbst in der Richtung der Cylinderachse und dreht sie sich dabei in bestimmter Weise um diese, so legt die Kurve die genannte Schraubenfläche zurück.

(Gewisse andere Schraubenregelflächen, bei denen die erzeugende Gerade die Achse schneidet, geben als Schnitt mit jeder Normalebene der Achsen eine Archimedische Spirale, wie leicht zu zeigen ist.)

Geht man von X aus, so haben im Grundrifs die auf einander folgenden Tangenten bei 16-Teilung die scheinbaren Längen

$$0, \frac{2\pi r_1}{16}, \frac{4\pi r_1}{16}, \frac{6\pi r_1}{16}, \ldots\ldots\ldots$$

Ihre wirklichen Längen sind also der Reihe nach

$$0, \frac{2\pi r_1}{16 \cos \gamma_1}, \frac{4\pi r_1}{16 \cos \gamma_1}, \frac{6\pi r_1}{16 \cos \gamma_1}, \ldots\ldots, \frac{32\pi r_1}{16 \cos \gamma_1} = \frac{2\pi r_1}{\cos \gamma_1} = t.$$

Ähnlich ist es bei 32-Teilung u. s. w.

§ 164) Das senkrechte Profil der Schraubenfläche, d. h. den Schnitt mit jeder durch die Achse gelegten Ebene, erhält man in der wahren Gestalt, indem man die Punkte *12*, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, *IX* senkrecht nach oben auf die Schraubenlinien projiziert, gegebenfalls auch Punkte wie z_1 auf die entsprechenden Tangenten im Aufrifs. Auch kann man die Punkte *8*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *A* der Aufrifsmittellinie an die äufserste Senkrechte gleichnamig auftragen und horizontal herüberprojizieren. (Vergl. Fig. 97.) Die Profillinie nimmt allmählich die volle Steilheit der Tangente $\overline{XIII\,13}$ an und nähert sich in der Aufrifszeichnung dieser asymptotisch, wenn man sie hinreichend nach unten verlängert, wie aus dem Charakter der Kegelfläche folgt, der allmählich angenommen wird.

Die Einteilung der Fläche in kleine Trapeze durch Schraubenlinien und Profilkurven ist in Fig. 98 im Grund- und Aufrifs dargestellt. Jeder Schraubenlinienstreif hat dabei kongruente Trapeze, dagegen sind die Trapeze jedes Streifens zwischen zwei benachbarten Profilkurven unähnlich, auch dann, wenn die Schraubenlinienstreifen, wie in der Figur, isothermische sind, denn die schiefen Winkel nähern sich allmählich rechten Winkeln, je weiter die Schraubenlinien von der Achse entfernt sind.

Das über die Kurve *ABC* und ihre Asymptote *DE* Gesagte ist aus Fig. 98 zu ersehen.

§ 165) Die Abwickelung der Fläche. Wie schon in § 50 angedeutet wurde, gehen bei der Abwickelung der Fläche auf die Ebene die Schraubenlinien in konzentrische Kreise über, während die Geraden der Fläche geradlinige Tangenten dieser Kreise bleiben. Die Orthogonalen der Schraubenlinien müssen, da alle Winkel erhalten bleiben, Radien der konzentrischen Kreise werden, sind also, weil sie Gerade werden, geodätische Linien. Da man aber jeden

ebenen, konzentrischen Kreisring durch Radien und konzentrische Kreise in kleine ähnliche Rechtecke (z. B. Quadrate) einteilen kann, so ist auch die behandelte Schraubenfläche durch die Schraubenlinien und ihre Ortho-

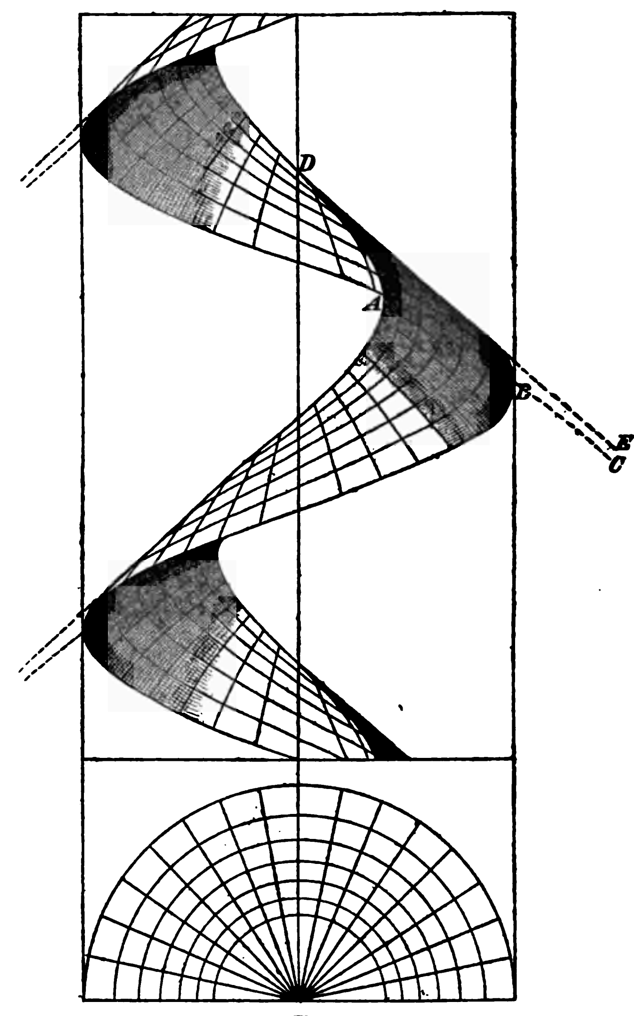


Fig. 98.

gonalschar isothermisch einteilbar. Diese Möglichkeit ist ein besonderer Fall des Theorems von Bour. Das Drehungshyperboloid, auf welches die Fläche demnach abwickelbar ist, erscheint hier in dem Grenzfalle des zunächst doppelt zu denkenden ebenen Kreisringes, bezw. Aufsenkreises. Der gezeichnete Teil der Fläche liegt auf der einen, der nicht gezeichnete auf der anderen Schicht. Jede der beiden Schichten wird übrigens unendlichfach bedeckt. Die isothermische Einteilung wird unten durchgeführt.

(Man kann übrigens durch Inversion die Einteilung der unteren Schicht isothermisch auf die Fläche des Innenkreises übertragen, so dafs man die Übertragung auf die gesamte unendlichfach zu bedekende Ebene erhält.)

Die angenäherte Konstruktion dieser Orthogonalkurven kann mit beliebiger Genauigkeit folgendermafsen erfolgen: Man denke sich im Aufrifs der Fig. 99 sehr viele der Schraubenlinien gezeichnet. Jede erscheint bei den Punkten *0*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* der Mittellinie in ihrer wahren Neigung, so dafs die entsprechenden Normalebenen als gerade Linien erscheinen, die senkrecht zu den Schraubenlinien stehen. Folglich erscheinen die dort auf der Fläche gezeichneten Normalen der Schraubenlinien als Lothe $\overline{0\,I}$, $\overline{1\,II}$, $\overline{2\,III}$ u. s. w., die in der Figur jedesmal bis zu der benachbarten Schraubenlinie reichen. Projiziert man die mit römischen Zahlen bezeichneten Punkte auf die entsprechenden Grundrifskreise, so erhält man im Grundrifs die gleichnamigen Bilder dieser Lote. Im Grundrifs drehe man jedes dieser „Lote“, wobei es seine Gestalt beibehält, soweit, dafs alle einen einzigen Linienzug geben, dem z. B. das Lot $3\,IV$ des Grundrisses angehört. So entsteht eine gebrochene Linie A_1B_1, die leicht als AB in den Aufrifs zu übertragen ist. Je gröfser die Anzahl der eingezeichneten Schraubenlinien ist, um so genauer stellt die gebrochene Linie die Kurve dar, welche alle Schraubenlinien der Fläche orthogonal durchsetzt.

Bilden die wahren Längen der einzelnen Lote eine geometrische Reihe, so handelt es sich um Schraubenlinien-Streifen, die eine isothermische Einteilung geben. Damit ist dann die Einteilung in ähnliche Rechtecke ermöglicht,

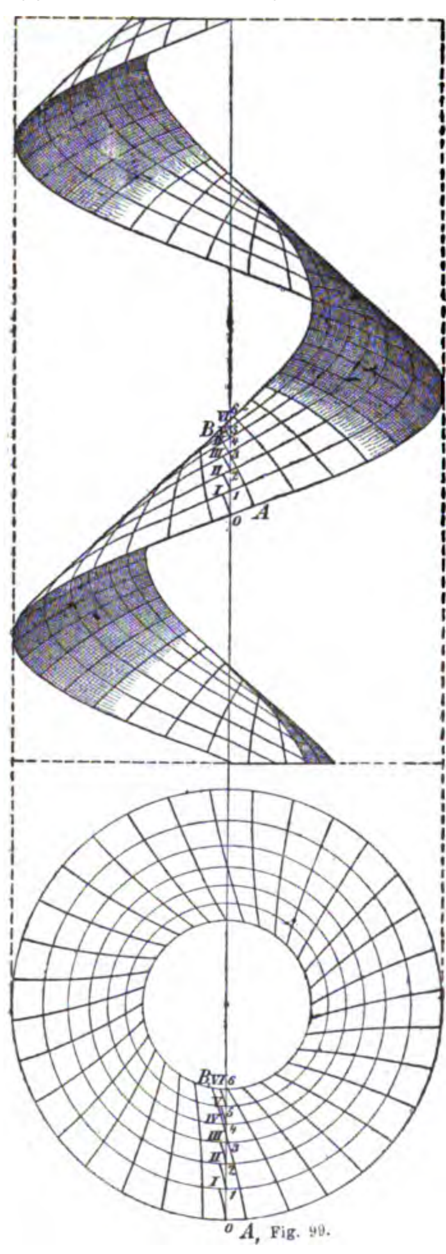


Fig. 99.

wie sie in Figur 99 angenähert dargestellt ist. Der Beweis dafür liegt darin, dafs die Abwickelung auf die Ebene auf eine isothermische Einteilung durch Radien und konzentrische Kreise führt, für welche die geometrische Reihe ebenfalls mafsgebend ist. Rechnend würde dies weiter durchzuführen sein, was unten geschehen soll.

Die Orthogonalkurven der geraden Linien der Fläche werden bei der Abwickelung Orthogonalkurven der Kreistangenten, also Evolventen, durch die übrigens eine isothermische Einteilung nicht erzielt werden kann. Weil in der Ebene die Evolventen sich mit Hilfe der Abwickelung eines gespannten Fadens, der um den Innenkreis gewickelt zu denken ist, sich erzeugen lassen, dieser Faden aber als geodätische Linie auf der Fläche ebenfalls gespannt erscheint, erscheinen die entsprechenden Kurven

auf der Fläche als Evolventen im weiteren Sinne, nämlich als solche der Schraubenlinie. Die Eigenschaften dieser Evolventen lassen sich im Anschlufs an die Kreisevolvente elementar ableiten. Ebenso läfst sich die gesamte Geometrie der Ebene aufserhalb des Innenkreises geodätisch auf die Fläche übertragen, wie aus dem Begriffe der Abwickelung ohne weiteres hervorgeht. — Die abwickelbare Schraubenregelfläche steht also in zweierlei Hinsicht zu den Evolventen in Beziehung.

§ 166) Welcher Kreisringsektor in der Abwickelungsebene entspricht einem Umgange der untersuchten Fläche? Die zu bestimmenden Radien seien x_1 und x_2, letzterer der gröfsere; der zu bestimmende Centriwinkel, im Bogenmafs gemessen, sei ξ. Die Umgangslängen der beiden begrenzenden Schraubenlinien geben die Gleichungen

$$x_2 \xi = \frac{2\pi r_2}{\cos\gamma_2}, \quad x_1 \xi = \frac{2\pi r_1}{\cos\gamma_1},$$

so dafs, da $t^2 = x_2^2 - x_1^2$ ist, folgt

$$\xi^2 (x_2^2 - x_1^2) = \xi^2 t^2 = 4\pi^2 \left[\frac{r_2^2}{\cos^2\gamma_2} - \frac{r_1^2}{\cos^2\gamma_1}\right].$$

Setzt man hier $\cos^2\gamma_2 = \frac{4\pi^2 r_2^2}{h^2 + 4\pi^2 r_2^2}$ und $\cos^2\gamma_1 = \frac{4\pi^2 r_1^2}{h^2 + 4\pi^2 r_1^2}$, so ergiebt eine leichte Umformung

$$\xi^2 = \frac{4\pi^2}{t^2}(r_2^2 - r_1^2) = \frac{4\pi^2}{t^2} \cdot t^2 \cos^2\gamma_1 = 4\pi^2 \cos^2\gamma_1.$$

Der gesuchte Centriwinkel des Kreisringsektors ist also

1) $$\xi = 2\pi \cos\gamma_1.$$

Daraus folgt für den kleineren Radius des Sektors

2) $$x_1 = \frac{2\pi r_1}{\xi \cos\gamma_4} = \frac{r_1}{\cos^2\gamma_1},$$

was zugleich der Krümmungsradius der innersten Schraubenlinie ist.

Für den größeren Radius wird

$$3)\qquad x_2 = \sqrt{x_1^2 + t^2} = \sqrt{\frac{r_1^2}{\cos^4 \gamma_1} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{\cos^2 \gamma_1}}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \gamma_1} \sqrt{r_2^2 \cos^2 \gamma_1 + r_1^2 \sin^2 \gamma_1}.$$

Aus $\frac{x_2}{x_1} = \frac{r_2 \cos \gamma_2}{r_1 \cos \gamma_1}$ oder aus $x_2 = \frac{2\pi r_2}{\xi \cos \gamma_2}$ folgt auch

$$4)\qquad x_2 = \frac{r_2}{\cos \gamma_1 \cos \gamma_2},$$

worin Gleichung 2) als besonderer Fall enthalten ist.

§ 167) **Berechnung der Fläche für einen Umgang des untersuchten Gebildes.** Die Abwickelung ergiebt als Fläche, wenn x_2 und x_1 als Radien jetzt mit R und R_1 bezeichnet werden,

$$F = \frac{\xi}{2\pi} \pi (R^2 - R_1^2) = \frac{\xi}{2} t^2 = t^2 \pi \cos \gamma_1.$$

[Hier ist $\pi (R^2 - R_1^2) = 2\pi \frac{R + R_1}{2} (R - R_1)$, und dabei

$$R + R_1 = \frac{1}{\cos \gamma_1} \left[\frac{r_2}{\cos \gamma_2} + \frac{r_1}{\cos \gamma_1}\right],$$

$$R - R_1 = \frac{1}{\cos \gamma_1} \left[\frac{r_2}{\cos \gamma_2} - \frac{r_1}{\cos \gamma_1}\right].$$

Dies führt zu gewissen Beziehungen zur Guldinschen Regel.]

§ 168) **Koordinatenbeziehungen zwischen der behandelten Schraubenregelfläche, ihrer Grundrißebene und der Abwickelungsebene und quadratische Einteilung der Fläche.**

Für gewisse Zwecke ist es am einfachsten, für die Schraubenfläche r_1 und γ_1 als gegebene Konstanten, die Länge t der Geraden (Tangenten der innersten Schraubenlinie) und den ihren Berührungspunkt bestimmenden Winkel φ, der die Umdrehung um die Schraubenachse mißt, als Veränderliche (Koordinaten) p zu betrachten. Dann ist die

Gleichung $f(t, \varphi) = 0$ die einer beliebigen auf der Fläche liegenden Kurve.

Ist $\tau = t \cos\gamma_1$ die entsprechende Kreistangentenlänge in der Grundrifsebene, so hat die Projektion der Kurve dort die Gleichung $f\left(\frac{\tau}{\cos\gamma_1}, \varphi\right) = 0$, wo φ die der vorigen entsprechende Bedeutung und denselben Wert hat.

In der Abwickelungsebene ist die Tangente t dieselbe wie vorher. Dort sei Φ der die Lage des entsprechenden Berührungspunktes bestimmende Winkel. Wie aber nach § 166 dem Winkel 2π des Schraubenumgangs der Winkel $\xi = 2\pi \cos\gamma_1$ entspricht, so entspricht dem Winkel $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ dort ein Winkel $\Phi = \frac{2\pi}{n} \cos\gamma_1 = \varphi \cos\gamma_1$. Die entsprechende Kurvengleichung ist also $f\left(t, \frac{\Phi}{\cos\gamma_1}\right) = 0$.

Für die isothermische Einteilung ist es noch von Wichtigkeit, die Radien R der Abwickelungsebene zu untersuchen. Setzt man den veränderlichen Radius der Grundrifsebene gleich r, so ist nach Gleichung 3)

$$R = \frac{1}{\cos^2\gamma_1} \sqrt{r^2 \cos^2\gamma_1 + r_1^2 \sin^2\gamma_1},$$

also

$$r = \sqrt{R^2 \cos^2\gamma_1 - r_1^2 \tan^2\gamma_1}. \tag{1}$$

Soll nun der Kreisring der Abwickelungsebene durch konzentrische Kreise isothermisch eingeteilt sein, so haben die Kreisradien Werte R anzunehmen, die in geometrischer Reihe auf einander folgen, also z. B. die Werte

$$R_1, R_1 e^{\frac{2\pi}{n}}, R_1 e^{\frac{4\pi}{n}}, R_1 e^{\frac{6\pi}{n}}, \ldots \tag{2}$$

Die Neigungen Φ der Radien hingegen haben einer arithmetischen Reihe zu folgen, und zwar der Reihe

$$0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots, \tag{3}$$

wenn die Einteilung eine quadratische sein soll.

Soll demnach die entsprechende quadratische Einteilung der Schraubenfläche konstruiert werden, so hat man dem Radius r in der Grundrifsebene nach Gleichung 1) der Reihe nach z. B. folgende Werte zu geben:

$$\sqrt{R_1^2\cos^2\gamma_1 - r_1^2\tan^2\gamma_1},\quad \sqrt{R_1^2 e^{\frac{4\pi}{n}}\cos^2\gamma_1 - r_1^2\tan^2\gamma_1},$$
$$\sqrt{R_1^2 e^{\frac{8\pi}{n}}\cos^2\gamma_1 - r_1^2\tan^2\gamma_1},\ldots,$$

oder, da $R_1\cos^2\gamma_1 = r_1$, also $R_1^2\cos^4\gamma_1 = r_1^2$ und $R_1^2\cos^2\gamma_1 = \frac{r_1^2}{\cos^2\gamma_1}$ ist, die Werte

$$2)\quad \frac{r_1}{\cos\gamma_1}\sqrt{1-\sin^2\gamma_1},\quad \frac{r_1}{\cos\gamma_1}\sqrt{e^{\frac{4\pi}{n}} - \sin^2\gamma_1},$$
$$\frac{r_1}{\cos\gamma_1}\sqrt{e^{\frac{8\pi}{n}}\sin^2\gamma_1},\quad \frac{r_1}{\cos\gamma_1}\sqrt{e^{\frac{12\pi}{n}} - \sin^2\gamma_1},\ldots,$$

wobei der erste Posten sich auf r_1 reduziert.

Man erkennt, dafs der Zusatz $-\sin^2\gamma_1$ unter der Klammer immer unwesentlicher gegen den Nachbarposten $\left(e^{\frac{m\pi}{n}}\right)^2$, wird, je weiter man geht, dafs also die Reihe allmählich den Charakter einer geometrischen Reihe annimmt.

Die Ausgangspunkte für die Projektionen der Orthogonalkurven haben am Innenkreise des Grundrisses, wenn man eine quadratische Einteilung der Fläche zeichnen will, unter den Winkel-Abständen $\frac{2\pi}{n\cos\gamma_1}$ aufeinander zu folgen, also z. B. der Reihe

$$3)\qquad 0,\ \frac{2\pi}{n\cos\gamma_1},\ \frac{4\pi}{n\cos\gamma_1},\ \frac{6\pi}{n\cos\gamma_1},\ldots$$

zu entsprechen. Es sei betont, dafs es sich hierbei nur um Ausgangspunkte, nicht um Polarkoordinaten handelt. Die vollständige Übertragung der letzteren sei dem Leser als Übungsbeispiel überlassen.

Nach den Gleichungen 2) und 3) hat man zu verfahren, wenn die Einteilung der Schraubenregelfläche in kleine Quadrate in Grund- und Aufrifs dargestellt werden soll. Danach ist die genaue Herstellung der Figur 99 zu behandeln. Hat man die Kreise des Grundrisses nach Formel 2) gezeichnet, so sind deren äufserste Punkte rechts senkrecht nach der Linie AB des Aufrisses von Figur 98 zu übertragen, wodurch die Schraubenlinien genau bestimmt sind.

Die Betrachtung ist nur in konstruktiver Hinsicht wichtig, da die gesamte Geometrie der Ebene durch den Abwickelungsbegriff ohnehin im Prinzip auf die Fläche übertragen ist, neues also nicht gewonnen werden kann.

Mit der Zeichnung der quadratischen Einteilung ist zugleich die konforme Abbildung des gezeichneten Flächenteils auf ein Rechteck bezw. auf einen unendlichen Parallelstreifen der Ebene ausgeführt, wobei die Grenzschraubenlinien den begrenzenden Geraden des Parallelstreifens, die übrigen Schraubenlinien den einteilenden Parallelen, die Orthogonalkurven der orthogonalen Parallelenschar entsprechen.

ϑ) Die Schraubenröhrenfläche.

§ 169) Die beiden ersten Definitionen. Eine Kugel vom Radius r bewege sich so, dafs ihr Mittelpunkt auf einer gegebenen Schraubenlinie a der gewöhnlichen Art wandert. Der Kreiscylinder der letzteren habe den Radius $r_1 = M_1 T_1$ (Figur 100, Grundrifs). Die Steigung sei durch den Winkel γ gegeben, so dafs die Ganghöhe $h = 2\pi r_1 \tan\gamma$ ist. Damit ist zugleich die Tangente UZ für den Punkt R des Aufrisses dieser Schraubenlinie bestimmt. Diejenige Fläche, welche die bewegte Kugel in allen Lagen umhüllt, heifst die (gewöhnliche) Schraubenröhrenfläche. (Grenzfälle sind die kurz als Wulst bezeichnete Drehungscyklide und der Kreiscylinder. Andere Grenzfälle sind durch $r = 0$, $r_1 = 0$, $r = \infty$, $r_1 = \infty$ gegeben.)

Zwei benachbarte Kugeln schneiden dabei einander in einem Kreise, dessen Ebene senkrecht zur Centrale der beiden Kugeln steht. Für den Grenzfall unendlicher Nähe fällt die

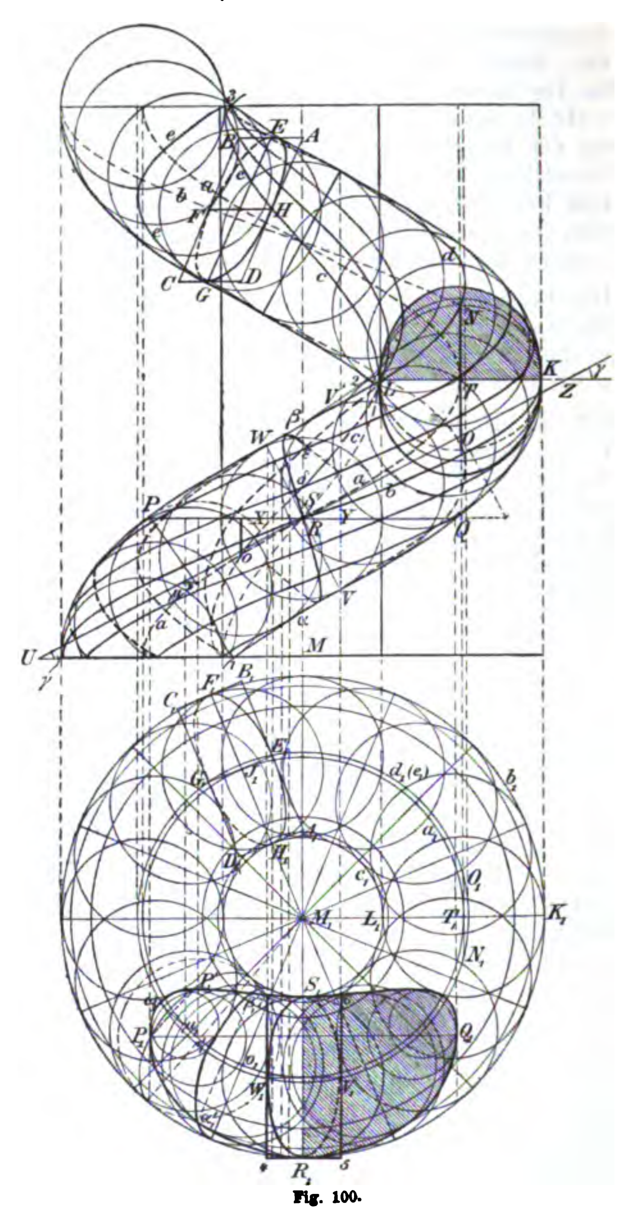


Fig. 100.

Centrale mit der Tangente der Schraubenlinie zusammen und der Schnittkreis wird ein gröfster Kreis der beiden Kugeln, dessen Ebene senkrecht zur entsprechenden Tangente der Schraubenlinie steht. Daraus folgt, dafs jede einbeschriebene Kugel die Röhrenfläche in einem solchen Kreisschnitte berührt. Die Fläche entsteht also auch auf folgende Weise:

Eine Kreislinie bewege sich so, dafs ihr Mittelpunkt auf einer gegebenen Schraubenlinie wandert, ihre Ebene aber stets normal gegen die augenblickliche Bewegungsrichtung ihres Mittelpunktes bleibt.

Macht der Kreis während dieser Bewegung Drehungen um die Tangente des Mittelpunktsweges als Achse, so wird an der Gestalt der Fläche nichts geändert, nur legen dann die Punkte des Kreises auf der Fläche besondere Wege zurück. In einem besondern Falle erfolgt die Bewegung stets senkrecht gegen den Kreisschnitt, was beide Guldinschen Regeln in gewissem Sinne fortbestehen läfst, die also für die Fläche allgemeine Geltung haben, wie auch die Bewegungen erfolgen mögen. In einem anderen besonderen Falle bewegen sich die Punkte der Kreislinie auf Schraubenlinien, welche dieselbe Achse und dieselbe Ganghöhe haben, wie der Mittelpunktsweg, während die Steigungswinkel verschiedene sind.

In der Lage $WSVR$ erscheint der bewegte Kreis im Aufrifs als gerade Linie, ebenso in einer darüber befindlichen Lage, wobei die Mittellinie der Figur in symmetrischer Weise geschnitten wird. Diese Lagen kehren nach oben und unten in periodischem Wechsel wieder. Im Grundrifs erscheint der Kreisschnitt stets als eine Ellipse, deren eine Halbachse gleich r ist, während die andere sich als $r \sin \gamma$ herausstellt. Vgl. $W_1 S_1 V_1 R_1$.

§ 170) Die Verzeichnung im Grund- und Aufrifs ist wie bei allen Schraubenflächen, mit beliebiger Genauigkeit durchzuführen, jedoch nicht absolut genau. Zunächst ist der Mittelpunktsweg a im Grund- und Aufrifs zu zeichnen, und zwar wendet man zweckmäfsig im Grundrifs die Kreisteilung an, die durch Senkrechte in den Aufrifs zu übertragen ist. Da die Kugel in allen Lagen als Kreis erscheint, hat man um die Teilpunkte Kreise mit dem Radius r zu legen. Im

Grundrifs werden die Kreise von zwei konzentrischen Kreisen umhüllt, deren Radien die Länge $(r_1 + r)$ bezw. $(r_1 - r)$ haben. Im Aufrifs erscheinen die umhüllenden Linien als Kurven konstanten Abstandes zur Schraubenlinie des Mittelpunktsweges (äquidistante Kurven, auch Parallelkurven genannt). Folgen die einzelnen Lagen sehr dicht aufeinander, so werden beide Kurven durch die Kreisbogen so genau ausschattiert, dafs eine besondere Zeichnung für sie überflüssig wird.

Diese Parallelkurven zeigen an den mit *1*, *2*, *3* bezeichneten Stellen des Aufrisses dieselben Eigentümlichkeiten, wie die in Bd. I Figur 218 dargestellten Parallelkurven der Ellipse, die für die Orthogonalprojektion der Drehungscyklide in allgemeiner Lage von Wichtigkeit waren. Hier können ebenso wie dort die bei *1*, *2*, *3* gezeichneten kleinen Bogendreiecke auftreten. Die eine Schrägseite eines solchen Dreiecks zeigt dann an, wie weit die eine Kontur sichtbar bleibt, während alles andere unsichtbar ist.

§ 171) Die begrenzenden Grundrifskreise geben im Aufrifs die äufserste und die innerste Schraubenlinie der Fläche. Da diese dort durch die Punkte R und den damit zusammenfallenden V gehen, und da auch sie die Ganghöhe h haben, so sind sie leicht einzuzeichnen. Alle Kreisschnitte der Fläche erscheinen im Grundrifs als kongruente Ellipsen. Das „Achsenkreuz“ dieser Ellipsen erhält man durch Projektion der Aufrifspunkte V, W, R und S in den Grundrifs. Das so entstehende Achsenkreuz V_1, W_1, R_1, S_1 ist im Grundrifs für alle Lagen dasselbe. Es ist also für jede beliebige Lage leicht in den Aufrifs zu übertragen und giebt dort neue Achsenkreuze, wie z. B. F, H, G, E, deren Eckpunkte zur äufsersten und innersten und, wenn man sich so ausdrücken will, zur obersten und untersten Schraubenlinie (in Bezug auf den Kreisschnitt) gehören. An den beigeschriebenen Zahlen erkennt man die zusammengehörigen Punkte. Die oberste und die unterste Schraubenlinie erscheinen im Aufrifs kongruent. Durch die Achsenkreuze des Aufrisses erhält man die Parallelogramme, denen die Ellipsen der Kreisschnitte einzuzeichnen sind.

Jeder der konzentrischen Kreise des Grundrisses, der

zwischen dem äufsersten und innersten liegt, kann als der Fläche angehörig betrachtet werden. Er schneidet die unterste der gezeichneten Ellipsen in einen oberen und einen unteren (unsichtbaren) Punkt. Überträgt man diese Punkte durch Senkrechte auf die Gerade PQ des Aufrisses, so erhält man die Schnittpunkte für die beiden Schraubenlinien des Aufrisses, die jenem Kreise entsprechen.

So kann man z. B. folgende Aufgabe lösen: Jeder Kreisschnitt soll in gleiche Teile eingeteilt werden, durch die Teilpunkte aber sollen in Grund- und Aufrifs Schraubenlinien gelegt und so die Fläche in ein bestimmtes System von Vierecken zerlegt werden.

Die Lösung geschieht so, dafs man einen Kreis mit dem Durchmesser $VW = 2r$ in gleiche Teile teilt und die Teilpunkte auf VW projiziert. Die so entstehenden Punkte sind senkrecht in den Grundrifs hinab zu projizieren, wo sie die unterste der Ellipsen in die entsprechenden n Teile zerlegen. Im Grundrifs legt man durch die Punkte konzentrische Kreise, im Aufrifs die entsprechenden Schraubenlinien. Die Teilung ist im Grundrifs durch kongruente Ellipsen zu vollenden, die unter gleichen Bogenabständen aufeinander folgen und leicht in den Aufrifs zu übertragen sind. (Um eine Rechtecksteilung handelt es sich dabei nicht.)

Zu einer Teilung können die Punkte $VWRS$ gehören, nötig aber ist dies nicht. Die andere Teilung kann nach einem Umgange im Grundrifs schliefsen, nötig aber ist auch dies nicht, nur wird im Nichtfalle die Zeichnung weniger deutlich, da im Grundrifs ein Gewirr von Linien entsteht, besonders dann, wenn die Teilung erst nach unendlich vielen Umgängen schliefst.

Schliefst die Teilung nach einem Umgange (der Ellipsen im Grundrifs), und zeichnet man nur das sichtbare, so wird bei genauer Zeichnung die Aufrifszeichnung so plastisch, dafs es einer besonderen Schattierung nicht bedarf, wenn ein körperlicher Eindruck erzielt werden soll.

Jeder zur Achse der Röhrenfläche konzentrische Kreis-Cylinder, der die Fläche schneidet, schneidet sie in einer Schraubenlinie.

§ 172) Die horizontale Schnittlinie der Schraubenröhrenfläche. Jede Normalebene zur gemeinschaftlichen Schraubenlinie der Fläche schneidet sie so, dafs im Aufrifs eine horizontale Gerade entsteht, während sich im Grundrifs lauter kongruente in sich geschlossene Linien entstehen. Jede der letzteren hat eine radiale Symmetrieachse, denn die auf den Kopf gestellte Röhrenfläche giebt dieselbe Schnittfigur, wie die ursprüngliche. Wählt man PQ im Aufrifs als Schnittebene, so braucht man nur die Schnittpunkte dieser Geraden mit den gezeichneten Schraubenlinien auf die entsprechenden Grundrifskreise senkrecht hinab zu projizieren, um die zugehörigen Punkte der dortigen Schnittlinie zu finden.

Auch die Tangenten der letzteren sind konstruierbar. Die Ebene PQ schneidet nämlich jede der von ihr getroffenen der einbeschriebenen Kugeln in einem kleineren oder gröfseren Kreise, der im Grundrifs als konzentrischer Kreis des entsprechenden Kugelkreises erscheint. Die gesuchte Schnittkurve umhüllt im Grundrifs alle diese kleineren Hilfskreise. Jeder der letzteren schneidet die zugehörige Ellipse des bewegten Kreises in zwei Punkten, die zur Schnittkurve gehören. Die zu diesen Punkten gehörigen Kreistangenten sind Tangenten der Schnittlinie. Der um μ_1 gelegte Hilfskreis ist der kleinste, der in Betracht kommt. Sein Radius ist gleich der kleineren Halbachse der Grundrifsellipse. Die Bedeutung der sonstigen Buchstaben der Figur wird man beim Nachkonstruieren leicht erkennen. Einige der Hilfskreise sind in Figur 100 gezeichnet. Die eine Hälfte der Schnittfläche ist dort schraffiert.

Bewegt sich diese Schnittfläche senkrecht nach oben und dreht sie sich zugleich in bestimmter Weise um die Hauptachse der Figur (100), so entsteht ebenfalls die Schraubenröhrenfläche. Die Drehung mufs proportional zum Aufsteigen erfolgen und für die Ganghöhe h eine volle Umdrehung geben. Damit ist eine dritte Entstehungsweise der Fläche gegeben.

§ 173) Ist F_1 der Inhalt dieser Schnittfläche, so folgt nach dem Cavalierischen Prinzip für jeden Umgang der körperliche Inhalt $J = F_1 h$. Da aber der Kreisschnitte wegen auch die Guldinsche Inhaltsformel gilt, so ist dieser

körperliche Inhalt auch gleich dem Produkte aus Kreisschnittfläche und Mittelpunktsweg, also

$$J = \pi r^2 s = \pi r^2 \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r_1^2}.$$

Daraus folgt

$$F_1 h = \pi r^2 \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r_1^2},$$

der Inhalt der horizontalen Schnittfläche ist daher

$$F_1 = \frac{\pi r^2}{h} \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r_1^2} = \pi r^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r_1}{h}\right)^2}$$

$$= \pi r^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\tan\gamma}\right)^2} = \frac{\pi r^2}{\sin\gamma}.$$

(Vergl. § 39 und 40.)

Für den Umfang der Schnittfläche besteht eine so einfache Beziehung nicht, weil das Cavalierische Prinzip nicht für die Mantelflächen Geltung hat.

§ 174) Die senkrechte Profilkurve des zur Schraubenröhrenfläche gehörigen Gewindes. Jede der auf der Röhrenfläche liegenden Schraubenlinien hat im Aufrifs Stellen mit senkrecht erscheinender Tangente. Diese Punkte werden gefunden, indem man im Grundrifs einen horizontalen Radius zieht und die Schnittpunkte mit den konzentrischen Kreisen auf die entsprechenden Schraubenlinien projiziert. Verbindet man die Punkte mit einander, so erhält man mit beliebiger Genauigkeit das gezeichnete Profil, dessen eine Hälfte in der Figur schraffiert ist.

Man findet die Punkte auch folgendermafsen: Die Senkrechte $\alpha\beta$ im Aufrifs schneidet die Schraubenlinien in Punkten $\delta, \varepsilon, \ldots,$ d. h. in Höhenabständen $S\delta$, $S\varepsilon$, $S\beta$ u. s. w. Diejenigen Punkte der Schraubenlinie des Aufrisses, die von KL die entsprechenden Abstände haben, gehören der Schnittkurve an.

Auch die Kreise, in denen die Schnittebene die sie treffenden Kugeln schneidet, können wie vorher zur Konstruktion benutzt werden, denn alle diese Kreise werden von der Profilkurve umhüllt.

Bewegt sich die Profilkurve längs einer der gezeichneten Schraubenlinien unter Drehung um die Achse, so entsteht die Schraubenröhrenfläche ebenfalls. Damit ist eine vierte Entstehungsweise der Fläche gegeben.

§ 175) Ist F_2 der Inhalt der Fläche des senkrechten Profilschnittes, so erhält man nach § 37 als körperlichen Inhalt für einen Umgang, wenn ϱ_2 der Schwerpunktsabstand von der Achse ist,

$$J = 2\pi\varrho_2 F_2,$$

während nach Guldin war

$$J = \pi r^2 \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r_1^2}.$$

Demnach ist

$$\varrho_2 F_2 = \frac{r^2}{2}\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r_1^2}$$

und damit ist das statische Moment der senkrechten Profilfläche in Bezug auf die Achse bestimmt. Dagegen sind ϱ_2 und F_2 auf diesem Wege nicht zu finden.

§ 176. Aufgabe. Eine Reihe von Berührungskugeln in die Schraubenröhrenfläche so einzuzeichnen, dafs jede die beiden Nachbarkugeln berührt.*) (Figur 101.)

Die Centrale je zweier Nachbarkugeln ist gleich $2r$, der Berührungspunkt B_n der Kugeln ist der Halbierungspunkt der Centrale. Sämtliche Kugeln erscheinen als Kreise. Ist die Schraubenlinie der Kugel-Mittelpunkte in Grund- und Aufrifs gezeichnet, und ist im Aufrifs B_2 ihr Schnittpunkt mit der senkrechten Mittellinie der Figur, so lege man um B_2 mit dem Radius r Kreisbogen, welche zwei Punkte M_2 und M_3 des Mittelpunktsweges bestimmen. Projiziert man diese Punkte in den Grundrifs, so erhält man dort die Centrale $M'_2 M'_3$, die im Grundrifs für alle Kugelpaare in derselben Länge erscheint. Dort sind also die Punkte

*) In der Figur ist die Schraffierung von B_5 bis M_6 nicht ganz richtig begrenzt. Der Leser wird die Begrenzung nach den bisherigen Angaben leicht korrigieren.

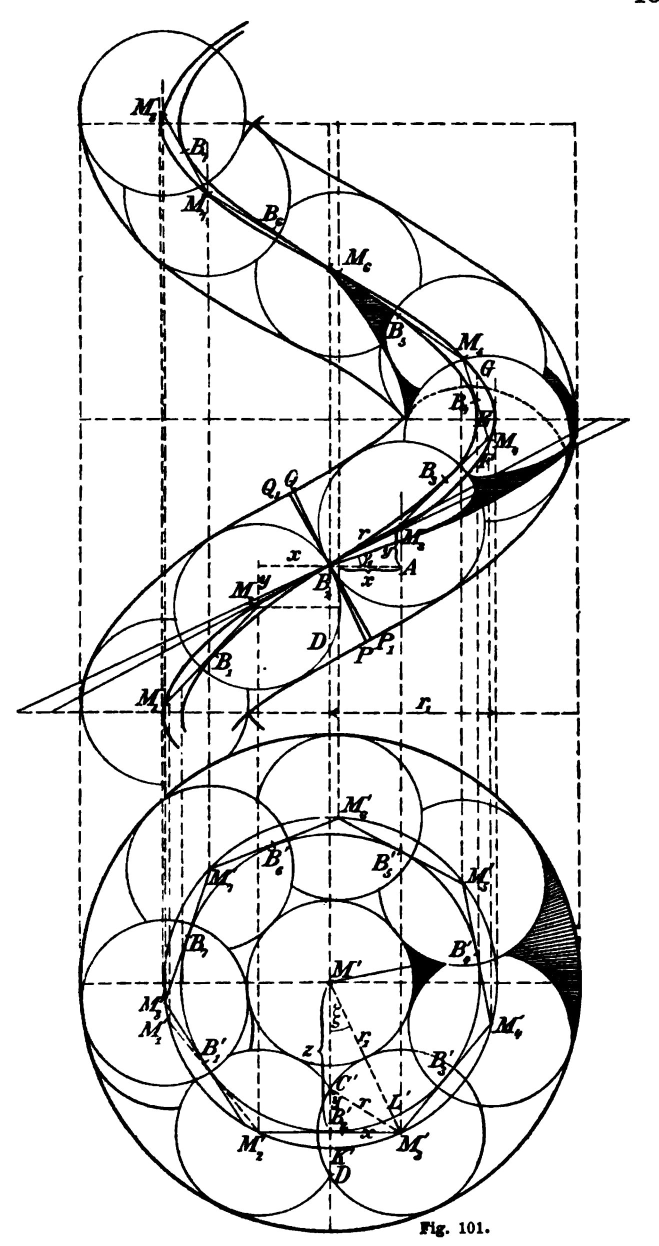


Fig. 101.

$M'_1, M'_2, M'_3, M'_4, \ldots M'_n$ leicht einzutragen. Die Reihe braucht selbstverständlich nicht für einen Umgang zu schliefsen. Die Kugelkreise sind nun zu zeichnen. Die Halbierungspunkte $B'_1, B'_2, B'_3 \ldots$ der Centralen ebenfalls.

Heraufprojektion auf die Schraubenlinie der Mittelpunkte im Aufrifs giebt dort die entsprechenden Punkte $M_1, M_2, M_3 \ldots$, auf deren Verbindungslinien M_1M_2, M_2M_3, $M_3M_4, \ldots$ die Berührungspunkte B_n ebenfalls als Halbierungspunkte erscheinen.

Die Schraubenlinie der Punkte B_n hat dieselbe Ganghöhe wie die der Punkte M. Im Grundrifs erscheint sie als Kreis, so dafs die äufsersten Punkte nach rechts und links durch Projektion aus dem Grund- in den Aufrifs zu bestimmen sind.

Diese Schraubenlinie soll als die Berührungsschraubenlinie bezeichnet werden. Sie ist etwas steiler als die der Kugelmittelpunkte. Die Normalen PQ und P_1Q_1 gehören den beiden Linien an und lassen den Unterschied der Steigungswinkel erkennen. Dadurch unterscheidet sich die Schraubenröhrenfläche wesentlich von der Drehungscyklide, bei der PQ und P_1Q_1 zusammenfallen.

§ 177) Die Berührungsschraubenlinie durchschneidet sämtliche Kugeln unter konstantem Winkel, der aber im allgemeinen kein rechter ist. Letzteres ist nur in den Sonderfällen der Drehungscyklide und des Cylinders der Fall. Allgemein würde es der Fall sein, wenn die Centralen $M_n M_{n+1}$, wie es im Grundrifs den Anschein hat, Tangenten dieser Schraubenlinie wären. Dafs es nicht der Fall ist, zeigt sich sofort, wenn man zur Aufrifslinie M_2M_3 eine benachbarte höher liegende zeichnet. Dabei heben sich die Punkte M_2, M_3 und B_2 um dieselbe Höhe $\frac{h}{n}$, und die neue Sehne liegt im ganzen Verlaufe höher als die Gerade M_2M_3. Der Punkt B_2 liegt also aufserhalb der letzteren. Die Aufrifslinie $M_n M_{n+1}$ sind also nicht Tangenten der dort gezeichneten Schraubenlinie der B, obwohl es auch dort den Anschein hat.

Die Eigenschaft, sämtliche Kugeln unter konstantem Winkel zu schneiden, behält die Berührungsschraubenlinie

auch bei, wenn man die Schraubenröhrenfläche mit der einbeschriebenen Kugelreihe der Inversion unterwirft. Dabei werden die Kugeln wieder Kugeln, die Berührungskreise, d. h. die Kreisschnitte der Fläche wieder Kreisschnitte. Die Berührungspunkte der Kugeln bleiben solche, die Mittelpunkte der Kugeln gehen aber nicht in Mittelpunkte der neuen Kugeln über. In dieser Hinsicht also ist die Kurve der Punkte B wichtiger als die der Punkte M.

So leicht die obige Konstruktion erschien, so enthält sie doch transcendentes, da die Schraubenlinie der Mittelpunkte als konstruiert vorausgesetzt wurde. Schon die Längen-Berechnung der Geraden $M'_2 M'_3$ des Grundrisses führt auf eine transcendente Gleichung, wenn z. B. der Cylinderradius r_1 der Schraubenlinie der M_n, der Radius r der Berührungskugeln und die Ganghöhe h sämtlicher auf der Fläche liegender Schraubenlinien gegeben ist. Für jeden Umgang der Schraubenlinie der Mittelpunkte M hat man dann die Länge $l_M = \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r_1^2}$, so dafs der Steigungswinkel γ_M sich berechnet aus $\tan \gamma_M = \frac{h}{2\pi r_1}$, oder aus $\cos \gamma_M = \frac{2\pi r_1}{l_M}$, oder aus $\sin \gamma_M = \frac{h}{l_M}$. Bezeichnet man in Figur 101) $B_2 A = B'_2 M'_3$ mit x_1, $A M_3 = B'_2 C'$ mit y, so hat man zunächst

1) $$x^2 + y^2 = r^2.$$

Bezeichnet man ferner $B'_2 M'$ mit z, so folgt

2) $$z^2 + x^2 = r_1^2.$$

Aus 2) und 1) folgt

3) $$z^2 - y^2 = r_1^2 - r^2 = t^2,$$

wobei t die Länge der im Grundrifs von M' aus an die Kreise gelegten Tangenten ist. Der um M' gelegte Orthogonalkreis der Berührungskreise ist also kleiner, als der Kreis der B'.

Für den Winkel $M'_3 M' K' = \xi$ hat man die Gleichung

4) $$\sin \xi = \frac{x}{r_1},$$

für den Bogen $\widehat{K'M'_3} = s$ hat man also

$$\hat{s} = r_1 \xi = r_1 \arcsin \frac{x}{r}.$$

Zugleich ist

$$\hat{s} = \frac{y}{\sin \gamma_M} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{\sin \gamma_M} = \frac{1}{h} \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r_1^2} \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Demnach ist x zu berechnen aus der transcendenten Gleichung

$$5) \qquad r_1 \arcsin \frac{x}{r} = \frac{1}{h} \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r_1^2} . \sqrt{r^2 - x^2}$$

oder aus

$$5^*) \qquad \frac{x}{r} = \sin \left[\frac{1}{r_1 h} \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r_1^2} . \sqrt{r^2 - x^2} \right].$$

Diese Gleichung kann nicht allgemein aufgelöst werden, sondern nur dann, wenn r, r_1 und h durch bestimmte Zahlenwerte gegeben sind. Dann geschieht die Berechnung von x mit beliebiger Genauigkeit nach den üblichen Methoden. (Vergl. z. B. Anhang z. method. Lehrbuch der El. Math. des Verfassers, allgemeine Ausgabe.)

§ 178) Aufgabe. Die Figur 101 soll dahin vervollständigt werden, dafs die durch die äufserste und innerste Schraubenlinie bestimmte Minimalschraubenfläche, so weit sie sichtbar ist, durch Schraffierung hervorgehoben wird, so dafs die Kreise in höherem Grade als Kugeln erscheinen.

An einigen Stellen der Figur ist die Schraffierung angedeutet. Die Durchschnitte zwischen jeder Kugel und der Minimalschraubenfläche erscheinen als eigentümlich gestaltete Ovale. (Jede horizontale Schraffierungslinie des Aufrisses liegt in einer bestimmten Höhe, also in einer Horizontalebene, welche die betreffende Berührungskugel in einem bestimmten Kreise schneidet, der im Grundrifs als konzentrisch zu dem betreffenden Kugelkreise erscheint. Der horizontalen Geraden entspricht im Grundrifs ein von M' ausgehender Radius, der die Kugel dort durchstöfst, wo der Hilfskreis von diesem Radius geschnitten wird.)

§ 179) **Die Krümmungslinien der Schraubenröhrenfläche.** In Figur 102 sind die Kreisschnitte so angeordnet, dafs sie unter gleichen Abständen aufeinander folgen. Man denke sich durch regelmäfsige Einschaltung weiterer Kreisschnitte die Anzahl vervielfacht, so dafs z. B. statt der 16 Stücke für einen Umgang 32, 64, 128 u. s. w. erhalten werden. Je gröfser die Zahl ist, mit um so gröfserem Rechte darf man jeden der entstandenen Flächenringe als Mantel eines beiderseits symmetrisch abgeschrägten Kreiscylinders betrachten, dessen geradlinige Seitenlinien parallel zur Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Schrägschnittflächen ist.

Der Inhalt bezw. Mantel eines solchen Cylinders ist $J = F \cdot h'$ bezw. $M = u \cdot h'$, wobei F die Fläche, u der Umfang des Normalschnittes zur Achse ist. Dadurch bestätigt sich zunächst die Geltung der **beiden** Guldinschen Regeln für die vorliegende Fläche.

Die Seitenkanten des Cylinders sind dabei, wie es die Guldinsche Flächenregel erfordert, **Orthogonalkurven der Kreisschnitte.** Diese können mit beliebiger Annäherung dadurch konstruiert werden, dafs man von Kreisschnitt zu Kreisschnitt „Gerade" zieht, die parallel zu den geraden Verbindungslinien der entsprechenden Mittelpunkte, also zu M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4 u. s. w. sind, wobei von Geraden selbstverständlich nur dann gesprochen werden kann, wenn die Kreisschnitte unendlich nahe aufeinander folgen.

In Figur 102 ist diese Konstruktion durchgeführt, und zwar der Deutlichkeit halber für **weit auseinanderliegende Kreisschnitte, so dafs dort auf Genauigkeit nur geringer Anspruch gemacht werden kann.** Die Schar der Orthogonalkurven ist im Grund- und Aufrifs in das Polygon der Hilfsgeraden einzuzeichnen. Die Kurven entsprechen stückweise einer Guldinschen Bewegung des Kreisschnitts um einen wandernden Punkt μ_1.

Damit ist das System der beiden Arten von Krümmungslinien mit beliebiger Genauigkeit konstruiert.

Die Kreisschnitte sind Krümmungslinien, weil die in den Punkten jedes einzelnen errichteten Lote einander

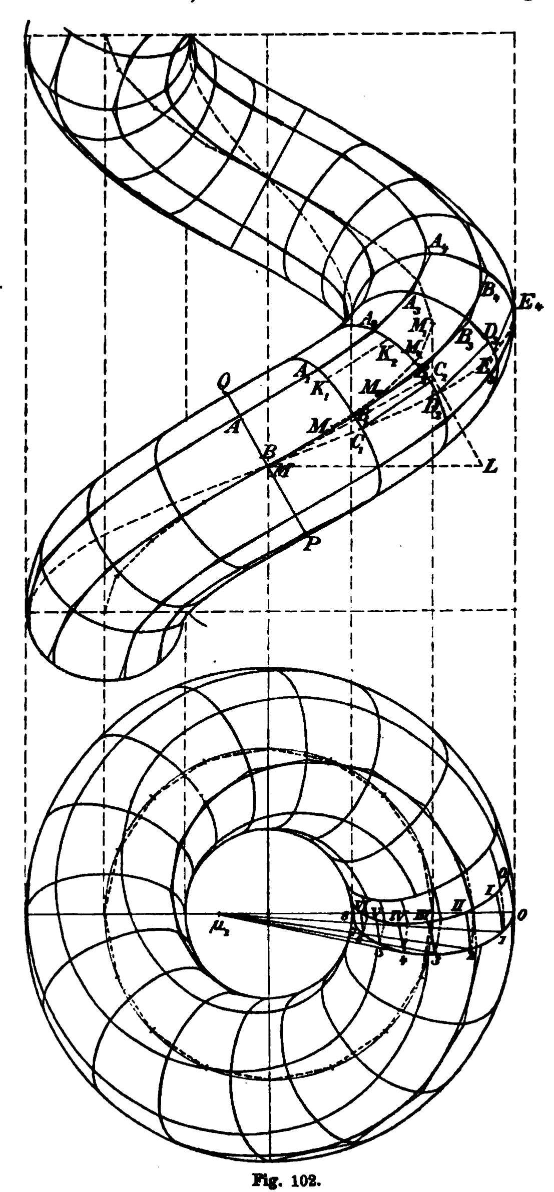


Fig. 102.

schneiden, nämlich die Mittelpunkte der Kugel. Die zweite Schar von Krümmungslinien ist orthogonal zu den Kreisschnitten, entspricht also den gezeichneten Kurven. Die längs einer Kurve zweiter Art auf der Fläche errichteten Lote schneiden einander der Reihe nach paarweise längs einer Gratlinie, die mit Hilfe der Krümmungscyklide zu bestimmen ist.

Die Schmiegungsebenen der Krümmungslinien zweiter Art sind längs eines Kreisschnittes parallel zu der Schmiegungsebene des Mittelpunktsweges für den Durchschnittspunkt mit der Ebene dieses Kreisschnittes. Sämtliche Linien haben dort ein und dieselbe Krümmungsachse, die der Schraubenlinie der Mittelpunkte, über die noch besonders zu sprechen ist. Weiteres über den Verlauf der Krümmungslinien folgt unten.

§ 180) Krümmungscyklide, Krümmungsradien und Gaufs'sches Krümmungsmafs der Schraubenröhrenfläche.

Jeder Kreisschnitt und die Krümmungsachse für den zugehörigen Punkt der Schraubenlinie der Kugelmittelpunkte bestimmen eine Drehungscyklide, die eben durch Drehung des Kreisschnittes um die Krümmungsachse entsteht. Diese Cyklide und die Schraubenröhrenfläche fallen längs des Kreisschnittes zusammen. Die Kreisschnitte zweiter Art der Cyklide sind die Krümmungskreise für die entsprechenden Krümmungslinien der Schraubenröhrenfläche. Da die Krümmungsverhältnisse der Drehungscyklide bekannt sind, und sie mit denen der Schraubenfläche nach dem Gesagten übereinstimmen, und da endlich alle hierhergehörigen Krümmungscykliden kongruent sind, so sind die Krümmungsverhältnisse für jede Stelle der Schraubenröhrenfläche bekannt. Sind wieder r_1, γ oder h und r gegeben, so ist in jedem Punkte der Fläche der eine Krümmungsradius gleich r, der andere ist gleich dem Radius der entsprechenden äufseren Berührungskugel der Krümmungscyklide, also, wenn der eine Krümmungsradius r mit r_1 oder dessen Verlängerung mit der positiven Richtung des Radius $\frac{r_1}{\cos^2\gamma}$ der Cyklide den Winkel ϑ bildet,

$$\varrho = \frac{1}{\cos\vartheta}\cdot\left[\frac{r_1}{\cos^2\gamma} + r\cos\vartheta\right] = \frac{r_1 + r\cos\vartheta\cos^2\gamma}{\cos\vartheta\cos^2\gamma}.$$

Das Gaufssche Krümmungsmafs für den betreffenden Punkt der Cyklide und der Schraubenröhrenfläche ist also

$$K = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos\vartheta \cos^2\gamma}{r(r_1 + r\cos\vartheta\cos^2\gamma)}.$$

Für den äufsersten und innersten Punkt des Kreisschnitts ist $\cos\vartheta = 1$ bezw. $\cos\vartheta = -1$, für den höchsten und niedrigsten Punkt ist $\cos\vartheta = 0$. Dies giebt besonders einfache Werte. Für den letztgenannten wird das Krümmungsmafs $K = 0$, dort findet also der Übergang vom positiven zum negativen Krümmungsmafse statt.

§ 181) Gesetzmäfsige Einteilung der Schraubenröhrenfläche mittels der Krümmungslinien. In Figur 23 ist die Drehungscyklide durch ihre beiden einfachsten Kreisschnitte (Meridiane und Parallelkreise) in ein System ähnlicher Rechtecke, z. B. Quadrate eingeteilt. Solcher Einteilungen isothermischer Art sind unendlich viele möglich, denn es ist nicht nötig, dafs sie mit dem äufseren Äquator beginnen. Man denke sich einen (unendlich schmal anzunehmenden) Meridianstreif der Figur 23 mit einer solchen quadratischen Einteilung aus der Cyklide herausgeschnitten und auf eine Schraubenröhrenfläche aufgelegt, deren Krümmungscyklide mit dieser Cyklide übereinstimmt. Diese Auflegung ist nach dem Gaufsschen Satze von der Abwickelbarkeit von Flächen identischen Krümmungsmafses auf einander möglich. Der Streif kann auf der Röhrenfläche verschoben werden, aber nicht in beliebiger Weise, sondern nur so, dafs jeder seiner Punkte sich auf einer der Schraubenlinien der Fläche bewegt. Denkt man sich die einzelnen Lagen so aufeinander folgend, dafs jeder Streif von den beiden Nachbarstreifen berührt wird, so würden die quadratischen Einteilungen so aufeinander folgen, wie es bei zwei solchen Ringstreifen im Grundrifs der Figur 102 dargestellt ist, d. h. die Einteilungslinien des einen Ringstreifens sind nicht die Fortsetzungen der Einteilungslinien des anderen. In diesem diskontinuierlichen Sinne läfst sich die Schraubenröhrenfläche durch die Teile der Krümmungslinien mit einem Netze von Quadraten überziehen.

Jede der Ringstreif-Einteilungen ist unter wiederholter Voraussetzung unendlich kleiner Ringbreite so beschaffen,

dafs Inversion in Bezug auf gewisse Punkte der jedesmaligen Krümmungsachse stattfindet. Im Falle der Figur z. B. gehen die Geraden $\overline{0,8}$, $\overline{1,7}$, $\overline{2,6}$, $\overline{3,5}$ und die Tangente des Kreisschnitts im Punkte *4* durch denselben Punkt μ der Krümmungsachse. Ebenso gehen die Tangente in *3* und die Geraden $\overline{2,4}$, $\overline{1,5}$, $\overline{0,6}$ u. s. w. Durch einen andern Punkt der (schräg auf der Zeichnungsebene zu denkenden) Krümmungsachse. Entsprechendes findet mit den homologen Punkten der anderen Streifen statt. Man hat also ein von Kreisschnitt zu Kreisschnitt stattfindendes Inversionsverhalten in Bezug auf aufeinanderfolgende Punkte μ.

Wie ein solcher Kreisschnitt von μ aus einzuteilen ist, wenn der Punkt des äufseren Äquators und der des inneren zur Einteilung gehören sollen, ist aus Bd. I bekannt und in der nachstehenden Figur 103 im Grundrifs noch einmal durchgeführt. Tangente $\mu_1 4$ an den Kreis rechts giebt *4*, Gerade $\overline{0,4}$ bis zur Projektion der Krümmungsachse giebt H_1, Tangente $H_1 2$ giebt *2*, Gerade $2\mu_1$ giebt *6*, Gerade *02* giebt einen Schnittpunkt J_1 auf der Projektion der Krümmungsachse, Tangente $J_1 1$ giebt den Punkt *1*, Gerade $1 H_1$ giebt *3*, Gerade $3\mu_1$ giebt *5*, Grade $1\mu_1$ giebt *7* u. s. w. Die Teilung ist am links liegenden Kreise wiederholt und dort durch einfache Projektion auf den elliptisch erscheinenden Kreisschnitt übertragen. Damit ist die Möglichkeit der quadratischen Einteilung eines solchen Ringstreifens auf konstruktivem Wege nachgewiesen.

Eine andere Einteilung ist folgende: Man denke sich die soeben besprochene quadratische Einteilung eines Ringstreifens durchgeführt und durch die Teilpunkte Krümmungslinien zweiter Art gelegt und beiderseits bis ins Unendliche fortgesetzt. Die Kreisschnitte sollen ebenso, wie vorher, regelmäfsig aufeinander folgen. Dadurch entsteht eine Einteilung der Fläche in Rechtecke. Die Fortsetzung der Krümmungslinien giebt aber keine isothermische Einteilung, wie unten nachgewiesen werden soll. Es entsteht nur eine Einteilung in „Rechtecke“, aber nicht in ähnliche Rechtecke.

Vorläufig sei zu Figur 102 nur bemerkt, dafs im Aufrifs $BB_1 = C_1 C_2 = D_2 D_3 = \dots$ ist.

Denkt man sich einen der dortigen Ringstreifen längs der Röhrenfläche herabgleitend, so verschiebt sich jeder Punkt auf der entsprechenden Schraubenlinie, und dabei nimmt $D_2 D_3$ der Reihe nach die Lagen $C_1 C_2$, $B B_1$ u. s. w. an. Die Fläche $AA_1 B_1 B$ ist dabei kongruent $K_1 K_2 C_2 C_1$, und daher findet beim Herabgleiten jedes Kreisschnittes eine Kombination von Guldinscher Bewegung und Umdrehung um die augenblicklichen Tangenten des Mittelpunktsweges statt. Durch die Zusammensetzung beider Bewegungen entsteht die Schraubenbewegung. Die Drehung des Kreisschnittes um den Winkel σ fällt naturgemäfs an der innersten Schraubenlinie am stärksten, an der äufsersten am schwächsten auf, und so entstehen die kleinen Steigungswinkel aufsen, die gröfseren auf der Innenseite.

§ 182) Noch klarer wird der Bewegungsvorgang durch die Zeichnung der Schraubenlinien der Fläche, die durch die so konstruierten Teilpunkte der Kreisschnitte gehen, und durch die Konstruktion der Orthogonalkurven dieser Schraubenlinien. Die Einteilung der elliptischen Kreisschnitte ist schon oben beschrieben worden, die Konstruktion der Schraubenlinien, die durch die Teilpunkte gehen, ist im Grundrifs, wo sie als konzentrische Kreise erscheinen, am bequemsten. Die Verzeichnung im Aufrifs geschieht folgendermafsen: Man projiziere die Teilpunkte *1* bis *8* des links im Grundrifs befindlichen Kreises auf dessen senkrechten Durchmesser, was Teilpunkte α_1, β_1, λ_1, δ_1 bis ι_1 giebt. Diese Punkte sind auf der unteren Hälfte symmetrisch zu wiederholen. Der Durchmesser ist im Aufrifs in die Lage PQ zu bringen. An diesem Kreisschnitte sind α, β, γ vorn, die übrigen Punkte bis ι hinten zu denken. Am Kreisschnitte RS sind die hinteren Punkte zu vorderen geworden. Durch die Teilpunkte gehen die Schraubenlinien.

Die Orthogonalkurven können wiederum nur angenähert konstruiert werden, und zwar folgendermafsen. Im Aufrifs erscheinen die Schraubenlinien längs der senkrechten Mittellinie der Figur in ihrer richtigen Steigung und die Normalebenen sind daher senkrecht gegen diese Linien zu zeichnen und erscheinen in der Gestalt dieser Lote. Man zeichne von jedem Schnittpunkte der Mittellinie ein solches Lot

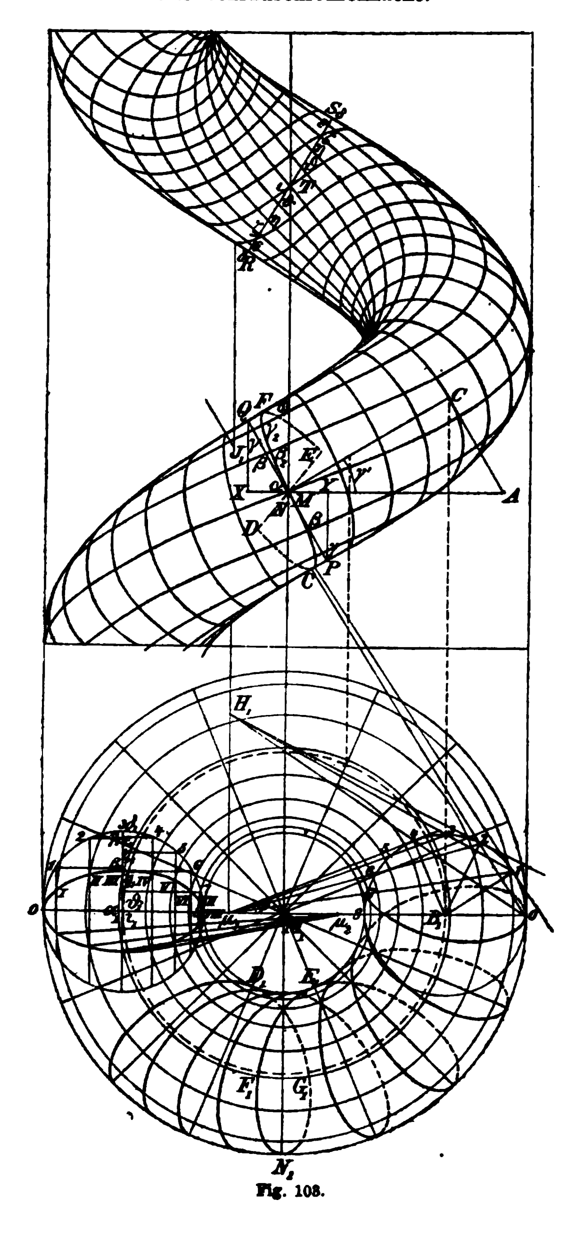


Fig. 108.

nach oben bis zur nächsten sehr nahe zu denkenden Schraubenlinie. Den Endpunkt jedes Lotes projiziere man in den Grundriſs, wo die entsprechende „Gerade“ wieder als solche erscheint. Im Grundriſs drehe man die Geraden längs der konzentrischen Kreise ohne jede sonstige Änderung so weit, daſs sie einen ununterbrochenen Linienzug bilden. In das entstehende Polygon sind nun die Orthogonalkurven des Grundrisses mit beliebiger Genauigkeit einzuzeichnen. Je zahlreicher die Teilpunkte des Kreises sind (in der Figur 16, besser 32, 64, 128 u. s. w.) um so genauer stellt die gebrochene Linie die Kurve selbst dar.

So sind die orthogonalen Grundriſskurven der Figur 104 entstanden. Die gestrichelten Teile sind dabei symmetrisch zu den ausgezogenen sichtbaren Teilen. Je ein ausgezogener und ein gestrichelter Teil bilden einen Umgang einer solchen Kurve. Alle Umgänge sind kongruent. Jede Kurve kann nach einem oder mehreren Umgängen scheinbar schlieſsen, auch nach Bruchteilen von mehreren Umgängen. Das scheinbare Schlieſsen kann aber auch erst nach unendlich vielen Umgängen erfolgen. Solche Kurven sind unter gleichen Abständen in den Grundriſs einzuzeichnen. Die Schnittpunkte sind aus dem Grundriſs leicht in den Aufriſs zu übertragen.

Auch diese Einteilung ist noch keine isothermische. Sie ist aber eine gesetzmäſsige und hat einige bemerkenswerte Eigenschaften. Jedenfalls läſst sie die Fläche im Aufriſs sehr plastisch erscheinen und ist somit ein instruktives Übungsbeispiel für die darstellende Geometrie und die Handhabung von Infinitesimalkonstruktionen. Daher soll noch einiges über sie gesprochen werden.

§ 183) Einige Eigenschaften der in Figur 103 gegebenen Einteilung. Zunächst sind die in dem Streifen zwischen je zwei benachbarten Schraubenlinien befindlichen „Rechtecke“ kongruent, ist also eins davon ein Quadrat, so sind sämtliche Rechtecke dieses Streifens Quadrate. Daraus folgt, daſs die Schraubenlinien und ihre Orthogonalkurven isothermische Linien sind und eine besonders zu untersuchende isothermische Einteilung ermöglichen, um die es sich hier noch nicht handelt.

Verbindet man in Figur 103 einen der Schnittpunkte der Einteilung mit dem zugehörigen Punkte μ der Achse

der Krümmungscyklide, so erhält man als zweiten Schnittpunkt mit der Schraubenfläche einen Punkt einer anderen der gezeichneten Schraubenlinien. Verbindet man jede der vier Ecken eines der Rechtecke mit dem ihm zugehörigen Punkte μ, so erhält man als Schnittpunkte mit der Fläche die Ecken eines Vierecks, welches zur Einteilung gehören kann, aber nicht mufs. Jedenfalls ist das Rechteck kongruent dem Rechtecke des zugehörigen Schraubenlinienstreifs und kann in diesem in eine der Einteilung entsprechende Lage verschoben werden. In diesem Sinne findet eine Art von Zuordnung statt, bei der es sich um Inversionen von Punkt zu Punkt mit wanderndem μ handelt. Sind P_1 und P_2 so zugeordnete Punkte, so ist $\mu P_1 . \mu P_2 = t^2$, wobei t die Länge der von μ aus an die entsprechende Berührungskugel gelegten Tangente ist. Die Punkte P_1 und P_2 liegen auf dem zugehörigen Schnittkreise. Weil das Centrum der Inversion wandert, sind die einander so entsprechenden Rechtecke im allgemeinen nicht ähnlich.

In Figur 104 sind die Diagonalkurven des so konstruierten Rechtecksnetzes gezeichnet. Sie lassen ebenfalls die Fläche in hohem Grade plastisch erscheinen. — Diese Diagonalkurven stellen aber nicht Loxodromen der Fläche dar. Nur bei geringer Steigung h für den Umgang nähern sie sich solchen mehr und mehr.

Der nicht isothermische Charakter der Teilung ergiebt sich schon durch folgende einfache Betrachtung. Ein an die äufserste Schraubenlinie der Figur 103 anstofsendes Quadrat habe die kleine Seite $a = \frac{1}{n}\sqrt{h^2 + 4\pi^2(r_1 + r)^2}$, d. h. den n^{ten} Teil des Umgangs dieser Schraubenlinie. Bei wanderndem Inversionscentrum erhält das durch die Transformation entstehende neue Rechteck als Seitenlänge an der innersten Schraubenlinie $a_1 = \frac{1}{n}\sqrt{h^2 + 4\pi^2(r_1 - r)^2}$, wofür man auch schreiben kann

$$a_1 = a\sqrt{\frac{h^2 + 4\pi^2(r_1 - r)^2}{h^2 + 4\pi^2(r_1 + r)^2}},$$

a_1 ist nämlich der n^{te} Teil der letzteren Schraubenlinie. Dagegen wird die orthogonale Rechtecksseite

$$b_1 = a\frac{\varrho - r}{\varrho + r} = a\,\frac{\dfrac{r_1}{\cos^2\gamma} - r}{\dfrac{r_1}{\cos^2\gamma} + r} = a\,\frac{r_1 - r\cos^2\gamma}{r_1 + r\cos^2\gamma}$$

$$= a\,\frac{r_1 - r\,\dfrac{4\pi^2 r_1^2}{h^2 + 4\pi^2 r_1^2}}{r_1 + r\,\dfrac{4\pi^2 r_1^2}{h^2 + 4\pi^2 r_1^2}}$$

oder

$$b_1 = a\,\frac{r_1 h^2 + 4\pi^2 r_1^2 (r_1 - r)}{r_1 h^2 + 4\pi^2 r_1^2 (r_1 + r)} = a\,\frac{h^2 + 4\pi^2 r_1 (r_1 - r)}{h^2 + 4\pi^2 r_1 (r_1 + r)}.$$

Demnach sind die neuen Rechtecksseiten verschieden von einander, und es handelt sich nicht mehr um ein

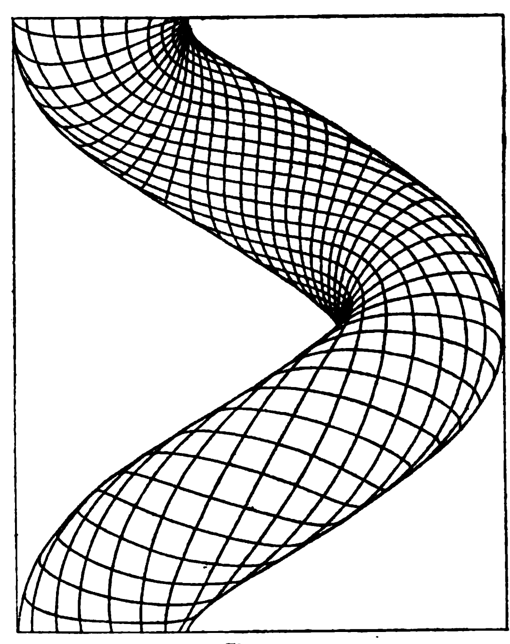


Fig. 104.

Quadrat. Nur bei geringer Steigung h könnte Figur 104 zur Veranschaulichung der Loxodromen dienen, demgemäfs auch Figur 103 zur angenäherten Veranschaulichung einer isothermischen Einteilung.

§ 184) Eine Verallgemeinerung der obigen Rechtecksteilung ergiebt sich durch Figur 105, wo VW die Krümmungsachse bedeutet und die Teilung mit einem beliebigen Punkte A (statt mit einem Punkte des äufseren Äquators) beginnen soll. Man ziehe die Tangente AM und dann die Tangente MB, und die Sekante ABM_1. Von M_1 aus ziehe man die Tangenten M_1C und M_1D, worauf CD durch M gehen mufs. AB und CD schneiden sich im Pole der Krümmungsachse. Die Sehne AC giebt einen Schnitt M_2, AD einen Schnitt M_3. Zu M_2 gehört die Polare GH, zu M_3 die Polare EF. Damit hat man die Teilung des Kreises in acht Teile der betreffenden Art. Die Teilung kann beliebig weit fortgesetzt werden.

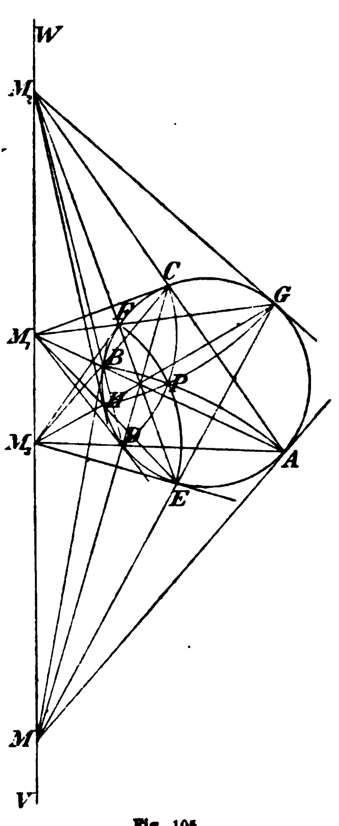


Fig. 105.

M, M_1, M_2, M_3 sind dabei Mittelpunkte von Orthogonalkreisen, die sich im Punkte P so schneiden, dafs die Tangenten in P unter gleichen Winkeln auf einander folgen. Dies giebt eine neue einfache Konstruktion.

Die neue Teilung ist ebenso, wie die vorige, auf die als Ellipsen erscheinenden Kreisschnitte der Schraubenröhrenfläche zu übertragen.

§ 185) Dies führt naturgemäfs darauf, zur Untersuchung solcher Einteilungen statt der gewöhnlichen Koordinaten für den Querschnitt der Krümmungscyklide **Bicircular-koordinaten** anzuwenden. P und Q mögen die Büschelpunkte des orthogonalen Kreisbüschels für die durch die beiden Schnittkreise und die Krümmungsachse VW bestimmte Kreisschar sein. Der Kreis A hat dann die Gleichung

$$\frac{p}{q}=\frac{PB}{QB}=\frac{t-(\varrho-r)}{t+(\varrho-r)}=\frac{t-\varrho+r}{t+\varrho-r},$$

oder, wenn man den letzten konstanten Bruch mit $e^{c}=k$ bezeichnet,

1) $$\frac{p}{q}=e^{c}=k \text{ oder } lg\,p-lg\,q=c=lg\,k.$$

Hier hat t die Länge der Tangente von M an den Kreisschnitt der Cyklide.

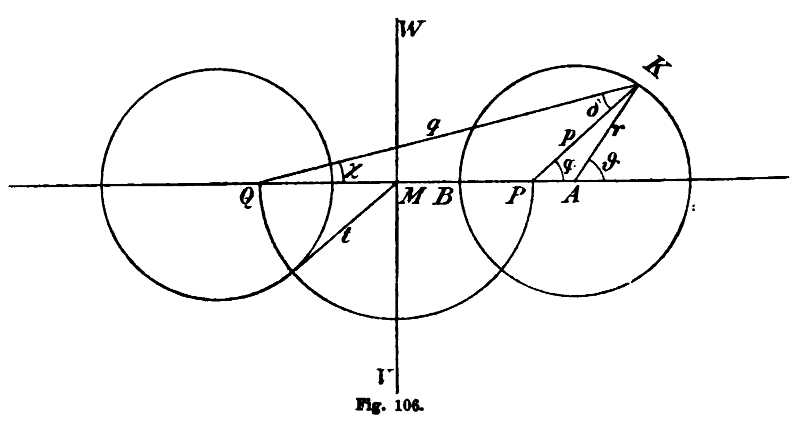


Fig. 106.

Durch P, Q und den freien Endpunkt eines beliebigen Radiusvectors p, zu dem noch ein zweiter q gehört, ist ein Kreis des Kreisbüschels bestimmt, der über PQ einen Peripheriewinkel δ spannt, wobei δ der Unterschied der Neigungen φ und χ für die Radii vectores p und q ist. Der betreffende Büschelkreis hat demnach die Gleichung

2) $$\varphi-\chi=\delta.$$

Läfst man δ Werte annehmen, die eine arithmetische Reihe bilden, so hat man Büschelkreise, deren Tangenten unter konstantem Winkel auf einander folgen.

Jeder Punkt des Kreisschnittes ist durch ein bestimmtes δ festgelegt.

Will man die Bicircularkoordinaten $\left(\frac{p}{q}\right) = k$ und $(\varphi - \chi) = \delta$ mit den zum Kreise A gehörigen Polarkoordinaten in Beziehung setzen, so mufs noch die Centrale $PQ = 2t$ gegeben sein. Man achte auf folgendes:

$$\frac{p}{q} = k = \frac{t - \varrho + r}{t + \varrho - r},$$

also

$$t(1 - k) = (\varrho - r)(1 + k)$$

und

3) $$\varrho - r = t\frac{1 - k}{1 + k}.$$

Dazu kommt

4) $$(\varrho + r)(\varrho - r) = t^2$$

also durch Division

5) $$\varrho + r = t\frac{1 + k}{1 - k}.$$

Aus 4) und 5) folgt durch Addition bezw. Subtraktion

6) $$\varrho = t\frac{1 + k^2}{1 - k^2},$$

7) $$r = \frac{2kt}{1 - k^2} = \frac{2\left(\frac{p}{q}\right)t}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^2}.$$

Damit ist r durch $\left(\frac{p}{q}\right)$ und t ausgedrückt.

Aus Dreieck PQK folgt

$$p^2 + q^2 - 2pq\cos\delta = 4t^2.$$

Setzt man $\frac{p}{k}$ für q ein, so folgt nach den entsprechenden Umformungen

8) $$p^2 = \frac{4t^2k^2}{1+k^2-2k\cos\delta}.$$

Aus Dreieck PAK folgt

$$p^2 = r^2 + \overline{PA}^2 - 2r\overline{PA}\cos\vartheta = r^2 + (\varrho - t)^2 - 2r(\varrho - t)\cos\vartheta,$$

also

$$\cos\vartheta = \frac{p^2 - r^2 - (\varrho - t)^2}{2r(\varrho - t)}.$$

Setzt man hier die Werte von p^2, r und $(\varrho - t)$ nach Gleichung 8), 7) und aufserdem $\varrho - t = \frac{2k^2t}{1-k^2}$ ein, so wird

$$\cos\vartheta = \frac{\frac{4t^2k^2}{1+k^2-2k\cos\delta} - \frac{4k^2t^2}{(1-k^2)^2} - \frac{4k^4t^2}{(1-k^2)^2}}{\frac{4kt}{1-k^2}\cdot\frac{2k^2t}{1-k^2}}.$$

Dies reduziert sich schliefslich auf

9) $$\cos\vartheta = \frac{(1+k^2)\cos\delta - 2k}{(1+k^2) - 2k\cos\delta}.$$

Durch 7) und 9) sind r und ϑ durch $\frac{p}{q} = k$, $\delta = (\varphi - \chi)$ und t ausgedrückt. In ähnlicher Weise lassen sich x und y durch $\left(\frac{p}{q}\right)$ und $(\varphi - \chi)$ ausdrücken. Auch die umgekehrten Beziehungen sind leicht herzustellen.

§ 186) Die isothermische Einteilung der Schraubenröhrenfläche durch die Schraubenlinien und deren Orthogonalscharen kann durch mehrere Arten von Infinitesimalkonstruktion mit beliebiger Genauigkeit durchgeführt werden. Am bequemsten geht man von zwei möglichst nahe benachbarten Orthogonalkurven aus. Man denke sich eine der Schraubenlinien gezeichnet, z. B. die äufserste. Innerhalb des so bestimmten Streifens zeichne man durch einen der Schnittpunkte eine unter 45° schneidende Linie,

sei es eine solche, wie sie der betreffende Orthogonalschnitt der Fläche giebt, sei es die durch einen straff gespannten Faden vorgezeichnete geodätische Linie, was mit zunehmender Kleinheit auf dasselbe Resultat führt. Wo diese Kurve die andere Orthogonalkurve trifft, da liegt der Punkt, durch den die neue Schraubenlinie zu legen ist. Mit den Durchschnitten der letzteren verfahre man wie vorher. Die jedesmalige zweite innerhalb des entstandenen Quadrates liegende unter — 45° schneidende Kurve giebt eine brauchbare Kontrolle. Statt dessen kann man aber, wenn der Streifen hinreichend schmal ist, mit dem Zirkel den fast geradlinigen kleinen Bogen der gegebenen ersten Schraubenlinie messen und diesen auf einer, oder zur Kontrolle auf beiden Orthogonalkurven abtragen, so daſs die Konstruktion des ersten Quadrates wie in der Ebene geschieht. Mit dem zweiten kleineren ist entsprechend zu verfahren. — Ist ein Umgang des Streifens auf diese Weise mit Quadraten angefüllt, so hat man auf der gegebenen Schraubenlinie mit dem Zirkel Punkte zu markieren, die unter gleichen Abständen aufeinanderfolgen. Durch diese sind weitere Orthogonalkurven zu legen.

Verlangt man nicht eine quadratische Einteilung, sondern nur eine solche in ähnliche Rechtecke, so kann man es so einrichten, daſs die Reihe der letzteren nach einem Umgange genau schlieſst.

Diese Art der Verzeichnung hat, wie jede Infinitesimalkonstruktion, nur einen Veranschaulichungswert. Selbstverständlich kann die darstellende Geometrie auch folgendermaſsen verfahren. Zum Schnittpunkte der ersten Schraubenlinie und der ersten Orthogonalkurve gehört eine Tangentialebene (der Fläche), die durch die entsprechenden Tangenten bestimmt wird. Die Tangentialebene werde im Grund- und Aufriſs gezeichnet. In ihr ist dann nach den Methoden der darstellenden Geometrie der rechte Winkel zu halbieren. Die kurze Halbierungslinie wird ebenso wie vorher, angenähert als Kurve der Fläche betrachtet.

Die korrekte Konstruktion ist nur in der inneren Anschauung möglich, denn auch die genauesten Berechnungen geben nur Annäherungskonstruktionen.

Mit Hilfe des Quadratnetzes oder Rechtecksnetzes ist man imstande, alle möglichen Loxodromen der Schrauben-

röhrenfläche mit beliebiger Genauigkeit zu konstruieren. Diese Loxodromen sind bei übereinstimmenden Schnittwinkeln sämtlich kongruent, auch besteht jede aus lauter kongruenten Umgängen. Zahlreiche ihrer Eigenschaften lassen sich, wie bei den früher behandelten Loxodromen, ohne weiteres aus den Sätzen über Gerade, besonders solchen der Geometrie der Lage, ableiten. Eine wesentliche Eigenschaft ist aber folgende: Denkt man sich die Schraubenfläche z. B. längs der innersten Schraubenlinie aufgeschnitten, so läfst sie sich so umbiegen, dafs die Schraubenlinien Kreise werden (vergl. das Boursche Theorem), die einer Umdrehungsfläche angehören. Jeder Umgang jeder Orthogonalkurve biegt sich dabei so, dafs er eine geschlossene Kurve näher zu untersuchender Art giebt. Die Loxodromen der ursprünglichen Fläche werden solche der neuen. Der loxodromische Charakter ist also bei diesen Biegungen invariant, ebenso jede quadratische Einteilung. Von der Anfangslage bis zur Schlufslage kann man Zwischenlagen der Art annehmen, dafs die Fläche längs des gemachten Schnittes geschlossen bleibt, die beiden Grenzlinien also aneinander hingleiten, dann werden nacheinander die verschiedensten Loxodromen zu geschlossenen Kurven. Auch kann die Verbiegung über die obige Schlufslage hinaus fortgesetzt werden.

Jede dieser unendlich zahlreichen Verbiegungen ist ein Problem für sich und der näheren Untersuchung wert. Das Krümmungsmafs der Fläche ist, wie schon gezeigt wurde, dabei invariant. Kennt man also den Krümmungsradius der neuen Fläche für die eine Krümmungslinie, so kennt man auch den für die andere.

Der Einteilungsmöglichkeit in ähnliche Rechtecke oder Quadrate entspricht die Möglichkeit, die Schraubenröhrenfläche konform auf einen beliebigen unendlich langen Parallelstreif der Ebene abzubilden, so, dafs entweder eine der Schraubenlinien, längs deren die Fläche aufgeschnitten zu denken ist, den Grenzen des Streifens entspricht, oder eine der Loxodromen. Der Parallelenschar, die durch die Grenzen des Streifens bestimmt ist, entsprechen in dem einen Falle Schraubenlinien, im andern eine Loxodromenschar, der Orthogonalschar von Parallelen in dem

einen Falle die in Figur 104 dargestellte Orthogonalschar, im andern die orthogonale Loxodromenschar. Zeichnet man im ersteren Falle die Bilder der Kreisschnitte mit einiger Genauigkeit ein, so erhalten diese beim Passieren der der äufsersten Schraubenlinie entsprechenden Geraden einen Wendepunkt. Der neue Schnittwinkel mit der orthogonalen Parallelenschar hat dort den kleinsten Wert, beim Passieren des Bildes der innersten Schraubenlinie den gröfsten. Dafs sie und ihre Orthogonalen keine Isothermen sind, ergiebt sich dabei auf den ersten Blick.

Schliefsungsprobleme nach Art der Steinerschen lassen sich zahlreich aufstellen. Schliefst die Reihe der in einem Loxodromenstreif liegenden Quadrate nach einem Umgange, so schliefst sie stets nach einem solchen, wo auch die Reihe der Quadrate beginne. In einen solchen Streifen lassen sich Berührungskurven einzeichnen, die der Kreisreihe in einem Parallelstreif der Ebene entsprechen. Auch diese können nach einem Umgange schliefsen. Dasselbe gilt vom Schlufs nach n Umgängen, wobei n eine beliebige reelle Zahl sein kann.

Die Kreisschnitte sind geodätische Linien, denn einen kürzeren Umgang um die Fläche giebt es nicht. (Dadurch bestätigt sich ein allgemeineres Theorem, nach dem jede ebene Krümmungslinie eine geodätische Linie ist.) Näher soll hier auf die geodätische Geometrie nicht eingegangen werden. Nur sei bemerkt, dafs die Schraubenlinien der Schraubenröhrenfläche geodätische Parallelkurven sind.

Mit diesen Bemerkungen ist die Lehre von der Schraubenröhrenfläche und den aus ihnen durch Verbiegung entstehenden Flächen durchaus nicht erschöpft. Abgesehen von der geodätischen Geometrie giebt es hier noch mancherlei zu untersuchen, was auch für die allgemeine Flächentheorie von Interesse ist. Auch Übungsbeispiele für die darstellende Geometrie lassen sich in reicher Fülle anschliefsen. Diese Andeutungen beziehen sich nicht auf die Untersuchungen mittels der höheren Analysis, vielmehr sind sie auf lediglich elementare Forschungsmethoden zu beziehen.

Dritter Abschnitt.

Die Inversionsverwandten der Schraubenlinien und Schraubenflächen. Bemerkungen über Verwandtschaften und Transformationsgruppen.

α) Vorbemerkungen über die Inversion, besonders über die Erhaltung der Doppelverhältnisse und Doppelwinkel nach Möbius.

§ 187) Zur Übung in der räumlichen Vorstellung und in den Methoden der synthetischen und darstellenden Geometrie sollen zunächst einige der behandelten Schraubengebilde der Inversion $R = \frac{1}{r}$ unterworfen werden. (Vergl. Bd. I Seite 238 bis 250.) Dabei gehen Gerade über in Kreise durch das Inversionscentrum, Ebenen in Kugeln, die durch das letztere gehen, Kugeln in Kugeln, wobei das Inversionscentrum äufserer Ähnlichkeitspunkt für Original und Bild wird. (Von der entgegengesetzten Inversion $R = -\frac{1}{r}$ soll abgesehen werden.) Geht eine Ebene durch das Inversionscentrum, so bleibt sie Ebene, geht eine Kugel durch das Inversionscentrum, so wird sie Ebene. Quadratische Einteilungen von Flächen werden wieder solche. Kubische Einteilungen des Raumes werden wieder solche. Die kubische Einteilung durch drei orthogonale Scharen von

Ebenen wird eine solche durch Kugeln, die sämtlich durch das Inversionscentrum gehen, wobei jede Schar dort eine gemeinschaftliche Tangentialebene hat. Jede solche kubische Einteilung geht durch Inversion von beliebigem Centrum aus wieder in eine solche über, dies sind aber auch die einzigen möglichen Einteilungen dieser Art. Alle anderen Orthogonalscharen von Flächen geben Einteilungen in kleine unähnliche Rechteckskörper, die bei dieser Abbildung wieder in kleine Rechteckskörper übergehen, derart, dafs jedes einzelne seinem entsprechenden ähnlich ist. Dafs alle Schnittwinkel erhalten bleiben, ist in Bd. I ebenfalls nachgewiesen.

§ 188) Für die Kreisverwandtschaft in der Ebene hat Möbius einige Sätze abgeleitet, die sich auf gewisse Doppelverhältnisse beziehen und hier zur Anwendung kommen können.

Sind A, B, C, D harmonische Punkte einer Geraden, so ist $AB:BC = AD:CD$ oder $AB:(-CB) = AD:CD$, also bei geeigneter Bezeichnung $\frac{p \cdot r}{q \cdot s} = -1$. Unterwirft man das Gebilde von einem Inversionscentrum K aus der obigen Transformation, so geht die Gerade in einen Kreis durch das Centrum der Inversion über. Die Inversionsstrahlen von K nach A, B, C, D sind harmonische, für sie ist also $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = -1$. Die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind Peripheriewinkel des entstandenen Kreises, die Sehnen $A_1B_1 = p_1$, $B_1C_1 = q_1$, $C_1D_1 = r_1$, $D_1A_1 = s_1$ berechnen sich also, wenn r der Radius ist, mit Hilfe der Gleichungen $\sin\alpha = \frac{p_1}{2r}$, $\sin\beta = \frac{q_1}{2r}$ u. s. w., also gilt auch für die Sehnen der Satz $\frac{p_1 r_1}{q_1 s_1} = -1$. Waren dagegen A, B, C, D anharmonische Punkte mit dem Doppelverhältnis $\frac{pr}{qs} = k$, so wird ebenso für die Sehnen des entstehenden Kreisvierecks $\frac{p_1 r_1}{q_1 s_1} = k$.

Möbius*) zeigt nun, dafs, wenn ein ganz beliebiges Viereck mit den Seiten p, q, r, s (nicht Kreisviereck), der Inversion unterworfen wird, das Doppelverhältnis $\frac{pr}{qs} = k$ ebenfalls in das gleiche Doppelverhältnis $\frac{p_1 r_1}{q_1 s_1} = k$ übergeht. Der Satz gilt auch für überschlagene Vierecke. Bei der Transformation des Vierecks $ABCD$ mit den Seiten p, r, q, s und den Diagonalen v und w bleiben also erhalten die Doppelverhältnisse

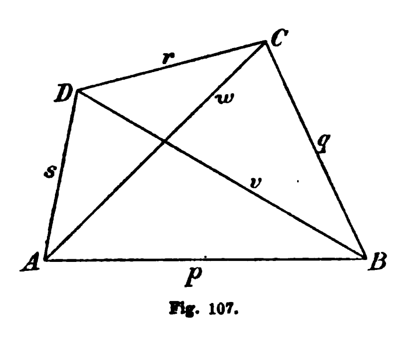


Fig. 107.

$$\frac{pr}{qs} = k_1, \quad \frac{qs}{vw} = k_2, \quad \frac{vw}{pr} = k_3.$$

Darin liegt das verallgemeinerte Gesetz über die Erhaltung der Doppelverhältnisse.

§ 189) Ein entsprechender Satz gilt für die Gegenwinkel des Vierecks. Ist $ABCD$ ein Kreisviereck, so ist $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA = 180^0$, ebenso $\sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 180^0$. Durch Inversion entsteht wieder ein Kreisviereck, die Summe von 180^0 bleibt also bestehen. Ist dagegen $ABCD$ ein allgemeines Viereck, so ist $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA$ gleich irgend einer Winkelgröfse x, $\sphericalangle BCD = DAB = 180^0 - x$. Bei der Inversion entsteht ein Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$, für welches $\sphericalangle A_1 B_1 C_1 + \sphericalangle C_1 D_1 A_1$, ebenfalls gleich x, $\sphericalangle B_1 C_1 D_1 + \sphericalangle D_1 A_1 B_1 = 180^0 - x$ ist. Auch dieser Satz gilt für

*) Die Beweise findet man im II. Bande der gesammelten Werke von Möbius und in den Originaldrucken der Verhandlungen der math. physikal. Klasse der Kgl. S. H. der Wissenschaften zu Leipzig. 1) Über eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen. V. 1852, I Seite 41—54. 2) Über eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren, V. 1853, I, Seite 14—24. 3) Theorie der Kreisverwandtschaft, 1855, II, Seite 531—595.

In des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften“ findet man einfache Beweise auf Seite 40—43.

überschlagene Vierecke. Es bleiben also, wenn man die erste Winkelsumme symbolisch (mit Möbius) durch $(ABCD)$ darstellt, erhalten die Winkelsummen

$$(ABCD) = \varkappa_1,\ (BCDA) = 180^0 - \varkappa_1,\ (ABDC) = \varkappa_2,$$
$$(BDCA) = 180^0 - \varkappa_2,\ (BCAD) = \varkappa_3,\ (CADB) = 180^0 - \varkappa_3.$$

Dies ist das Gesetz von der Erhaltung der Summe der Gegenwinkel bei der Inversion, oder, wie Möbius abgekürzt sagt, von der Erhaltung der Doppelwinkel.

§ 190) Nach Möbius und Bretschneider ist dabei

$$\frac{pr}{qs} = \frac{\sin(BCA + ADB)}{\sin(CAB + BDC)} = k_1,$$
$$\frac{qs}{vw} = \frac{\sin(CAB + BDC)}{\sin(ABC + CDA)} = k_2,$$
$$\frac{vw}{pr} = \frac{\sin(ABC + CDA)}{\sin(BCA + ADB)} = k_3,$$

so dafs bei der Inversion auch diese Ausdrücke erhalten bleiben. Dabei ist $k_1 k_2 k_3 = 1$.

In diesen Sätzen liegen Erweiterungen von Sätzen der projektiven Geometrie. An Stelle der Geraden der letzteren sind Kreise als Träger der Punkte getreten. Die Geraden sind nur ein Sonderfall der Kreise.

Dafs bei der Inversion ein beliebiges kleines Linienelement s in $s_1 = \frac{s}{r^2}$ bezw. in $s_1 = s\frac{t^2}{r^2}$, je nachdem der spiegelnde Kreis den Radius 1 oder t hat, wurde schon in Band I bemerkt.

β) Die Abbildung des Kreiscylinders und des Kreiskegels und ihrer Loxodromen und die Abbildung der Schraubengewinde durch Inversion.

§ 191) Der Kreiscylinder geht durch Inversion in eine Cyklide über, die in einem Punkte sich selbst berührt. Man kann solche Cykliden als Cylindercykliden bezeichnen. Jede Schar von Schraubenlinien

desselben Steigungswinkels und ihre Orthogonalschar giebt eine Schar von Loxodromen der neuen Fläche nebst Orthogonalschar, die quadratischen Einteilungen des Cylinders werden solche der neuen Cyklide. Da die Abwickelung des Cylinders auf die Ebene sämtliche Loxodromen desselben in gerade Linien verwandelt, kann man die Eigenschaften der Geraden in der Ebene direkt auf die der cyklidischen Loxodromen übertragen. Insbesondere gehen die Sätze der Geometrie der Lage in solche der loxodromischen Geometrie dieser Cyklidenfläche über, wobei die Periodizität zu beachten ist, die dadurch entsteht, dafs jede Umrollung des Cylinders nur einem ebenen Parallelstreif entspricht, der übrigens durch die logarithmische Abbildung auf die ganze Ebene übertragen werden kann. Die Sätze über harmonische Strahlen und Punkte, über die Doppelverhältnisse bei Strahlenbüscheln und Punktreihen suche der Leser selbst zu übertragen, zugleich aber versuche er, da die Kreisschnitte und die Geraden des Cylinders in zwei orthogonale Scharen von Kreisen auf der entsprechenden Cyklide übergehen, die Sätze über Doppelverhältnisse und Doppelwinkel von Möbius und Bretschneider zu benutzen, Schlüsse über die Kreisscharen dieser Cyklide auszusprechen. Die Krümmungskreise der Schraubenlinien gehen in Krümmungskreise der cyklidischen Loxodromen über und lassen sich korrekt konstruieren und berechnen. Die Schmiegungsebenen der Schraubenlinien verwandeln sich in Kugeln, die durch das Centrum der Inversion und durch die Krümmungskreise gehen. Die Schmiegungskugeln der Schraubenlinien werden solche der cyklidischen Loxodromen. Jede dem Cylinder einbeschriebene Reihe von Berührungskugeln verwandelt sich in eine ebensolche Reihe von Kugeln, die einander paarweise berühren und die Cyklide in den Kreisschnitten der einen Art berühren. Die Berührungspunkte benachbarter Kugeln dieser Kugelreihe liegen für die neue Fläche auf einem durch das Inversionscentrum gehenden Kreise. Die Tangentialebenen des Cylinders verwandeln sich in Kugelscharen, welche die Cyklide in der anderen Gruppe von Kreisschnitten berühren und sämtlich durch das Inversionscentrum gehen. Je zwei dieser Kugeln berühren einander, schneiden aber alle übrigen. Diese Paare entsprechen je zwei parallelen Tangentialebenen

des Cylinders. Ist die erste Schar eine Reihe innerer Kugeln, so ist die zweite eine Schar äufserer Kugeln; ist die erste eine Reihe äufserer, so ist die zweite eine Schar innerer. Es giebt aber einen Zwischenfall, für den äufsere und innere Kugeln nicht unterschieden werden können. Diese drei Fälle entsprechen den drei Möglichkeiten, dafs das Inversionscentrum aufserhalb, innerhalb oder auf der Cylinderfläche gewählt wird. Die Mittelpunkte der Reihe der Berührungskugeln liegen entweder auf einer Hyperbel, oder auf einer Ellipse, oder auf einer Parabel. Die Ellipse kann eine Gerade werden.

Demnach giebt es drei Haupttypen solcher Flächen; erstens solche, bei denen die Reihe von Berührungskugeln im Aufsenraum liegt, zweitens solche, bei denen sie im Innenraum liegt, und drittens solche, bei denen der Raum, in dem die Kugeln liegen, sowohl als innerer, als auch als äufserer betrachtet werden kann. Ein Sonderfall des ersten ist der, bei dem das Inversionscentrum auf der Cylinderachse gewählt wird, wobei die Cyklide eine Drehungsfläche wird. Diese hat ein Büschel von unendlich vielen Symmetrieebenen und eine dieses Büschel orthogonal schneidende Symmetrieebene. Alle anderen Formen haben nur je zwei auf einander senkrechte Symmetrieebenen.

Alle diese Formen sind aber nur Sonderfälle der allgemeinen Dupinschen Cykliden. Sie geben also nichts Neues, bieten jedoch einfache Übungsbeispiele für die darstellende Geometrie. Deshalb sollen sie hier besprochen werden.

§ 192) Figur 108 stellt den letztgenannten Fall in Grund- und Aufrifs dar. Die äufsersten Senkrechten sind die Aufrifslinien des Cylinders. Diese geben im Aufrifs, sobald man eine der Berührungskugeln des Cylinders zur Inversionskugel macht, zwei Berührungskreise, die einander im Inversionscentrum M berühren. Markiert man auf der einen Geraden Punkte $A, B, C, D, \ldots$ die in gleichen Abständen aufeinander folgen, so erhält man auf diesen Kreisen durch die Verbindungslinien der Punkte mit M Punkte $A_1, B_1, C_1, D_1 \ldots$ durch welche horizontale Geraden zu legen sind. Diese sind Bilder von Kreisen, die den Kreisschnitten

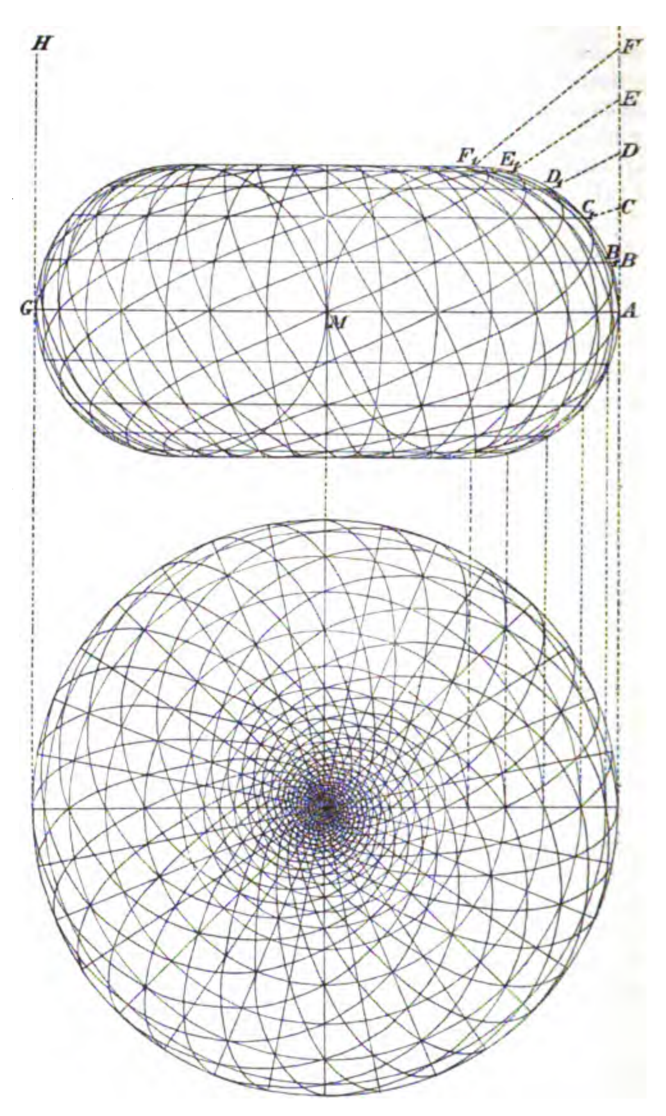


Fig. 108.

des Cylinders entsprechen und die Cyklide isothermisch einteilen. Alle anderen Geraden des Cylinders geben bei der Inversion kongruente Kreise, die im Aufrifs als Ellipsen erscheinen, im Grundrifs dagegen als Gerade. Da nun die horizontale Kreisschar des Aufrisses im Grundrifs als eine Schar konzentrischer Kreise erscheint, so geben die Schnitte jedes der Grundriss-Radien mit dieser Kreisschar Punkte, die, senkrecht nach dem Aufrifs projiziert, Punkte der entsprechenden Ellipse geben. Dies erleichtert die Verzeichnung.

War nun die Cylindereinteilung eine quadratische (oder eine solche in ähnliche Rechtecke), so wird auch die der Cyklide eine quadratische (bezw. eine solche in ähnliche Rechtecke). Die Diagonalkurven der Quadrate geben zwei Loxodromenscharen zu $\pm 45^0$, die ebenfalls eine quadratische Einteilung geben. In der Figur aber sind Loxodromen zu Winkeln α und $90^0 + \alpha$ gezeichnet, für welche $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ist, so dafs es sich um Diagonalkurven von Doppelquadraten handelt. Ebenso kann man andere Loxodromen zeichnen. Die eigentliche Reihe der Berührungskugeln ist eine äufserliche. Sie ist leicht einzuzeichnen und berührt die Fläche in Kreisen der Horizontalschar, welche ebenfalls eine isothermische Einteilung geben. Die Mittelpunkte liegen auf einer Geraden. Die inneren Berührungskugeln haben die Mittelpunkte auf einem Kreise. Nur je zwei gehören zu einer Reihe. Sie sind die Bilder paralleler Tangential-Ebenen des Cylinders.

§ 193) Figur 109 stellt dar, was geschieht, wenn das Inversionscentrum innerhalb des Cylinders, aber excentrisch liegend (d. h. aufserhalb der Achse) angenommen wird. Durch das Inversionscentrum geben dann zwei Symmetrieebenen des Cylinders, ein Hauptschnitt und ein Kreisschnitt. Die Cylinderachse sei senkrecht, die Hauptschnittebene sei Aufrifsebene der Zeichnung. Die Cylindergeraden des Hauptschnittes geben bei der Inversion einen gröfsten und einen kleinsten Kreis mit den Mittelpunkten μ und μ_1. Die Verbindungslinien der Punkte dieser Geraden mit dem Inversionscentrum geben auf diesen Kreisen gewisse Schnittpunkte. Ist der Cylinder durch Kreisschnitte isothermisch eingeteilt (gleiche Abstände), so erhält man

Kreisschnitte der Cyklide mit Hilfe der betreffenden Hauptschnittpunkte des Cylinders. Sind wie im vorigen Beispiele aus den Punkten B_0', B_1', B_2', ... des Cylinders Punkte B_0, B_1, B_2 ... der Cyklide geworden, aus den Cylinderpunkten C_0', C_1', C_2' ... Punkte C_0, C_1, C_2 ... der Cyklide, so sind die Geraden B_0C_0, B_1C_1, B_2C_2 ... Bilder der Kreisschnitte der

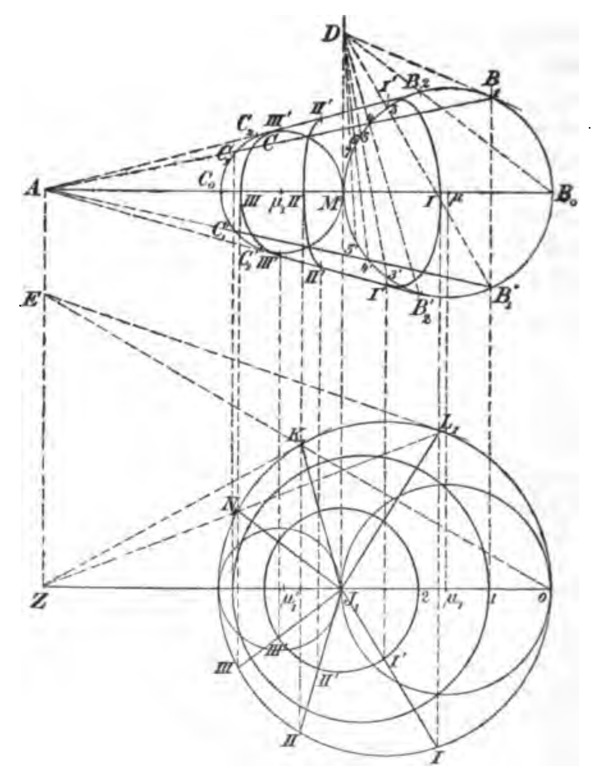


Fig. 109.

Cyklide im Aufriſs. Diese sind leicht in den Grundriſs zu übertragen, wo sie als Ellipsen erscheinen, deren senkrechte Achse gleich der betreffenden Geraden ist, während die horizontale Achse gleich deren Projektion ist.

Alle Geraden B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, ... gehen durch den äuſseren Ähnlichkeitspunkt A der Kreise μ und μ_1 des Auf-

risses. Aus der Berührungskugel jedes Kreisschnitts am Cylinder entsteht nämlich durch die Inversion eine äufsere Berührungskugel der Cyklide. Die Berührungspunkte sind z. B. B_1 und C_1, also mufs nach bekanntem Satze der Kreislehre die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch A, den äufseren Ähnlichkeitspunkt gehen. Also: Die Ebene der einen cyklidischen Kreisschnittschar geht durch eine durch A dargestellte Achse.

Die Cylindergeraden verwandeln sich in Kreise, die im Aufrifs als Ellipsen erscheinen, im Grundrifs dagegen als Gerade durch das Inversionscentrum, welches innerer Ähnlichkeitspunkt für die beiden dort einander berührenden Kreise ist.

Die Figur ist leicht zu vollenden. Die Ellipsen lassen sich auf verschiedene Arten konstruieren.

Die eigentliche Reihe der Berührungskugeln ist eine äufsere. Sie hat ihre Mittelpunkte auf einer Hyperbel, die in der Ebene des Hauptschnitts liegt. Die Hyperbel geht durch M und durch den Halbierungspunkt von BC, was die beiden Schnittpunkte, also auch den Mittelpunkt giebt. Fällt man von letzterem aus Lote auf die beiden gemeinschaftlichen äufseren Tangenten der Kreise μ und μ_1, so hat man damit ihre Asymptoten. Jede innere Reihe von Berührungskugeln besteht nur aus zwei solchen, den Bildern paralleler Tangentialebenen des Cylinders.

War die Einteilung des Cylinders (durch Gerade und Kreise) eine isothermische, so wird auch die der Cyklide isothermisch.

Die isothermische Einteilung kann aber auch selbständig geschehen. Soll z. B. der Äquator zur Einteilung gehören, ebenso die Gerade B_1C_1, so gehört auch $B_1'C_1'$ dazu. Die Tangente in B_1 giebt auf der „Hauptachse“ den Punkt D, die Gerade B_0D giebt B_2 und symmetrisch B_2'. Die Gerade B_2' giebt B_3 und symmetrisch B_3' u. s. w. Damit ist die eine Kreisschar im Aufrifs erledigt. Ihre Projektion in den Grundrifs macht keine Schwierigkeit. Sollen im Grundrifs die Gerade J_1L und die Horizontale J_1O zur Einteilung gehören, so gehört auch J_1I dazu. Die Tangente L_1E bis zur Achse ZA giebt E so, dafs OE den Punkt K_1 giebt, zu dem symmetrisch der Punkt II gehört. Die Gerade

IE giebt N und symmetrisch III u. s. w. Die Richtigkeit der Konstruktion folgt aus der Inversion gegen die Orthogonalkugel mit dem Mittelpunkte D und dem Radius DB_1.

Sollen $J_1 O$ und auch dessen Fortsetzung über J hinaus zur Teilung gehören, so beginne man mit der Tangente ZK und fahre in entsprechender Weise fort.

Über die Loxodromen ist dasselbe zu sagen wie vorher.

Die Gerade $J_1 M$ ist Potenzlinie der Kreise μ und μ_1 des Aufrisses. Die Gerade AZ ist Potenzlinie des gröſsten Kreises im Grundriſs und des Punktes J_1, d. h. alle Orthogonalkreise des gröſsten Kreises, die ihre Mittelpunkte auf AZ haben, gehen durch J. Die durch $O, L_1, K_1, N_1, III, II, I$ gehenden folgen unter gleichen Schnittwinkeln aufeinander. Der Orthogonalkreis Z geht durch $K_1 J_1 I$, der Kreis E durch $L_1 J_1 III$ u. s. w. Die Schnittsehnen dieser Kreise gehen sämtlich durch den Pol der Geraden AZ. Die entsprechenden Kugeln sind Orthogonalkugeln, welche die Fläche der Cykliden, die in den durch $J_1 N, J_1 K, J_1 L$ u. s. w. dargestellten Kreisen schneiden. Ebenso schneiden die Orthogonalkugeln, die im Aufriſs ihre Mittelpunkte (z. B. D) auf der Hauptachse haben, die Cyklidenfläche in der durch $B_1 C_1, B_2 C_2, \ldots$ dargestellten Kreisschar.

Alle diese Eigenschaften sind allerdings von der allgemeinen Dupinschen Cyklide her bekannt. Konstruktionen und Beweise ergeben sich aber hier in so einfacher Art, daſs die Figur ein lohnendes Beispiel für die darstellende Geometrie ist.

§ 194) Figur 110 stellt dar, was geschieht, wenn das Inversionscentrum auſserhalb des Cylinders liegt. Denkt man sich den Cylinder horizontal liegend und den durch das Inversionscentrum und die Cylinderachse gehende Ebene als Grundriſsebene, die Ebene des durch das Centrum gehenden Cylinderkreisschnittes als Aufriſsebene, so entsteht die in der Figur 110 dargestellte Cyklide. Der Aufriſs erscheint als Kreis mit Tangenten nach A_1. Die sonstigen von A_1 ausgehenden Geraden bedeuten die eine Gruppe von Kreisschnitten. Im Grundriſs handelt es sich um zwei einander berührende Kreise mit dem inneren Ähnlichkeitspunkte J. Die durch J gelegten Geraden geben die andere Gruppe

von Schnittkreisen. Diese geben, in den Aufrifs projiziert, Ellipsen, von denen die eine (gezeichnete) ein Kreis ist. Ebenso geben die im Aufrifs als Gerade erscheinenden Kreise im Grundrifs Ellipsen.

Über die isothermische Einteilung braucht hier nicht besonders gesprochen zu werden, denn dies würde fast eine Wiederholung des in § 193 Gesagten sein. Die eigentliche Reihe der Berührungskugeln ist hier eine innerliche. Ihre Mittelpunkte liegen auf einer Ellipse. Zwei von ihnen sind im Grundrifs gezeichnet. Jede äufserliche Reihe besteht nur aus zwei Kugeln, den Bildern paralleler Tangential-Ebenen des Cylinders. Ebenso ist die Angelegenheit der Orthogonalkugeln (wie vorher) leicht zu erledigen, desgl. die der Loxodromen. Der Leser vollende die Zeichnung selbst.

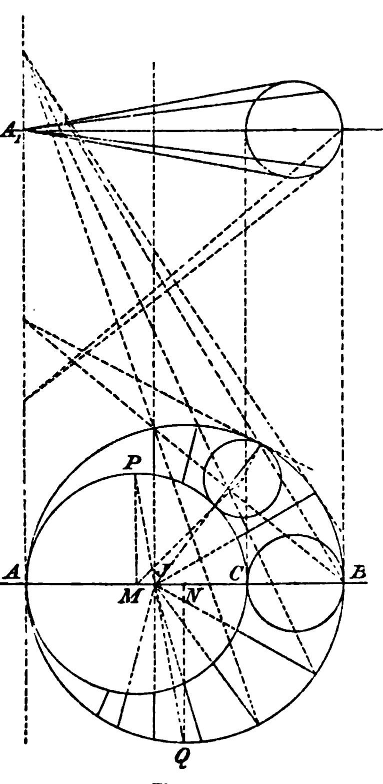


Fig. 110.

Der Leser versuche ferner, über die Lage der äufseren Ähnlichkeitspunkte je zweier Berührungskugeln im Grundrifs einen einfachen Satz aufzustellen und dasselbe für die je zweier Berührungskugeln im Aufrifs von Figur 110 zu thun. Auch sonstige Sätze aus der Theorie der Kreisbüschel und Kreisscharen und aus der Theorie der reciproken Polaren und aus der Lehre von den Kreisberührungen geben zu interessanten Bemerkungen Anlafs.

§ 195) Der Fall, dafs das Inversionscentrum auf dem Cylinder liegt, ist in Figur 111 veranschaulicht. Die Figur ist ein Sonderfall der vorigen, bei dem der äufserste Grundrifskreis unendlich grofs, also zur Geraden geworden ist.

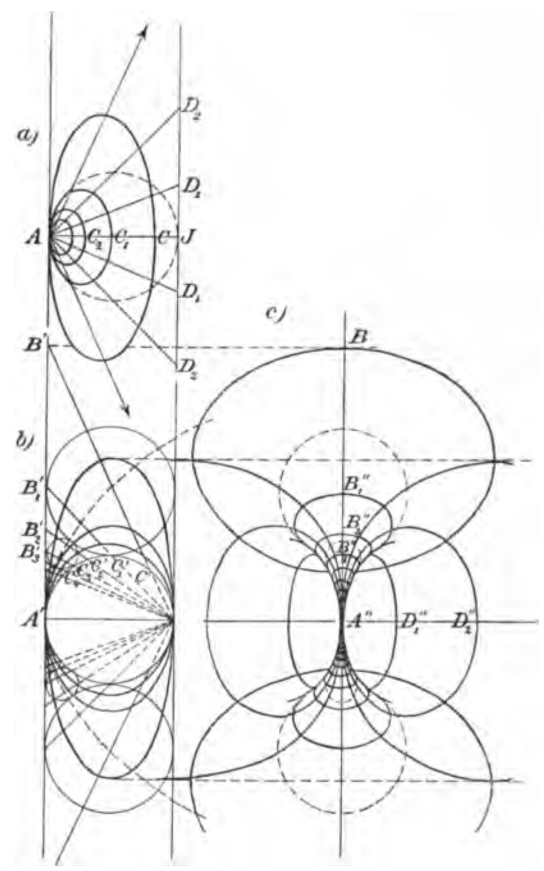


Fig. 111.

Im Grundrifs ist die Reihe von Berührungskugeln angedeutet, deren Mittelpunkte jetzt auf einer Parabel liegen. Alle Berührungssehnen $BC, B_1C_1, B_2C_2 \ldots$ gehen durch J

und sind die Projektionen der einen Kreisschnittschar der Fläche. Sie geben zugleich eine isothermische Einteilung. Denkt man sich dort die Kreisschnitte durch halbkreisförmige Drahtbügel zur Hälfte dargestellt, so erhält man schon eine deutliche Anschauung von der Fläche. Die Kreisschnitte wachsen bis ins Unendliche an, der beide Reihen abschliefsende erscheint als die beiderseits ins Unendliche verlängerte Gerade KL. Die Fläche läuft also schliefslich in eine durch KL dargestellte Ebene aus, die gewissermafsen mit einem Henkelgriff versehen ist, der bei A' unendlich dünn ist.

Im Aufrifs ist die zweite Kreisschar AJ, AD_1, AD_2, AD_3, ... durch gerade Linien dargestellt. Dem Leser sei es überlassen, zu untersuchen, ob diese Linien, wenn sie eine isothermische Einteilung geben sollen, wie dort unter gleichen Winkeln aufeinanderfolgen dürfen.

Um die Gestalt noch besser zu veranschaulichen, klappe man im Grundrifs die Figur um 90^0 um, dann erhält man einen Sonderfall der Figur 247 des ersten Bandes, denjenigen nämlich, bei dem die „Brücke" unendlich dünn erscheint. Wie die jedesmaligen Ellipsen zu konstruieren sind, erkennt man aus der Figur. Der Leser führe zur Übung in der darstellenden Geometrie die Konstruktion streng durch und versuche auch die Loxodromen der Fläche zu konstruieren.

§ 196) Aufgabe. Der senkrechte Kreiskegel mit der quadratischen Einteilung seiner Mäntel durch Gerade und Kreise soll der Inversion unterworfen werden, a) von der Kegelspitze aus, b) von einem beliebigen Punkte der Kegelachse, c) von einem beliebig im Innern liegenden Punkte, d) von einem Punkte aus, der aufserhalb, jedoch in der Normalebene zur Achse gelegen, welche durch die Spitze geht, e) von einem beliebigen Raumpunkte aus. Auch die loxodromischen und die Reihen der inneren und äufseren Berührungskugeln sollen untersucht werden.

Bemerkung. Es entsteht eine Cyklide, welche zwei Spitzen (Knotenpunkte) hat. Diese Cyklide besitzt zwei Kreisscharen, von denen die eine durch die beiden Spitzen

geht, die andere orthogonal zu dieser Schar liegt. Die eine Kugelreihe hatte ursprünglich die Berührungspunkte der Kugelpaare und die Mittelpunkte auf der Kegelachse und berührte den Kegelmantel in seinen Kreisschnitten. Die Tangentialebenen berührten längs der Kegelgeraden. Aufserdem giebt es zwischen den Kegelmänteln Reihen von Berührungskugeln, die von Drehungscykliden umschlossen sind, wobei gewisse Drehungscykliden einander berühren und zwar längs konzentrischer Kreise, während die Kegelmäntel in Punkten der Kreisschnitte von den Kugeln, in Kreisschnitten von den Cykliden berührt werden.

Alle diese Kugelreihen und die Tangentialebene geben bei der Inversion wiederum Kugeln, die Cykliden werden in allgemeine Dupinsche Cykliden verwandelt. Die Loxodromenscharen des Kegels werden wiederum Loxodromenscharen. Die quadratischen Einteilungen gehen wieder in solche über.

Da die Loxodromen des Kegels zugleich Loxodromen von senkrechten Cylindern sind, deren Basis durch je eine logarithmische Spirale gebildet wird, so ist es zweckmäfsig, auch diese Cylinder der Inversion zu unterwerfen. Die Geraden der Cylinder gehen dabei über in Kreise durch das Inversionscentrum, eine der logarithmischen Spiralen verwandelt sich in eine logarithmische Doppelspirale oder Bicircularspirale, d. h. sie durchschneidet die Kreise eines Kreisbüschels unter konstantem Winkel. Diese Kurve soll im nächsten Abschnitt genauer untersucht werden. Der Leser ist aber imstande, die Untersuchung schon jetzt selbständig durchzuführen. Die sonstigen Spiralschnitte des Cylinders verwandeln sich in gewöhnliche oder verallgemeinerte Kugelloxodromen, die mit den Bildern der Cylindergeraden eine isothermische Einteilung für das Bild der Cylinderfläche geben.

Das Bild der Cylinderfläche und des Kegelmantels schneiden einander in einer gemeinschaftlichen Loxodrome der beiden neuen Flächen.

Mit dieser instruktiven Transformation lassen sich zahlreiche Untersuchungen verbinden. Die Kreisschnitte und Geraden des Kegels werden Krümmungslinien der neuen Fläche.

§ 197) **Aufgabe.** Die Schraubenröhrenfläche mit ihren Kreisschnitten und deren Orthogonalkurven,

mit den Schraubenlinien und deren Orthogonalen, mit einer Reihe einbeschriebener Berührungskugeln soll der Inversion unterworfen werden, und zwar

a) von einem Punkte des Mittelpunktsweges aus,
b) von einem andern Punkte des Innenraums aus,
c) von einem Punkte aufserhalb der Fläche aus,
d) von einem Punkte der Fläche aus.

Bemerkungen. Jede der Schraubenlinien der gegebenen Fläche ist zugleich Loxodrome eines gewöhnlichen Kreiscylinders. Dieser Cylinder giebt eine Cyklide mit Berührungspunkt. Die Schraubenlinie geht in eine Loxodrome dieser Cyklide über. Eine Schar von Schraubenlinien dieser Art bestimmt das entstehende Bild der Schraubenröhrenfläche, die dort unendlich geringen Durchmesser erhält, wo sämtliche Cylinderbilder ihren Berührungspunkt haben, nämlich im Inversionscentrum. (Aus den konzentrischen Cylindern entstehen Cykliden, deren eine gemeinsame Symmetrieebene in einer Kreisschar geschnitten wird.)

Jeder Krümmungskreis der Schraubenlinie verwandelt sich in einen Krümmungskreis, jede Schmiegungsebene in eine bestimmte Kugel, die durch das Inversionscentrum und den entsprechenden Krümmungskreis der neuen Kurve geht. Jede Schmiegungskugel der Schraubenlinie wird eine Schmiegungskugel der neuen Kurve. Die Reihe der einbeschriebenen Kugeln wird zu einer Reihe von Kugeln, die der neuen Fläche ein- oder umbeschrieben sind und sie in Kreisschnitten berühren. Die neue Fläche hat also überall Kreisschnitte, und diese und die orthogonale Kurvenschar sind ihre Krümmungslinien, so dafs auch das Krümmungsmafs für diesen Punkt berechnet werden kann. (Dies gilt auch von den beiden vorangehenden Aufgaben.) Die isothermische Einteilung durch Schraubenlinien und ihre Orthogonalschar geht in eine isothermische Einteilung der neuen Fläche über. Dasselbe gilt von den orthogonalen Loxodromenscharen der Schraubenröhrenfläche bezw. ihren Abbildungen. Jede Krümmungscyklide, die bei der Schraubenfläche Drehungscyklide war, verwandelt sich in eine allgemeine Dupinsche Cyklide, die längs der Kreisschnitte,

mit denen sie die Fläche berührt, mit ihr und ihren Krümmungslinien übereinstimmende Krümmungsverhältnisse zeigt, was eine zweite Berechnungsart des Gaufsschen Krümmungsmafses ermöglicht.

Näher soll hier auf den Gegenstand nicht eingegangen werden, da im folgenden Kapitel an einer schwierigeren Fläche die Inversion durchgeführt werden soll.

§ 198) Die Inversion an Schraubenregelflächen einfacher oder verallgemeinerter Art (Gerade durch Achse, Gerade nicht durch Achse gehend, abwickelbare Schraubenregelfläche, Minimalschraubenregelfläche u. s. w.) vorzunehmen, giebt ebenfalls eine Reihe lehrreicher Übungsbeispiele. Selbstverständlich kann man daher auch Schraubengewinde beliebigen Profils jener Transformation unterwerfen. Das letztere dürfte aber nicht von besonderem Werte sein. Höchstens das flache oder scharfe, oder das Halbkreisgewinde würden interessantere Formen geben.

γ) Allgmeine Bemerkungen über Transformationsgruppen und Verwandtschaften.

§ 199) Bemerkungen über Inversion und Inversionsreihen. Unterwirft man z. B. die Schraubenröhrenfläche der Inversion auf mehrfache Weise, so stehen sämtliche neuen Flächen in Inversionsverwandtschaft, d. h. jede der neuen Flächen läfst sich durch Inversion mittels je einer geeignet gewählten Kugel direkt in jede andere verwandeln. Dies giebt eine Flächengruppe, die man als die Gruppe der Inversionsverwandten der Schraubenfläche betrachten kann, d. h. es giebt jedesmal eine Inversionskugel im Raume, welche irgend eine dieser Flächen in eine aus den übrigen gewählte verwandelt und ebenso diese in die erstere transformiert. Die Transformation ist daher auch involutorisch.

Verwandelt man so eine erste Fläche in eine zweite, diese in eine dritte, diese in eine vierte u. s. w. bis man endlich eine n^{te} Fläche erhält, wobei stets neue beliebig im Raum liegende Inversions-Kugeln mit neuem Radius zur Anwendung gelangen, so giebt es eine Inversionskugel,

durch die man direkt die erste der Flächen in die letzte verwandeln kann. Eine Reihe von Transformationen derselben Art, bei denen es möglich ist, in solcher Weise die aufeinander folgenden Operationen durch eine einzige zu ersetzen, nennt man mit Lie eine Transformationsgruppe. Die hier behandelte Inversion im Raume hat also den Gruppencharakter im Sinne der von Lie untersuchten Theorie der Transformationsgruppen.

Es ist von Wichtigkeit, zu wissen, was bei einer solchen Transformationsgruppe unveränderlich oder invariant bleibt. Unterscheidet man nicht zwischen Gerader und Kreis, ebenso nicht zwischen Ebene und Kugel, so kann man nach den obigen Betrachtungen sagen: Bei einer Reihe von Inversionen geht jeder Kreis in einen Kreis, jede Kugel in eine Kugel über. Der Kreis- bezw. Kugelcharakter bleibt also erhalten. Insbesondere geht jeder Krümmungskreis in einen Krümmungskreis, jede Schmiegungskugel in eine Schmiegungskugel über. Jede Dupinsche Cyklide verwandelt sich in eine Dupinsche Cyklide, insbesondere jede Krümmungscyklide in eine Krümmungscyklide. Jeder Winkel, möge er von zwei Kurven, oder von zwei Flächen, oder von einer Kurve und einer Fläche gebildet werden, bleibt erhalten, die Verwandtschaft ist also isogonal (sie ist, abgesehen von Kongruenz, Symmetrie, Ähnlichkeit, symmetrische Ähnlichkeit, die einzige räumliche Verwandtschaft isogonalen Charakters). Orthogonale Systeme von Kurvenscharen bleiben also solche, insbesondere gehen je zwei Scharen von Krümmmungslinien in zwei Scharen von Krümmungslinien, je zwei orthogonale Isothermenscharen wiederum in solche, isothermische Einteilungen wieder in solche über. Orthogonale Flächenscharen (je drei zusammengehörige Systeme) gehen wiederum in solche über. Besitzt die erste Fläche Reihen um- oder einbeschriebener Berührungskugeln, so besitzt sie auch die letzte. (Dabei kann aber um- und einbeschrieben vertauscht werden, was jedoch unwesentlich ist.) Schneiden sich vier Kurven einer Fläche in einem Punkte (so dafs die vier Tangenten in der Tangentialebene liegen), und bilden die Tangenten der Kurven in diesem Punkte eine Gruppe harmonischer Strahlen, so ist

dasselbe bei der letzten Fläche der Fall. Bilden sie dagegen nicht harmonische Strahlen, so bleibt das Doppelverhältnis erhalten. Entsprechendes gilt von je vier einander schneidenden Ebenen bezw. Kugeln. Auch die Doppelverhältnisse und Doppelwinkel (im Sinne von Möbius und Bretschneider) bleiben erhalten. Gebilde, die gegen eine Kugel invers sind, geben inverse Gebilde gegen die neue Kugel. Die beiden im Raume möglichen kubischen Einteilungen bleiben solche.

Gilt für eine Reihe von um- oder einbeschriebenen Berührungskugeln, die sich etwa der ersten Fläche einbeschreiben lassen, ein Schliefsungsproblem im Steinerschen Sinne, so gilt es unverändert auch für die Kugelreihe der letzten Fläche. Entsprechendes läfst sich über Kreisreihen oder Ovalreihen, für die ein Schliefsungsproblem gilt, aussprechen. Auch die Ponceletschen Schliefsungssätze für Tangentenreihen zwischen je zwei Kreisen bleiben in gewisser Form bestehen.

Kurz, man kennt bei einer solchen Transformationsgruppe, sobald man die Invarianten für eine Transformation kennt, dasjenige, was für eine endliche oder unendliche Folge solcher Transformationen gilt.

Darin liegt eine grofse Ersparnis, denn zahlreiche Einzeluntersuchungen sind überflüssig und ganze Reihen von Sätzen lassen sich unmittelbar aussprechen. Der Förderung der Ökonomie des Denkens wird in hohem Mafse Rechnung getragen.

§ 200) Auch mehrere aufeinanderfolgende Affinitäts-Transformationen lassen sich durch eine einzige ersetzen; ebenso besitzen aufeinander folgende Kollineations-Transformationen den Gruppen-Charakter. Was bei ihnen konstant bleibt, ist im ersten Bande auseinandergesetzt worden. — Dagegen kann man die Transformationen mittels der reciproken Polaren im Raum (nach Poncelet) nur dann durch eine einzige ersetzen, wenn die Anzahl der Operationen eine ungerade ist, denn nur dann gehen Ebenen in Punkte, Punkte in Ebenen über. Handelt es sich aber um eine gerade Anzahl von Operationen, so gehen Ebenen in Ebenen, Punkte

in Punkte über. Eine beliebige Anzahl von Doppeloperationen läfst sich ebenfalls durch eine Doppeloperation ersetzen. Sieht man jedoch von dem Unterschiede ab, der darin liegt, dafs es sich einmal um Flächen handelt, die durch ihre Punkte bestimmt werden, das andere mal um Flächen, die von Ebenen umhüllt werden (Tangentialebenen), so könnte man auch hier von einer Gruppe sprechen. Jedenfalls handelt es sich um Gruppen von Flächen, die in Polarverwandtschaft stehen (die man von einem noch allgemeineren Standpunkte aus als Dualitätsverwandtschaft bezeichnen kann. Ebenso konnte vorher von Inversions-, Affinitäts-, Kollineationsverwandtschaft gesprochen werden).

Dafs bei der Polarverwandtschaft Gerade in Gerade, harmonische Strahlen in harmonische Strahlen, anharmonische Strahlen in solche desselben Doppelverhältnisses übergehen, ist schon in Band I gezeigt worden. Projektivische Punktreihen geben bei gerader Anzahl von Operationen projektivische Punktreihen, sonst projektivische Ebenenfolgen, projektivische Strahlenbüschel geben projektivische Strahlenbüschel u. s. w. Kegelschnitte werden Kegelschnitte, Kegelschnittsflächen (Flächen zweiten Grades), die durch Punkte gebildet sind, werden Kegelschnittsflächen, die in dem einen Falle (gerade) von Punkten, im anderen Falle (ungerade) von Tangentialebenen bestimmt werden.

Wie die Inversion durch Kugeln vermittelt wurde, so findet hier eine Transformation durch Kugeln, oder durch irgend welche Kegelschnittsflächen (Flächen zweiten Grades) statt.

Benutzt man zu einer Reihe von Polaritätstransformationen die verschiedenst gestalteten und verschiedenst liegenden Kegelschnittsflächen, so giebt es (abgesehen von dem Unterschiede für gerade oder ungerade Anzahl, d. h. abgesehen von dem Falle Punkt = Punkt oder Punkt = Ebene) stets eine Kegelschnittsfläche, durch deren Benutzung man die erste Flächengestalt direkt in die letzte übertragen kann.

Es liegt nichts im Wege, die hier behandelten Flächen auch durch die drei hier genannten Transformationen in neue Flächen zu verwandeln. Dafs freilich dabei wesentlich

neues gefunden wird, ist kaum zu erwarten. Es handelt sich nur um die Übung in der Raumvorstellung und etwa um Übungen in der darstellenden Geometrie.

§ 201) In entsprechender Weise könnte man für Flächen von Verbiegungsverwandtschaft sprechen. Bei dieser sind invariant 1) die Winkel, die von einander schneidenden Kurven gebildet werden, 2) die Längen von Linien, 3) die Inhalte von Flächenteilen, 4) der Charakter geodätischer Linien, 4) der Charakter isothermischer Kurvenscharen und isothermischer Einteilungen, 5) das Gaufssche Krümmungsmafs für jeden Punkt der ursprünglichen Fläche, so dafs z. B., wenn für diese erste Fläche die eine Schar von Krümmungslinien aus Geraden besteht, was das Krümmungsmafs Null giebt, auch für jede der durch Biegung entstehenden Flächen eine geradlinige Schar von Krümmungslinien vorhanden sein mufs, u. s. w., 6) Minimalflächen bleiben Minimalflächen.

So gehören z. B. zu derselben Biegungsverwandtschaft: Ebene-, allgemeine Cylinder-, allgemeine Kegel-, Tangentenflächen von Raumkurven (z. B. abwickelbare Schraubenregelflächen) u. s. w. Einer weiteren Gruppe gehören an: Einmantelige Drehungshyperboloide, nicht abwickelbare Schraubenregelflächen (mit Ausnahme der Minimalschrauhenregelfläche). Einer anderen Gruppe gehören an die Minimalschraubenregelfläche, das Katenoid und alle aus diesen durch Biegung entstehenden Flächen, zu denen viele besonders interessante Gebilde gehören. Ferner gehört jede Schraubenfläche mit einer bestimmten Drehungsfläche in dieselbe Verbiegungsgruppe.

§ 202) Selbstverständlich hat sich der elementare Standpunkt dieses Buches nur mit dem elementar Erreichbaren auf dem Gebiete der Verwandtschaften zu befassen, z. B. auch mit den elementaren konformen Übertragungen einiger der behandelten Flächen auf gewisse andere. Es sei jedoch darauf aufmerksam gemacht, dafs nicht alle Flächen für jede Art der Verwandtschaft gleich brauchbar sind. Bei der Inversionsverwandtschaft z. B. beschränke sich der Anfänger auf Ebenen, Kugeln, Cykliden, Schraubenröhrenflächen, Spiralröhrenflächen und deren Inversionsverwandten; aber auch die Drehungsflächen, die durch Drehung einer

Schar logarithmischer Spiralen um einen Radiusvektor des Systems entstehen, ferner diejenigen Flächen, die durch Drehung eines Systems logarithmischer Doppelspiralen um die Verbindungslinie der Büschelpunkte (Pole) entstehen, sind mit ihren Inversionsverwandten der elementaren Behandlung zugänglich. Bei Affinitäts- und Kollineationsverwandtschaft beschränke man sich auf Flächen vom höchstens zweiten Grade, ebenso bei der Verwandtschaft der Polarität oder Dualität. Der Verbiegung oder Abwickelung lassen sich zwar alle Arten von Flächen (event. aufgeschnitten zu denken) unterwerfen, aber nicht immer ist die korrekte Konstruktion elementar durchzuführen.

Vierter Abschnitt.

Verallgemeinerte Röhrenflächen und ihre Inversionsverwandten.

α) Die logarithmische Spiralröhrenfläche und die logarithmische Spirale.

§ 203) Erste Entstehungsart und vorläufige Beschreibung. Der Mittelpunkt einer Kugel mit veränderlichem Radius bewege sich auf einer logarithmischen Spirale, und zwar soll dabei der Kugelradius zum Radiusvektor der Spirale stets in konstantem Verhältnis bleiben. Die die Kugel in allen Lagen umhüllende Fläche heifst die logarithmische Spiralröhrenfläche.

Diese transscendenten Flächen sind in mehrfacher Hinsicht der elementaren Behandlung zugänglich, so dafs sie ein zweckmäfsiges Anfangsbeispiel für das Eindringen in die Flächenlehre darbieten. Um für sie zu interessieren, sollen einige ihrer Eigenschaften vorausgesagt, später bewiesen werden. Dabei werde die Ebene des Mittelpunktsweges, die eine Symmetrieebene ist, als Grundrifsebene betrachtet.

Im Grundrifs erscheint die Fläche von zwei logarithmischen Spiralen begrenzt, die mit dem Mittelpunktswege zu derselben Spiralenschar (gemeinschaftliches Centrum, Durchschneiden der Radii vectores unter demselben konstanten Winkel) gehören. Die aufeinanderfolgenden „Berührungskugeln“ (Figur 112) berühren sich paarweise in Punkten einer Spirale derselben Schar. Dreht man die äufserste Spirale erst in die Lage der letztgenannten, dann

in die der innersten Spirale, so handelt es sich um zwei Drehungen von derselben Gröfse. (Isothermische Halbierung des Spiralstreifens.) Die in Figur 112 gezeichneten Berührungssehnen, (wie PP_1, QQ_1, RR_1, ...) der Kreise sind Projektionen der Kreisschnitte der Fläche. Die Ebenen

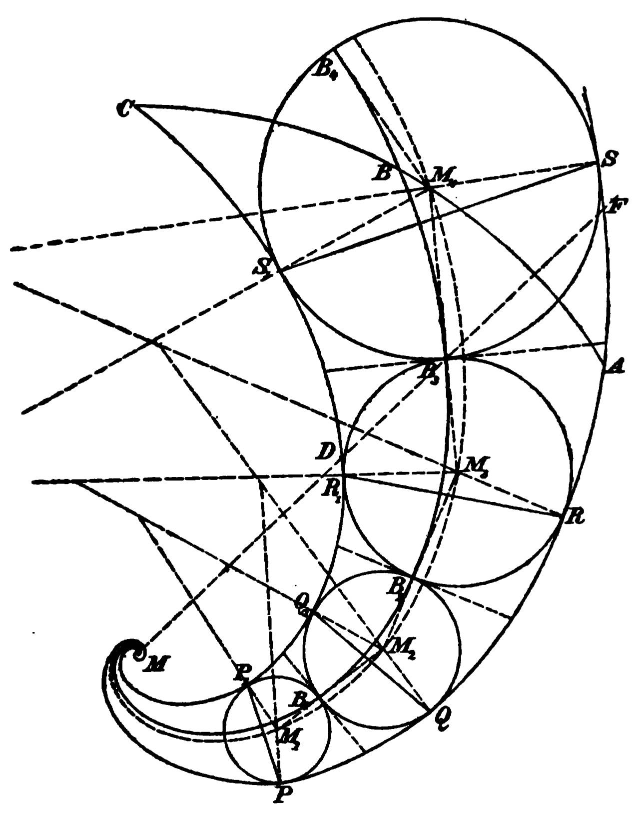


Fig. 112.

dieser Schnitte umhüllen einen spiralischen Cylinder, dessen Schnittlinie mit der Symmetrieebene zu derselben Spiralenschar gehört. Diese Kreisschnitte sind die Krümmungslinien erster Art der Fläche. Denkt man sich den zu einem Kreisschnitte gehörigen Tangentenkegel der entsprechenden Kugel, so sind

dessen Geraden Tangenten der Krümmungslinien zweiter Art. Die Spitzen aller dieser Kegel liegen wiederum auf einer Spirale der besprochenen Schar. Demnach kann man mit Hilfe der Kegelgeraden, die den Kreisschnitt rechtwinklig schneiden, die Tangenten der Krümmungslinien zweiter Art leicht zeichnen und so diese Linien ausschattieren. Diese Krümmungslinien sind aber nicht identisch mit den Kurven, auf denen sich die Punkte des Kreisschnitts bei der einfachsten Entstehungsweise der Fläche bewegen. Diese Bewegungslinien sind vielmehr Kegelloxodromen, die sich in der Projektion als Spiralen der Schar darstellen. Die zu der Spiralschar gehörigen Cylinder, welche die Fläche schneiden, geben auf dieser jene Bewegungskurven. Jede der letzteren hat in ihrem ganzen Verlaufe einen konstanten Steigungswinkel.

Jede Berührungskugel (Figur 113) giebt Anlafs zu einer Dupinschen Krümmungscyklide. Diese ist nach Figur 113 folgendermafsen zu finden. $P\mu$ sei Krümmungsradius der äufsersten Spirale, $P_1\mu_1$ der der innersten. Die beiden Krümmungskreise und der Berührungskreis gehören der Symmetrieebene dieser allgemeinen Cyklide an. Die Gerade PP_1 schneidet die Centrale der Kreise μ und μ_1 in deren innerem Ähnlichkeitspunkte J und steht dabei auf ihr senkrecht. Zu jedem Kreisschnitte gehört eine bestimmte Krümmungscyklide, die den Schnitt mit der Röhrenfläche gemein hat und die letztere längs des Schnittes berührt. Beide Flächen stimmen längs drei unendlich benachbarter Kreisschnitte vollständig mit einander überein, sind also hinsichtlich der Krümmungen dort identisch. Die Bewegungskurven der Röhrenfläche werden von den Krümmungslinien zweiter Art im allgemeinen geschnitten, und zwar so, dafs sie sich den Grenzspiralen asymptotisch annähern. Durch die Bewegungskurven läfst sich die Fläche isothermisch einteilen, durch sie und ihre Orthogonalkurven ist also eine quadratische Einteilung zu erzielen. Also ist auch die konforme Abbildung der Fläche auf den unendlichen Parallelstreifen zu ermöglichen. Ein grofser Teil der Eigenschaften bleibt erhalten, wenn die Fläche der Inversion unterworfen wird; z. B. das Vorhandensein der einbeschriebenen Kugeln (die teilweise zu umbeschriebenen werden können), der Kreisschnitte als Krümmungslinien

erster Art, der Berührungscykliden u. s. w. Die Bewegungskurven gehen dabei in Loxodromen bestimmter verallgemeinerter Cykliden über.

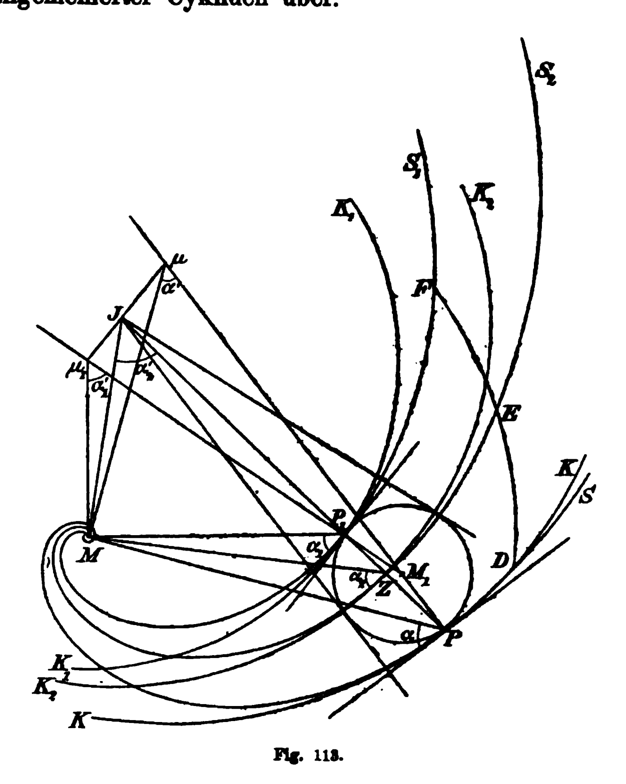
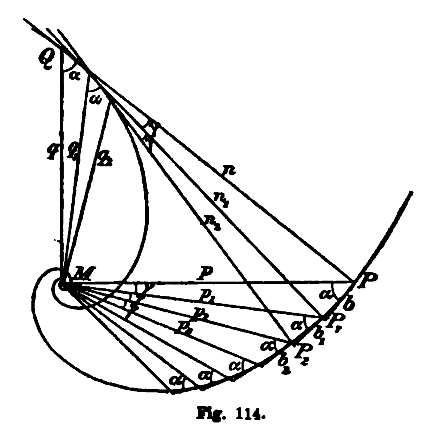


Fig. 113.

Zwar ist die logarithmische Spirale schon in Band I Seite 247 und in Band II Seite 378 und 386 zur Sprache gekommen, das Folgende verlangt aber eingehendere Kenntnisse über diese Kurve. Da die elementaren Lehrbücher der Geometrie solche nicht übermitteln, soll das Wichtigste hier abgeleitet werden.

§ 204) Konstruktion der logarithmischen Spirale. Zwei Radii vectores $MP = p$ und $MP_1 = p_1$ geben ein Dreieck MPP_1, welches bei M den Winkel γ haben möge (vergl. Fig. 114). Man zeichne noch weitere Radii vectores

MP_2, MP_3, ..., die unter demselben Winkel γ aufeinander folgen, und deren Längen p_n mit den gegebenen eine geometrische Reihe $p, p_1, p_2, p_3, \ldots$ bilden. Bei $p = 1$ z. B. handelt es sich um die Reihe $1, p_1, p_1^2, p_1^3 \ldots$ Diese Reihe soll auch rückwärts fortgesetzt werden, z. B. als


Fig. 114.

$$1, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_1^2}, \frac{1}{p_1^3}, \ldots$$

Dann liegen die Endpunkte der Radii vectores auf einer Kurve, die man als logarithmische Spirale bezeichnet. Die Einschaltung weiterer Punkte dieser Kurve kann folgendermaßen erfolgen. Man halbiere jeden Winkel γ und mache die Halbierende gleich der mittleren Proportionale der Schenkel des Winkels. Mit diesen Halbierungen fahre man fort, bis die Verbindungslinien der Nachbarpunkte ein „Polygon" geben, welches mit hinreichender Annäherung die Kurve veranschaulicht.

Damit erhält man zunächst folgenden grundlegenden Satz: **Die Längen von gleichwinklig aufeinander folgenden Radii vectores der logarithmischen Spirale bilden eine geometrische Reihe.** Die Umkehrung des Satzes ist leicht auszusprechen. Ferner folgt:

Die so entstehenden Sektoren der Kurve sind ähnlich, die zugehörigen Bogen bilden eine geometrische Reihe. Bogen der logarithmischen Spirale mit gleichen Centriwinkeln sind einander ähnlich. Sämtliche Radii vectores werden von der Kurve unter demselben Winkel α durchschnitten.

Solcher Sätze lassen sich noch viele aussprechen. Die Hauptfrage ist aber die, ob sich der Schnittwinkel α der Kurve mit jedem Radiusvektor aus p, p_1 und γ bestimmen

läfst. Diese Frage läfst sich am besten für die gesamte Spiralenschar beantworten.

§ 205) Die Spiralenschar, d. h. der Komplex von Spiralen desselben Centrums M, welche das Strahlenbüschel durch M unter demselben Schnittwinkel α durchsetzen, wurde ebenfalls schon mehrfach besprochen, z. B. gelegentlich der Kugelloxodromen und der Mercatorkarte in Bd. I, Seite 249 und 251, in Bd. II, Seite 378 und 386 bis 389. An letzter Stelle war in Figur 140 die isothermische Einteilung der Ebene durch Strahlenbüschel und konzentrische Kreisschar gezeichnet. Der dortige Fall der quadratischen Einteilung führte auf logarithmische Spiralen als Diagonalkurven, welche die Radien unter 45^0 schneiden, Kurven, die man vielfach als natürliche logarithmische Spiralen bezeichnet, was nicht gerade zweckmäfsig ist. Hier sollen sie als logarithmische Spiralen zu 45^0, allgemeiner als logarithmische Spiralen zu α^0 bezeichnet werden. Diese allgemeinen logarithmischen Spiralen erhält man bei der entsprechenden Einteilung der Ebene in ähnliche Rechtecke.

Dort war in Figur 141 der üblichen Lage der Mercatorkarte wegen der zugehörige Parallelstreif der der Ebene senkrecht aufgestellt, mathematisch aber ist es einfacher, ihn horizontal hinzulegen. (Mafsgebend sind funktionentheoretische Gründe.) In der Tabelle Bd. II, Seite 386 sind dann X und Y mit einander zu vertauschen. In den ebenen Streifen einerseits und im Kreisbilde andererseits entsprechen dann nach jener Tabelle einander folgende Koordinaten bezw. Funktionen:

Parallelstreif.	Kreisbild.
1) X	1) ${}^e lg\, r$
2) Y	2) φ
3) e^X	3) r
4) $f(X, Y) = 0$	4) $f({}^e lg\, r, \varphi) = 0$
5) $f(e^X, Y) = 0$	5) $f(r, \varphi) = 0$
6) $f(e^X \cos\alpha,\ e^Y \sin\alpha) = 0,$	6) $f(x\, y) = 0.$

Dabei ist φ der im Bogenmafs (am Einheitskreise) gemessene Winkel. Der Geraden

$$1)\qquad \frac{Y - Y_1}{X - X_1} = \tan\alpha = \frac{k}{1} = k$$

entspricht demnach die logarithmische Spirale

$$2)\qquad \frac{\varphi - \varphi_1}{{}^e lg\, r - {}^e lg\, r_1} = \tan\alpha = k.$$

Damit ist die am Schlufs des vorigen Paragraphen gestellte Frage beantwortet. Man hat nur $\varphi - \varphi_1 = \gamma$, $r = p$ und $r_1 = p_1$ zu setzen, um zu erhalten

$$3)\qquad \tan\alpha = \frac{\gamma}{{}^e lg\, p - {}^e lg\, p_1} = \frac{\gamma}{{}^e lg\left(\frac{p}{p_1}\right)}.$$

So berechnet man den Schnittwinkel α der durch p, p_1 und γ bestimmten logarithmischen Spirale. Er soll daher als bekannt betrachtet werden. Umgekehrt berechnet man den Quotienten der geometrischen Reihe der unter dem Winkel γ aufeinander folgenden Radii vectores für eine logarithmische Spirale vom Schnittwinkel α mittels der Formel

$$4)\qquad \frac{p}{p_1} = e^{\frac{\gamma}{\tan\alpha}}.$$

Endlich berechnet sich der konstante Winkel γ für die in geometrischer Reihe aufeinander folgenden Radii vectores bei einer Spirale mit Schnittwinkel α aus

$$5)\qquad \gamma = {}^e lg\left(\frac{p}{p_1}\right) . \tan\alpha.$$

Will man die Gleichung aller Geraden haben, welche die X-Achse z. B. in den Punkten

$$6)\qquad 0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \pm 4a, \ldots$$

unter demselben Winkel α schneiden, so schreibe man die Gleichung 1) indem man $Y_1 = 0$ setzt, in der Form

$$7)\qquad X - Y\cot\alpha = X_1,$$

wo X_1 die durch 6) dargestellte Wertreihe anzunehmen hat. Dabei wird die Y-Achse ebenfalls unter Abständen geschnitten, die eine arithmetische Reihe bilden. Dieser Parallelenschar entspricht die Schar logarithmischer Spiralen

$$8) \qquad {}^{e}lg\, r - \varphi \,.\, \cot\alpha = {}^{e}lg\, r_1,$$

wo ${}^{e}lg\, r_1$ die Wertreihe 6) annimmt, oder r_1 die Wertreihe

$$9) \qquad e^{\pm 0},\ e^{\pm a},\ e^{\pm 2a},\ e^{\pm 3a},\ldots,$$

was eine geometrische Reihe ist. Dabei wird der Einheitskreis so geschnitten, daſs die einzelnen Bogen eine arithmetische Reihe bilden, d. h. die logarithmischen Spiralen folgen unter gleichen Winkeln aufeinander.

Die Schreibweise 8) nennt man die isothermische Schreibweise der Spiralenschar.*) (Sie ist funktionentheoretisch von Bedeutung.)

Mit demselben Rechte kann man statt Gleichung 1), indem man $X_1 = 0$ setzt, schreiben

$$10) \qquad Y - X \tan\alpha = Y_1,$$

was eine Parallelschar von Geraden bedeutet, welche die Y-Achse unter konstantem Winkel in Punkten schneidet, die in konstanten Abständen aufeinander folgen, wenn Y_1 eine Wertreihe wie 6) annimmt.

Die entsprechende Schar logarithmischer Spiralen hat die Gleichung

$$11) \qquad \varphi = lgr \tan\alpha + \varphi_1,$$

und dabei folgen die Spiralen unter gleichen Winkeln aufeinander, wenn φ_1 die Werte der Reihe 6) annimmt. Auch 11) ist eine isothermische Schreibweise.

---

*) Gebräuchlicher ist als isothermische Schreibweise die folgende:

$$(lgr) \cos\alpha + \varphi \,.\, \sin\alpha = 0,\ \pm a,\ \pm 2a,\ \pm 3a,\ \ldots$$
$$-(lgr) \sin\alpha + \varphi \cos\alpha = 0,\ \pm a,\ \pm 2a,\ \pm 3a,\ \ldots$$

Diese stellt zwei Scharen von Spiralen dar, durch welche die Ebene in ein System kleiner „Quadrate" eingeteilt wird. Die zweite schneidet die Radien unter α, die erste unter $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

Am bequemsten ist es, die Wertreihe

12) $$0, \pm\frac{2\pi}{n}, \pm\frac{4\pi}{n}, \pm\frac{8\pi}{n}, \ldots\ldots$$

zu wählen, weil dann die Reihe der Spiralstreifen nach einem Umgange schliefst.

Wie die Orthogonalschar von Geraden, die eine quadratische Einteilung giebt, leicht durch eine Gleichung darzustellen ist, so gilt dies auch von der orthogonalen Spiralenschar.

§ 206. Nach Gleichung 2) ist $\tan\alpha$ gleich dem Quotienten k aus Winkeldifferenz und Differenz der Logarithmen der Radii vectores. Denkt man sich jedoch die quadratische Einteilung der Ebene durch Strahlenbüschel und konzentrische Kreisschar bis ins kleinste durchgeführt, so läfst sich, wenn die Diagonale für ein aus einer Reihe von k Quadraten gebildetes Rechteck genommen wird, deren Neigung ebenfalls aus $\tan\alpha = \frac{k}{1}$ bestimmen. Dabei ist aber $\tan\alpha = \frac{\text{Bogendifferenz}}{\text{Radiendifferenz}}$.

Dies scheint der Gleichung 2) zu widersprechen, ist aber für die Grenze ganz dasselbe.

Ist nämlich die Radienreihe

$$1, e^{\pm\frac{2\pi}{n}}, e^{\pm\frac{4\pi}{n}}, e^{\pm\frac{6\pi}{n}}, + \ldots.,$$

die Reihe ihrer Neigungen

$$0, \pm k\frac{2\pi}{n}, \pm k\frac{4\pi}{n}, \pm k\frac{6\pi}{n}, \ldots\ldots$$

so ist die Differenz zweier benachbarter Radien z. B.

$$r - r_1 = r\left(1 - \frac{r_1}{r}\right) = r\left(1 - \frac{e^{\frac{2m\pi}{n}}}{e^{\frac{2(m+1)\pi}{n}}}\right) = r\left(1 = e^{\frac{-2\pi}{n}}\right),$$

die zweier benachbarter Winkel

$$(\varphi - \varphi_1) = k\frac{2(m+1)\pi}{n} - k\frac{2m\pi}{n} = k\frac{2\pi}{n},$$

die der zugehörigen Bogen also $r(\varphi - \varphi_1) = r\,k\frac{2\pi}{n}$. Demnach ist jetzt

$$\tan\alpha = \frac{r(\varphi - \varphi_1)}{r - r_1} = \frac{r\,k\frac{2\pi}{n}}{r\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{n}}\right)}$$

$$= \frac{k\frac{2\pi}{n}}{1 - \left[1 - \frac{\frac{2\pi}{n}}{1!} + \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^3}{3!} + \cdots\cdots\right]},$$

oder

$$\tan\alpha = \frac{k}{\frac{1}{1!} - \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2!} + \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2}{3!} - \cdots\cdots}$$

Die Summe der oscillierenden Reihe im Nenner liegt zwischen

$$\frac{1}{1!} \text{ und } \left(\frac{1}{1!} - \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2!}\right),$$

also für die Grenze $n = \infty$ zwischen 1 und $(1 - 0)$, demnach ist für die Grenze, ebenso wie oben,

$$\tan\alpha = k.$$

Die Übereinstimmung ist damit nachgewiesen.

§ 207. **Quadratische Einteilung der Ebene durch zwei Spiralenscharen.** Hatte man in der Ebene des Strahlenbüschels und der konzentrischen Kreisschar eine quadratische Einteilung, so geben auch die Diagonalkurven eine quadratische Einteilung (durch zwei Spiralscharen vom Schnittwinkel $\pm 45^0$). Zeichnet man statt dessen Diagonalkurven durch die Schnittpunkte, von denen die einen einem Recht-

ecke vom Seitenverhältnis $\frac{k}{1} = \tan\alpha$, die andere einem solchen vom Seitenverhältnis $\frac{1}{k} = \tan\beta$ entsprechen, so erhält man ebenfalls eine quadratische Einteilung durch zwei Spiralenscharen. Während aber die vorigen symmetrisch zu einander waren, ist dies jetzt nicht mehr der Fall.

§ 208) Ähnlichkeitsbeziehungen an der logarithmischen Spirale. Oben war die Reihe ähnlicher auf einander folgender Sektoren der Spirale besprochen. Homologe Punkte dieser Sektoren liegen auf einer Spirale derselben Schar. Daraus folgt z. B., dafs jeder Radius vector die ganze Spiralenschar unter konstantem Winkel schneidet, was schon beim Begriff der Schar ausgesprochen war. Dem Dreieck jedes Sektors läfst sich ein Kreis umbeschreiben. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf einer Spirale der Schar. Jedem der Sektoren selbst läfst sich ein Kreis einbeschreiben, von den Mittelpunkten dieser Kreise gilt dasselbe. Die Radien dieser Kreisreihen bilden geometrische Reihen, deren Quotient übereinstimmt mit dem der Kreise der Radii vectores, d. h. mit $\frac{p}{p_1}$. Letzteres gilt auch von der Reihe der Bogen der Sektoren. Die Flächen der Sektoren bilden eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\left(\frac{p}{p_1}\right)^2$; dasselbe gilt von homologen Flächenstücken innerhalb der Sektoren.

Ist die Spirale in der besprochenen Weise eingeteilt und legt man durch jeden Teilpunkt eine Gerade, welche die Spirale (d. h. ihre Tangente) unter gegebenem Winkel β schneidet, so sind alle diese Geraden zugleich Tangenten einer Spirale derselben Schar, und zwar bilden die Längen dieser Tangenten eine geometrische Reihe von dem Quotienten $\frac{p}{p_1}$. Für den Sonderfall der Normale der Kurve folgt daraus:

Die Normalen der logarithmischen Spirale schattieren eine gleichwinklige logarithmische Spirale aus. (Vergl. Figur 114.) Verbindet man den Be-

rührungspunkt einer solchen Normale n mit dem gemeinschaftlichen Centrum M der Spiralen, so mufs die Verbindungslinie q mit der Normale n den $\sphericalangle \alpha$ einschliefsen, denn es handelt sich um Spiralen desselben Schnittwinkels. Da aber der Radius vector p mit der gegebenen Spirale den Winkel α, mit der Normale n also den Winkel $(90^0 - \alpha)$ einschliefst, so ist das aus p, n und q gebildete Dreieck bei M rechtwinklig. Jener Berührungspunkt ist also mit Hilfe des Lotes auf p im Punkte M leicht zu bestimmen. In diesem Berührungspunkte wird die Normale n von einer unendlich benachbarten Normale geschnitten, ebenso, wie zwei Kreisradien einander im Mittelpunkte schneiden. Der Schnittpunkt, d. h. der Berührungspunkt, ist demnach Krümmungsmittelpunkt der gegebenen Spirale für den Endpunkt des Radius vectors p. Also: Errichtet man auf der logarithmischen Spirale in einem gegebenen Punkte ein Lot und ebenso im Centrum M auf dem zugehörigen Radius vector ein Lot, so schneiden sich beide Lote im zugehörigen Krümmungsmittelpunkte der Spirale.

Die aufeinander folgenden Krümmungsmittelpunkte der regelmäfsig eingeteilten logarithmischen Spirale bilden eine regelmäfsig eingeteilte Spirale, die Krümmungsradien eine geometrische Reihe vom Quotienten $\frac{p}{p_1}$.

Ganz allgemein erkennt man folgendes: Macht man an verschiedenen Stellen einer logarithmischen Spirale ähnliche Konstruktionen, so liegen homologe Punkte der neuen Gebilde auf einer logarithmischen Spirale derselben Schar, homologe Gerade schattieren eine Spirale derselben Schar aus, homologe ähnliche Kurven (z. B. Kreise) werden von einer Spirale derselben Schar umhüllt, homologe Stücke einander entsprechender Geraden oder Kurven verhalten sich wie die Radii vectores homologer Punkte, homologe Flächenstücke wie die Quadrate solcher Radii vectores, homologe Winkel endlich sind einander gleich.

§ 209) Krümmungsmittelpunkte, Krümmungsradien und Krümmungskreise der logarithmischen

Spirale. Nach obiger Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes ist der Krümmungsradius ϱ gleich der Normale n, gemessen von der gegebenen ersten Spirale bis zum Berührungspunkte mit der von den Normalen umhüllten Spirale, der sog. Evolute. Demnach ist

$$1)\qquad \varrho = \frac{p}{\sin\alpha},$$

wo p der Radius vector, α der oben bestimmte Schnittwinkel der Spirale ist. Zugleich ist

$$2)\qquad \varrho = \frac{q}{\cos\alpha},$$

wobei q der Radius vector der Evolute ist (vgl. Figur 114).

Man denke sich die erste Spirale nach obiger Methode regelmäſsig eingeteilt, so daſs auch ihre Evolute durch die Berührungspunkte der Krümmungsradien regelmäſsig eingeteilt wird. Zeichnet man in den letzteren Punkten die Tangenten der Evolute bis zur gegebenen Spirale, so erhält man als Längen der Tangenten eine Wertfolge, die einer der besprochenen geometrischen Reihen mit dem Quotienten $\frac{p}{p_1}$ entspricht. Diese Reihe kann man sich fortgesetzt denken bis zum Centrum M der Spiralen.

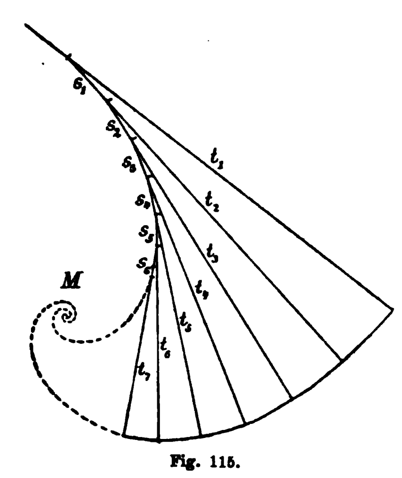


Fig. 115.

Es wird nun behauptet, jede dieser Tangenten sei ebenso lang, wie die Bogenlänge der Evolute vom Centrum bis zum Berührungspunkte.

Denkt man sich statt der zweiten Spirale das zur regelmäſsigen Einteilung gehörige Polygon, statt jeder Tangente die betreffende Sehne und ihre Verlängerung bis zur ersten Spirale, so ist die Fläche zwischen beiden Spiralen in Drei-

ecke eingeteilt, die für die Grenze (d. h. für unendlich dicht aufeinander folgende Teillinien) gleichschenklige Dreiecke sind. Für das gröfste dieser Dreiecke ist, wenn der äufsere Schenkel gleich t_1, der zweite gleich $s_1 + t_2$, d. h. gleich Sehne + Verlängerung gesetzt wird, $t_1 = s_1 + t_2$, für das folgende $t_2 = s_2 + t_3$, für das folgende $t_3 = s_3 + t_4, \ldots$ Durch Addition folgt aus diesen Gleichungen

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_\infty = (s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_\infty) \\ + (t_2 + t_3 + t_4 + \ldots + t_\infty).$$

Da es sich um abnehmende, also um summierbare geometrische Reihen handelt, ist diese Addition gestattet. Es hebt sich aber beiderseits t_2 gegen t_2, t_3 gegen t_3 u. s. w. bis zu den unendlich kleinen Gliedern t_∞ gegen t_∞. So bleibt stehen

$$t_1 = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_\infty.$$

Die äufserste Tangente ist also gleich der Summe der Sehnen bis nach M hin. Denkt man sich also t_1 als Faden, so läfst sich dieser von seinem Ausgangspunkte aus so um das Polygon herumwickeln, dafs sein freier Endpunkt genau auf M fällt. Die Fadenlänge ist gleich der Summe der Polygonseiten.

Denkt man sich den Faden wieder abgewickelt und dabei straff gespannt, so liegt sein freier Endpunkt stets auf einer Reihe aufeinander folgender kleiner Kreisbogen und passiert dabei die Eckpunkte des entsprechenden Polygons der ersten Spirale.

Für die Grenze handelt es sich um die Bewegung des Endpunktes auf dicht aufeinander folgenden Krümmungskreisen, d. h. auf der gegebenen Spirale selbst. Daraus folgt für die Grenze:

Die gegebene Spirale ist die Evolvente der zweiten Spirale. Die Länge ϱ des letzten Krümmungsradius ist gleich der Bogenlänge der zweiten Spirale vom Centrum M bis zum Berührungspunkte.

Diese Länge ist $l_1 = \frac{q}{\cos\alpha}$; beide Spiralen sind ähnlich; folglich ist die Länge der ersten Spirale von M bis zum Endpunkte des Radius vectors p

$$l = \frac{p}{\cos\alpha}.$$

(Der allgemeine Zusammenhang zwischen Evolute und Evolvente wird hier nicht vorausgesetzt. Er läfst sich am allgemeinen Polygon und dessen aus Kreisbogen bestehender Evolvente in derselben Weise klarlegen.)

§ 209) Dasselbe Ergebnis kann man folgendermafsen erhalten. Man gehe aus von der obigen Formel

$$\frac{p}{p_1} = e^{\frac{\gamma}{\tan\alpha}},$$

dann ist die Reihe der Radii vectores für die regelmäfsig eingeteilte Kurve, da $p_1 = p \cdot e^{-\frac{\gamma}{\tan\alpha}}$ ist,

$$p,\ p e^{-\frac{\gamma}{\tan\alpha}},\ p e^{-\frac{2\gamma}{\tan\alpha}},\ p e^{-\frac{3\gamma}{\tan\alpha}}, \ldots,$$

also die Reihe der aufeinander folgenden Bogen, wenn man den ersten gleich b_0 setzt,

$$b_0,\ b_0 e^{-\frac{\gamma}{\tan\alpha}},\ b_0 e^{-\frac{2\gamma}{\tan\alpha}},\ b_0 e^{-\frac{3\gamma}{\tan\alpha}}, \ldots,$$

die Summe der Bogen also (nach der Summierungsformel $1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ für $x < 1$)

$$\Sigma b = \frac{b_0}{1 - e^{-\frac{\gamma}{\tan\alpha}}}.$$

Denkt man sich die Sektoren unendlich schmal, so dafs man sie als Dreiecke betrachten darf, so ist für das gröfste der Dreiecke nach dem Sinussatze $b_0 : p_1 = \sin\gamma : \sin\alpha$, und daher wird die Summe der Bogen

$$\Sigma b = \frac{p_1 \sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{\gamma}{\tan\alpha}}}$$

$$= \frac{p_1 \sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \left[1 - \frac{\left(\frac{\gamma}{\tan\alpha}\right)}{1!} + \frac{\left(\frac{\gamma}{\tan\alpha}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{\gamma}{\tan\alpha}\right)^3}{3!} + \ldots\right]}.$$

Der Nenner formt sich um zu

$$\frac{\gamma}{\tan\alpha}\left[\frac{1}{1!}-\frac{\left(\frac{\gamma}{\tan\alpha}\right)}{2!}+\frac{\left(\frac{\gamma}{\tan\alpha}\right)^2}{3!}-\ldots\right].$$

Da aber die Summe der oscillierenden Reihe bei unendlich kleinem γ und endlichem $\tan\alpha$ zwischen $\frac{1}{1!}$ und $\left(\frac{1}{1!}-\frac{\left(\frac{\gamma}{\tan\alpha}\right)}{2!}\right)$ liegt, wobei sich für die Grenze das letztere als 1 herausstellt, so handelt es sich um $\frac{\gamma}{\tan\alpha}$, und so wird

$$\Sigma b=\frac{p_1\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot\frac{\tan\alpha}{\gamma}=\frac{p_1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\gamma}{\gamma}.$$

Für unendlich kleines γ ist aber $\sin\gamma=\gamma$, aufserdem $p_1=p$, also wird die gesuchte Länge

$$l=\Sigma b=\frac{p}{\cos\alpha},$$

was mit obigem übereinstimmt. Ebenso wird für die zweite Spirale

$$l_1=\frac{q}{\cos\alpha}.$$

§ 210) Wenn man bei der Abwickelung des Polygons der Evolute die aufeinander folgenden Kreisbogen bildet und drei aufeinander folgende der Kreise vollständig zeichnet, so schliefst der mittlere den kleineren vollständig ein, während er vom gröfsten vollständig umschlossen wird. Für die Grenze folgt daraus:

Jeder Krümmungskreis der logarithmischen Spirale schliefst jeden kleineren Krümmungskreis vollständig ein und wird von jedem gröfseren vollständig umschlossen.

Weitere Betrachtung ergiebt: Jeder Krümmungskreis berührt und schneidet zugleich die logarithmische Spirale, er trifft sie aber nie wieder, er

umschliefst daher den kleineren Teil der Kurve vollständig und schliefst den gröfseren Teil vollständig aus. Dies ergiebt sich daraus, dafs seine Krümmung konstant bleibt, während die der Spirale nach der einen Richtung hin abnimmt, nach der anderen dagegen zunimmt.

Liegen drei Krümmungsradien unendlich nahe an einander, so ergiebt sich folgendes: Der gröfste habe mit der Kurve die drei aufeinander folgenden Punkte $a\,b\,c$ gemein, der mittlere die Punkte $b\,c\,d$, der folgende die Punkte $c\,d\,e$, dann hat der gröfste mit dem mittleren die Punkte b und c gemein, beide Kreise berühren also einander; ebenso hat der mittlere mit dem kleineren die Punkte c und d gemein, also auch diese beiden berühren einander. Obwohl also die Kurve die Kreise schneidet, ist sie doch als Umhüllende der Kreise zu betrachten. Zeichnet man also eine Reihe aufeinander folgender Krümmungskreise, indem man z. B. von der zweiten Spirale ausgeht, so wird die erste Spirale ausschattiert. Dies ist nur ein besonderer Fall der oben betrachteten Ähnlichkeitsbeziehungen.

§ 211) Eine merkwürdige Beziehung zwischen den Punkten der logarithmischen Spirale und den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten ergiebt sich folgendermafsen: P und P_1 seien Punkte auf zwei beliebigen Spiralen einer Schar, ϱ und ϱ_1 die zugehörigen Krümmungsradien, p und p_1 die zugehörigen Radii vectores, q und q_1 die Lote, welche bei der Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte gebraucht werden, dann ist das rechtwinklige Dreieck aus ϱ, p und q ähnlich dem Dreiek aus ϱ_1, p_1, q_1. Verbindet man jetzt die Krümmungsmittelpunkte μ und μ_1 und ebenso P und P_1, so schneiden die beiden Verbindungslinien einander rechtwinklig.

Ist nämlich S der Schnittpunkt, so hat Dreieck μSP bei P einen Winkel $90^0-(\alpha+\delta)$, bei μ einen Winkel $(\alpha+\delta_1)$.*) Da aber die Dreiecke $M\mu_1\mu$ und MPP_1 einander ähnlich sind, so ist $\sphericalangle\ \delta=\delta_1$ (δ und δ_1 sind die Winkel bei P und μ). Folglich ist $\triangle\ \mu SP$ bei S rechtwinklig. Dabei ist $PP_1:\mu\mu_1=p:M\mu=p_1:M\mu_1$.

*) Oder umgekehrt.

Allgemeiner folgt: Legt man durch eine Schar logarithmischer Spiralen eine beliebige Gerade, so liegen die zu den Schnittpunkten gehörigen Krümmungsmittelpunkte auf einer dazu senkrechten Geraden.

Noch allgemeiner: Zeichnet man in der Ebene einer Spiralenschar eine beliebige Kurve, so liegen die zu den Schnittpunkten gehörigen Krümmungsmittelpunkte der Spiralen auf einer ähnlichen Kurve. Das Dimensionsverhältnis ist dabei durch das der Katheten des rechtwinkligen Dreiecks gegeben, mit dessen Hilfe irgend einer der Krümmungsmittelpunkte konstruiert wird. Beide Gebilde sind um 90^0 gegen einander gedreht. Ist z. B. das eine Gebilde ein Kreis, so ist auch das andere ein solcher.

§ 212) Eine andere Folgerung ergiebt sich aus der Ähnlichkeitsbeziehung der obigen rechtwinkligen Dreiecke folgendermafsen: Der Punkt μ_a sei Krümmungsmittelpunkt für einen Punkt A einer Spirale der Schar; μ_b sei Krümmungsmittelpunkt für einen Punkt B einer anderen Spirale der Schar. Von dem Krümmungskreise μ_b werde angenommen, er ginge durch A, dann läfst sich zeigen, dafs $\mu_a A = \mu_a B$ ist, dafs also B auf dem Krümmungskreise μ_a liegt. Die rechtwinkligen Dreiecke $AM\mu_a$ und $BM\mu_a$ sind nämlich gleichsinnig ähnlich, folglich ist $AB \perp \mu_a\mu_b$, folglich ist die Sehne AB des Kreisbogens des Krümmungskreises μ_b durch $\overline{\mu_a\mu_q}$ halbiert, folglich ist $\mu_a = \mu_b$.

Folglich: Die Berührungspunkte sämmtlicher durch einen Punkt A gehender Krümmungskreise einer Schar logarithmischer Spiralen liegen auf dem zu A gehörigen Krümmungskreise der durch diesen Punkt gehenden Spirale.

Sucht man also für eine beliebige Spirale der Schar den durch einen gegebenen Punkt A gehenden Krümmungskreis, so konstruiere man den Krümmungsmittelpunkt der durch A gehenden Spirale für diesen Punkt (wozu nicht die Spirale selbst, sondern nur ihr Schnittwinkel A nötig ist). Wo dieser Krümmungskreis die gegebene Spirale schneidet, liegt der Berührungspunkt des nun leicht zu konstruierenden

Krümmungskreises, der durch A geht. Macht man A zum Centrum der Inversion, so wird der Kreis μ_a unendlich grofs, d. h. eine Gerade. Auf dieser liegen die Berührungspunkte der unendlich grofsen Krümmungskreise der transformierten Schar, d. h. die Wendepunkte der Schar logarithmischer Doppelspiralen.

(Dabei ist der Satz vorausgesetzt, dafs durch jeden Punkt der Ebene ein und nur ein Krümmungskreis jeder einzelnen Spirale geht.)

§ 213) Einige Berechnungen an der Spirale. Auch die Flächensumme der Sektoren einer logarithmischen Spirale läfst sich ähnlich, wie oben die Bogenlänge, berechnen. Ist die Einteilung der Spirale die obige regelmäfsige, und ist der gröfste Sektor von der Fläche S_0, so giebt die Reihe der ähnlichen Sektoren folgende Flächen

$$S_0,\; S_0 e^{-\frac{2\gamma}{\tan\alpha}},\; S_0 e^{-\frac{4\gamma}{\tan\alpha}},\; S_0 e^{-\frac{6\gamma}{\tan\alpha}},\ldots,$$

die Flächensumme wird also

$$\sum S = S_0\left[1 + e^{-\frac{2\gamma}{\tan\alpha}} + e^{-\frac{4\gamma}{\tan\alpha}} + e^{-\frac{6\gamma}{\tan\alpha}} + \ldots\right] = S_0 \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\gamma}{\tan\alpha}}},$$

oder da für sehr kleines γ der erste Sektor als Dreieck betrachtet werden kann,

$$\sum S = \frac{1}{2} p p_1 \sin\gamma \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\gamma}{\tan\alpha}}}$$

$$= \frac{1}{2} p p_1 \sin\alpha \frac{1}{1 - \left[1 - \frac{e^{\frac{2\gamma}{\tan\alpha}}}{1!} + \frac{e^{\frac{4\gamma}{\tan\alpha}}}{2!} - \frac{e^{\frac{6\gamma}{\tan\alpha}}}{3!} + \ldots\right]}.$$

Der letzte Faktor läfst sich, ähnlich wie oben der entsprechende, für die Grenze umformen zu $\frac{2\gamma}{\tan\alpha}$, so dafs wird

$$\sum S = \frac{1}{2} p p_1 \sin\gamma \frac{\tan\alpha}{2\gamma}.$$

Für die Grenze ist wieder $\frac{\sin\gamma}{\gamma} = 1$ und $p = p_1$, also wird die Gesammtfläche

1) $$F = \sum S = \frac{p^2 \tan\alpha}{4}.$$

So wird der Flächeninhalt der Spirale in der Regel angegeben. Dabei legen sich aber unendlich viele Sektoren aufeinander, und es erscheint wünschenswert, nur die einfache Ringfläche zwischen den benachbarten Bogen der Kurven zu berechnen.

Die mehrfache Bedeckung fällt schon weg, wenn man die Fläche zwischen zwei benachbarten Spiralen der Schar berechnet. Setzt man in Fig. 116 $MP = p$, $MQ = q$, so ist die gesuchte Fläche des Spiralstreifens

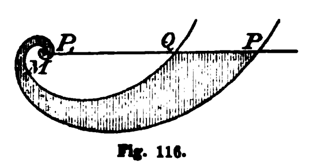


Fig. 116.

2) $$F = \frac{p^2}{4}\tan\alpha - \frac{q^2}{4}\tan\alpha = \frac{1}{4}\tan\alpha\,(p^2 - q^2).$$

Statt $MQ = q$ führe man jetzt ein $MP_1 = p_1$, was sich, da es sich für den Radius vector p um eine ganze Umdrehung -2π handelte, aus $\frac{p}{p_1} = e^{\frac{\gamma}{\tan\alpha}} = e^{\frac{2\pi}{\tan\alpha}}$ als $p_1 = pe^{-\frac{2\pi}{\tan\alpha}}$ berechnet. Demnach ist die Fläche der Spirale, insofern sie die Ebene einfach bedeckt,

3) $$F = \frac{1}{4}\tan\alpha\,(p^2 - p_1^2) = \frac{p^2}{4}\tan\alpha\,(1 - e^{-\frac{4\pi}{\tan\alpha}}).$$

§ 214) Aufgabe. Welchen Schnittwinkel mufs die logarithmische Spirale haben, wenn ihre Normale, ohne dafs sie die Kurve vorher schneidet, die Kurve berühren soll. (Problem der Selbstevolute.)

Auflösung: Ist in Figur 117 P_1 der Berührungs- und zugleich der Krümmungsmittelpunkt, so ist zunächst im rechtwinkligen Dreieck PMP_1

1) $$\frac{p}{p_1} = \tan\alpha,$$

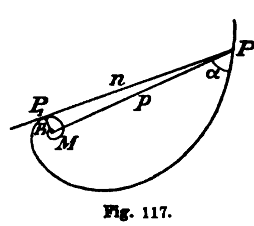


Fig. 117.

zugleich aber, da p, um in die Lage p_1 zu gelangen, die Drehung $-\frac{3\pi}{2}$ machen mufs, nach der Gleichung

$$\frac{p}{p_1} = e^{\frac{\gamma}{\tan\alpha}}$$

2) $$\frac{p}{p_1} = e^{\frac{3\pi}{2\tan\alpha}}.$$

Aus 1) und 2) folgt

$$e^{\frac{3\pi}{2\tan\alpha}} = \tan\alpha$$

oder $$\frac{3\pi}{2\tan\alpha} = {}^{e}lg\tan\alpha, \text{ oder } \tan\alpha \,.\, {}^{e}lg\tan\alpha = \frac{3\pi}{2}.$$

Setzt man $\tan\alpha = x$, so hat man $x\,{}^{e}lg x = \frac{3\pi}{2}$, oder ${}^{e}lg x^x = \frac{3\pi}{2}$, oder auch

3) $$x^x = e^{\frac{3\pi}{2}}$$

so dafs es sich um einen Sonderfall der vielbehandelten Gleichung $x^x = a$ handelt.

(Die Lösung erfolgt z. B. mittels gemeiner Logarithmen so, dafs man $x\,{}^{10}lg x = \frac{3\pi}{2}\,{}^{10}lg e = 2{,}046565$ und $x^x = 111{,}3179$ bildet und sich die Kurve $y = x lg x$ für $x = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ konstruiert denkt, wobei sich ergiebt, dafs x zwischen 3 und 4 liegt ($3^3 = 27$, $4^4 = 256$). Die Probe mit $x = 3{,}6$ und $x = 3{,}7$ erfolgt nach dem Augenschein und ergiebt, dafs das erstere für $x lg x$ den zu kleinen Wert $2{,}00268$, das letztere den zu grofsen $2{,}10234$ giebt. Man verbindet die

gefundenen Annäherungspunkte durch eine Gerade und untersucht, für welches $x + \xi$ die Ordinate die richtige Höhe giebt. Aus den betreffenden ähnlichen Dreiecken folgt $\xi : 0,1 : 0,04388 : 0,09966$, also $x + \xi = 3,644$ als Näherungswert. Die Probe mit ihm giebt zu kleines, die mit $3,645$ zu grofses. Die Verbindungsgerade der neuen Punkte giebt auf demselben Wege den Näherungswert $3,64416$, die Fortsetzung des Verfahrens führt schliefslich auf $x = \tan \alpha = 3,644174$ und auf $\alpha = 74^0\, 39'\, 18'', 29.$)

Bemerkungen. Die Aufgabe kann dahin verallgemeinert werden, dafs man die Fälle untersucht, wo die Normale vor dem Berühren die Kurve *1*, oder *2*, *3*, *4* ... mal schneidet. Solcher Fälle giebt es unendlich viele. Für jeden ist die betreffende Spirale Selbstevolute.

Beiläufig sei bemerkt, dafs jeder Punkt P zu je zwei solchen Aufgaben führt, denn in Figur 117 kann man von P aus nach innen zwei Tangenten an die Spirale legen, die sie vorher nicht schneiden. Dies hängt mit Aufgaben zusammen, bei denen „ein Winkel auf der Spirale reitet". Reitet ein Winkel auf der logarithmischen Spirale, so beschreibt seine Spitze stets eine Spirale derselben Schar. Diese kann die erste Spirale selbst sein. Der auf der Seite der wachsenden p liegende Schenkel des Winkels ist dabei stets der längere.

§ 215) Durch Inversion vom M aus verwandelt sich jede logarithmische Spirale in eine symmetrische logarithmische Spirale. Der nach dem Schnittpunkte mit dem Inversionskreise gehende Radius vector ist dabei Symmetrieachse. Die Schar der Krümmungskreise geht dabei über in die Schar der neuen Krümmungskreise. Die der Normalen verwandelt sich in Kreise durch das Centrum M, welche die neue Spirale rechtwinklig schneiden und eine Spirale der neuen Schar ausschattieren.

Jede Schar von Geraden, welche die Spirale unter irgend einem konstanten Winkel schneidet, geht ebenfalls in Kreise durch M über, welche die neue Spirale unter demselben Winkel schneiden und eine Spirale der neuen Schar ausschattieren.

Die gesamte Schar logarithmischer Spiralen geht in eine symmetrische Schar über. Dasselbe gilt von der Ortho-

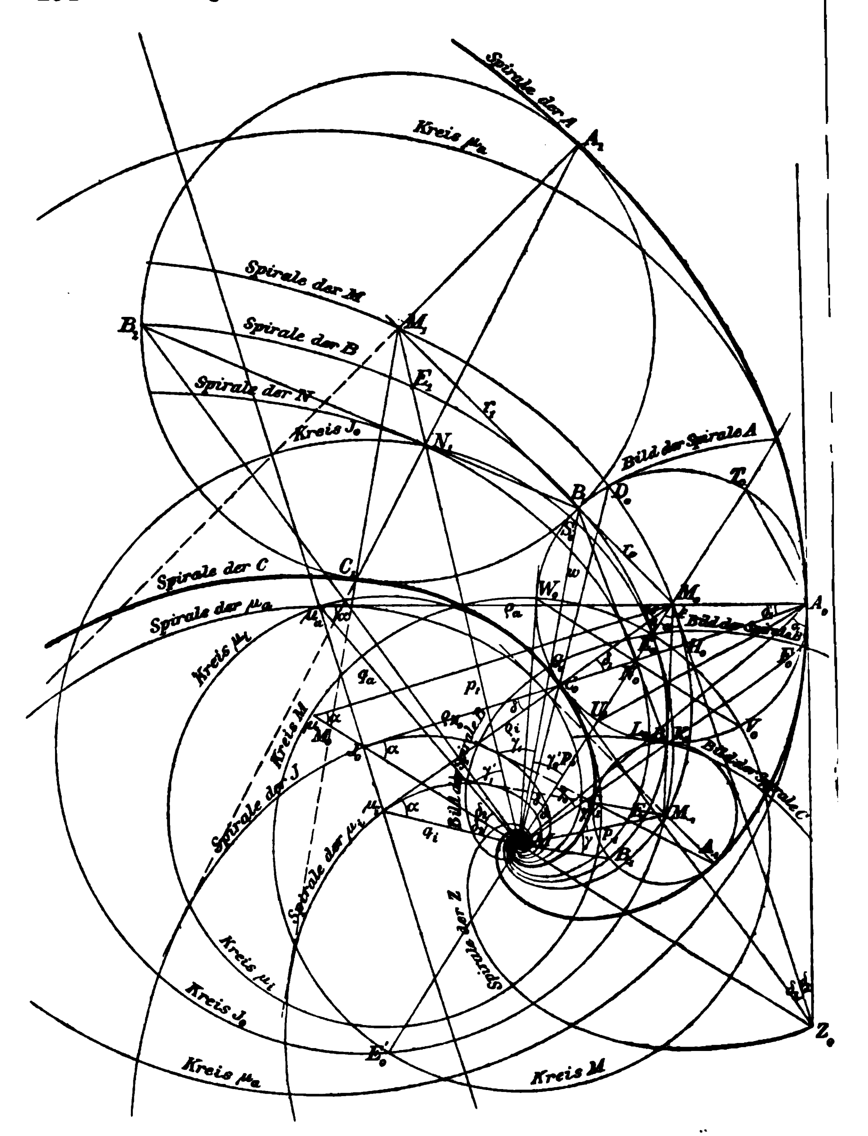

Spirale der A
Kreis μ_a
Spirale der M
Spirale der B
Spirale der N
Kreis J_0
Bild der Spirale A
Spirale der C
Spirale der μ_a
Kreis μ_i
Kreis M
Spirale der J
Spirale der μ_i
Spirale der Z
Bild der Spirale C
Kreis μ_i
Kreis J_0
Kreis μ_a
Kreis M

Fig. 118.

gonalschar. Jeder beliebige Radius des Inversionskreises kann dabei als Symmetrieachse für die beiden Gebilde dienen. Jede quadratische Einteilung der Ebene durch (symmetrische bezw. unsymmetrische) Spiralenscharen geht durch die Inversion wieder in eine solche über.

Durch Inversion von einem beliebigen Punkte der Ebene aus erhält man zwei Scharen von Bicirkularspiralen (logarithmische Doppelspiralen), welche die Ebene ebenfalls quadratisch einteilen. Dabei bleiben die Krümmungskreise mit gewissen Eigenschaften als solche erhalten, worüber unten besonders gesprochen werden soll.

§ 216) Der Flächenstreif zwischen zwei Spiralen derselben Schar ist für die zu besprechenden Spiralröhrenflächen von besonderer Bedeutung. Aus den besprochenen Ähnlichkeitsbeziehungen folgt, dafs, wenn die Spirale der M_n (Figur 118) die Mittelpunkte einer Kreisreihe enthält, deren Radien zu den Radii vectores der M_n stets in demselben Verhältnis stehen, die Umhüllenden der Kreise stets Spiralen derselben Schar sind, die als Grenzspiralen des Streifens bezeichnet werden sollen. Jede Spirale der Schar, die in dem Streifen liegt, durchschneidet sämtliche der Kreise beim Eintritt unter konstantem Winkel, ebenso beim Austritt. (Figur 118.) Berühren sich die in den Streifen einbeschriebenen Kreise paarweise, so liegen auch die Berührungspunkte B_n auf einer Spirale der Schar. Dazu werde angenommen, dafs die Kreise den Punkt M, das Centrum der Spiralen, ausschliefsen. (Der andere Fall kommt besonders zur Sprache.)

Der schon vorbemerkte Satz, dafs die Spirale der Berührungspunkte B_n gegen die Grenzspiralen um denselben Winkel gedreht sei, also den Streifen isothermisch halbiere, ergiebt sich an Figur 119 durch folgende Überlegung. Man lege von M aus an den Berührungskreis M_0 die Tangente MW_0 und benutze den mit MW_0 um M gelegten Kreis als Inversionskreis, so dafs der Berührungskreis M_0 bei der Inversion in sich selbst übergeht. Der Spiralstreif geht dabei in einen symmetrischen über, der denselben Kreis M_0 berührt, und zwar ist MM_0 Symmetrieachse. Die Figur giebt die

Symmetriebilder besonders an. Die äufsere Grenzspirale übernimmt in dem neuen Gebilde die Rolle der inneren, die innere die der äufseren. Die Schar der gröfseren Berührungskreise verwandelt sich in die der kleineren, die der kleineren in die der gröfseren. Die Spirale der Berührungspunkte geht über in die der Berührungspunkte des neuen Gebildes. Der in Bezug auf diese Spirale als äufserer zu betrachtende Teil des Streifens geht über in den inneren. In der Figur sind die neuen Spiralen angedeutet. Sie schneiden die ihnen entsprechenden auf der Symmetrielinie MM_0. Da das neue Gebilde dem ursprünglichen kongruent ist, so mufste der äufsere Teil des Streifens von Anfang an dem inneren kongruent gewesen sein, d. h. der äufsere Teil liefs sich durch blofse Drehung mit dem inneren zur Deckung bringen.

Die Spirale der B war also von vornherein so gelegen, dafs ihre Drehung bis in die Lage der äufseren Grenzspirale genau dieselbe Gröfse hat, wie die Drehung bis in die Lage der inneren.

Da die Spirale der B bei der Inversion ihren Schnittpunkt E mit der Symmetrieachse nicht geändert hat (sie ist die einzige bei der dies der Fall ist), denn ihr Bogen $\widehat{MM_0}$ hat dieselbe Gröfse, wie das Bild des Bogens $M_0\infty$, so mufs E auf dem Inversionskreise liegen. Beiläufig sei bemerkt, dafs die Berührungsspirale (der B) die Kreisschar (im allgemeinen) nicht rechtwinklig schneidet (dafs die Radien M_0B_0 und M_0B_1 nicht Tangenten sein können, geht schon aus der Gleichheit beider hervor.)

Bei der Inversion geht C_0 in D_0, A_0 in L_0 über, aus Symmetriegründen gehen also A_0C_0 und L_0D_0 durch denselben Punkt N_0 der Symmetrielinie MM_0, und die Bogen U_0C_0 und U_0L_0 des Berührungskreises sind gleich grofs. Demnach ist $\sphericalangle C_0A_0L_0$ durch U_0A_0 halbiert, und da $\sphericalangle U_0A_0T_0 = 90^0$ ist, gehen von A_0 nach M, U_0, N_0, T_0 harmonische Strahlen aus. Daher sind M, U_0, N_0, T_0 harmonische Punkte, und die Polare V_0W_0 von M geht ebenfalls durch N_0. Zugleich ist deshalb N_0 das Inversionsbild von M_0.

Im $\triangle M_0M_1M$ ist, wie aus der geometrischen Reihe der Radien r und der Vectoren p hervorgeht, $p_0:p_1=r_0:r_1$,

folglich ist MB_1 Winkelhalbierende. Dasselbe gilt von dem diesem ähnlichen Dreiecke $M_0 M_{-1} M$ u. s. w., folglich sind die Winkel $\gamma_0, \gamma_0', \gamma_1, \gamma_1' \dots$ bei M einander gleich. Die Berührungsspirale wird also durch die Punkte $\dots B_{-1}, E_{-1}, B_0, E_0, B_1, E_1, B_2 \dots$ in ähnliche Bogen eingeteilt.

Dreieck MA_0M_0 enthält bei M, A_0, M_0 die Winkel δ, $90^\circ - \alpha$, $\varepsilon = 180^\circ - \delta - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ - \delta + \alpha$; Dreieck MC_0M_0 hat ebenso die Winkel δ, $90^\circ + \alpha$, $\varepsilon_1 = 180^\circ - \delta - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \delta - \alpha$. Deshalb ist bei M_0 die Winkelsumme $\varepsilon + \varepsilon_1 = 180^\circ - 2\delta$. Zugleich ist $\sphericalangle A_0M_0C_0 = 180^\circ - 2\delta_1$, folglich sind die Winkel δ_1 und die Winkel δ von derselben Gröfse. Daher bilden die Tangenten in A_0 und C_0, bis zum Schnitte Z_0 verlängert, ein gleichschenkliges Dreieck $A_0C_0Z_0$ mit dem Winkel 2δ an der Spitze. Die Verlängerung des Lotes M_0H_0 auf A_0C_0 geht durch denselben Punkt Z_0 und halbiert den Winkel 2δ bei Z_0, so dafs auch die Winkel δ_2 den Winkeln δ gleich sind.

§ 217) Das rechtwinklige Dreieck $A_0M\mu_a$ giebt den Krümmungsmittelpunkt μ_a für die Stelle A_0 der äufseren Grenzspirale, ebenso giebt $\triangle C_0M\mu_i$ den Krümmungsmittelpunkt μ_i der inneren Grenzspirale für die Stelle C_0. Verbindet man die Punkte A_0 und C_0, wo der Kreis M_0 die beiden Krümmungskreise μ_a und μ_i berührt, mit einander, so geht A_0C_0 durch den inneren Ähnlichkeitspunkt J der beiden Krümmungskreise. Dabei ist $A_0J_0 \perp \mu_a\mu_i$. Nach den Eigenschaften des Ähnlichkeitspunktes, ebenso auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke $A_0\mu_aJ_0$ und $C_0\mu_iJ_0$ (aus δ_1 und 90°) ist $\mu_aJ_0 : \mu_iJ_0 = \varrho_a : \varrho_i = q_a : q_i$, folglich ist $\sphericalangle \mu_aM\mu_i$ durch MJ_0 halbiert. Da aber die rechten Winkel $A_0M\mu_a$ und $C_0M\mu_i$ um 2δ gegeneinander gedreht sind, so ist auch $\sphericalangle \mu_aM\mu_i = 2\delta$ und die Winkel δ_3 bei M stimmen mit den Winkeln δ überein. Dies ergiebt sich auch aus anderen Winkelbetrachtungen. Folglich ist $\sphericalangle N_0MJ_0$ gleich 90°.

Daraus folgt erstens, dafs J_0 Krümmungsmittelpunkt der durch N_0 gehenden Spirale der Schar ist, die demnach die Gerade J_0N_0 orthogonal schneidet, zweitens, dafs die von M aus nach $A_0N_0C_0J_0$ gezogenen Strahlen harmonische, die genannten

Punkte ebenfalls harmonische sind. Durch N_0 geht also auch die Polare K_0S_0 des Punktes J_0 in Bezug auf den Kreis M_0, d. h. die Berührungssehne des um J_0 gelegten Orthogonalkreises.

Da dieser Orthogonalkreis bei der oben besprochenen Inversion in einen gleich grofsen und gegen MM_0 symmetrisch liegenden übergeht, so geht auch dieser Kreis durch E_0. Der neue Orthogonalkreis, als Inversionskreis betrachtet, verwandelt den Krümmungskreis μ_a in den Krümmungskreis μ_i, alle drei gehören also einer Schar an, und zwar ist der Ringstreifen zwischen den Kreisen μ_a und μ_i durch jenen isothermisch halbiert. Der Inversionskreis um J_0 verwandelt den Kreis M_0 ebenfalls in sich selbst, woraus sich weitere Beziehungen ergeben.

Die Krümmungsmittelpunkte der Spiralschar längs der Geraden A_0J_0 liegen sämtlich auf der Geraden $\mu_a\mu_i$, welche daher durch die Spirale der J rechtwinklig geschnitten wird. Die Orthogonalkreise um M und J_0 schneiden sich nicht nur im Punkte E_0 sondern auch im Punkte E_0' der Geraden MM_0.

Beiläufig ergiebt sich bei diesen Betrachtungen, dafs $M_0\mu_a = M_0\mu_i$ ist.

Bei der erstgenannten Inversion mittels des Kreises um M ging B_1 in G_0, B_0 in F_0 über, aus Symmetriegründen ist also Bogen $U_0G_0 = U_0B_0$. Die von B_1 nach M, U_0, B_0, T_0 gehenden Strahlen müssen also (ebenso, wie die von A_0 ausgehenden) harmonische sein, d. h. die Gerade B_1B_0 mufs durch N_0 gehen. Dafs diese Gerade auch durch den äufseren Ähnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_{-1} geht, sei beiläufig bemerkt.

Die Punkte N_0 und E_0 sind also von besonderer Bedeutung und werden später mehrfach zur Sprache kommen. Durch N_0 gehen die Geraden MM_0, V_0W_0, K_0S_0, B_0B_1, L_0D_0, A_0C_0, die A_0C_0 rechtwinklig schneidende Spirale und ihr Krümmungskreis; durch E_0 gehen die Gerade MM_0, der Orthogonalkreis um M, der Orthogonalkreis um J_0 und die Spirale der B. Dazu treten noch gewisse Spiegelbilder (Inversionsbilder).

§ 218) **Die Tangenten der Spiralenschar längs eines Radius vector sind parallel.** Dies gilt z. B. von MM_0. Da nun die Spiraltangente in N_0 senkrecht zu A_0C_0 ist, so ist auch die Spiraltangente in M_0 senkrecht zu A_0C_0, und da sie durch Z_0 geht und $\sphericalangle ZM_0M = \alpha$ ist, so mufs JM, das Lot auf MM_0 durch Z_0 gehen. Dabei wird nämlich $M_0Z_0 = l$, d. h. gleich dem Spiralbogen von M bis M_0.

($M_0 A_0 Z_0 M$ ist ein Sehnenviereck. Setzt man $\sphericalangle M_0 A_0 M = \varkappa$, so folgt

$$\sin\delta = \sin\varkappa \frac{r_0}{p_0} = \cos\alpha \frac{r_0}{p_0}, \text{ also } M_0 Z_0 = \frac{r_0}{\sin\delta}$$

$$= \frac{r_0}{\cos\alpha} \cdot \frac{p_0}{r_0} = \frac{p_0}{\cos\alpha} = l.)$$

Gleichzeitig ergiebt sich folgender bemerkenswerte Satz: **Legt man um einen beliebigen Punkt M_0 der Ebene einer Spiralschar eine Schar konzentrischer Kreise, so berührt jeder von diesen zwei Spiralen der Schar, die Tangenten in den Berührungspunkten aber bilden ein Strahlenbüschel durch einen Punkt Z, der auf der Evolvente der durch M_0 gehenden Spirale liegt.** Die Berührungspunkte liegen auf dem Kreise mit dem Durchmesser M_0Z_0.

Der Leser lege sich selbst zurück, was geschieht, wenn Tangenten an die Kreise nicht möglich sind. Ebenso bilde er den **Umkehrungssatz**, der sich über ein Strahlenbüschel durch einen Punkt Z aussagen läfst. Damit läfst sich auf die Steinerschen Untersuchungen über das Schneiden unter konstantem Winkel ein neues Licht werfen.

§ 219) **Die Radien der Berührungskreise des Spiralstreifs bilden eine geometrische Reihe.** Am Dreieck $M_0 M_1 M$ erkennt man, dafs der Quotient dieser Reihe mit dem Winkel γ zusammenhängen mufs. Sind p_0, r_0 und α gegeben, so läfst sich der Winkel γ nur auf transscendentem Wege bestimmen, ebenso der Quotient x der geometrischen Reihe.

Man setze im Dreieck $M_0 M_1 M$ die Geraden $MM_0 = p_0$, $MM_1 = p_1 = xp_0$, $M_0B_1 = r_0$, $M_1B_1 = r_1$, was gleich xr_0 wird, da MB_1 oder w die Winkelhalbierende ist. Nach bekanntem Satze ist die Winkelhalbierende aus den Dreiecksseiten mittels der Formel

$$w^2 = bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]^{*)} = p_0 \cdot p_1\left[1 - \left(\frac{r_0 + r_1}{p_0 + p_1}\right)^2\right]$$
$$= p_0 \cdot p_0 x\left[1 - \left(\frac{r_0 + r_0 x}{p_0 + p_0 x}\right)^2\right] = p_0^2 x\left[1 - \left(\frac{r_0(1+x)}{p_0(1+x)}\right)^2\right]$$

zu berechnen, was sich vereinfacht zu

1) $$w^2 = x(p_0^2 - r_0^2).$$

Ferner ist nach derselben Formelgruppe, wenn man γ als Unbekannte mit ξ bezeichnet,

$$\cos\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{bc}},$$
$$w = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)(-a+b+c)},$$

also

$$\frac{w}{\cos\xi} = \frac{2bc}{b+c}$$

und daher

2) $$w = \frac{2p_0p_1}{p_0+p_1}\cos\xi = \frac{2p_0 \cdot xp_0}{p_0 + xp_0}\cos\xi = \frac{2p_0 x}{1+x}\cos\xi.$$

Aus 1) und 2) folgt

$$\frac{4p_0^2x^2}{(1+x)^2}\cos^2\xi = x(p_0^2 - r_0^2)$$

oder

3) $$4p_0^2 x \cos^2\xi = (1+x)^2(p_0^2 - r_0^2).$$

Hier ist aber $x = \frac{p_1}{p_0} = e^{\frac{2\xi}{\tan\alpha}}$, also $\xi = \frac{1}{2}\tan\alpha \, {}^e lg x$.

---

*) Vergl. z. B. Method. Lehrbuch der El. Math. des Verfassers, II. Seite 20 und 21.

Durch Einsetzung dieses Wertes in 3) erhält man

$$4p_0^2\, x \cos^2\left(\frac{1}{2}\tan\alpha\, {}^e lg\, x\right) = (1+x)^2\,(p_0^2 - r_0^2)$$

oder

$$4)\qquad 2p_0 \cos\left(\frac{1}{2}\tan\alpha\, {}^e lg\, x\right) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}\sqrt{p_0^2 - r_0^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)\sqrt{p_0^2 - r_0^2}.$$

Aus dieser Gleichung, die neben x nur die gegebenen Stücke p_0, r_0 und α enthält, ist für numerisch gegebene Werte x nach den üblichen Annäherungsmethoden zu bestimmen. Eine allgemeine Lösung ist nicht durchführbar.

Ist x bestimmt, so ist auch $\xi = \frac{1}{2}\tan\alpha\, {}^e lg\, x$, d. h. der Winkel γ leicht zu berechnen.

Man wähle ein Beispiel mit $\alpha = 45^0$, also $\tan\alpha = 1$.

Will man direkt auf $\xi = \gamma$ gelangen, so kann man statt 4) schreiben

$$4^*)\qquad 2p_0 \cos\xi = \left(e^{\frac{\xi}{\tan\alpha}} + e^{-\frac{\xi}{\tan\alpha}}\right)\sqrt{p_0^2 - r_0^2}.$$

Damit ist der Quotient der Reihe der Radien $\ldots, \varrho_{-1}, \varrho_0, \varrho_1, \ldots$ als erledigt zu betrachten.

(Auch in das gleichschenklige Dreieck $A_0 C_0 Z_0$ kann man Berührungskreise, die sich an den Kreis M_0 anschliefsen, einzeichnen. Ihre Reihe hat aber einen anderen Quotienten, es ist nämlich

$$\frac{r_0'}{r_{-1}'} = \frac{l + r_0}{l - r_0} = \frac{\dfrac{p_0}{\cos\alpha} + r_0}{\dfrac{p_0}{\cos\alpha} - r_0} = \frac{p_0 + r_0\cos\alpha}{p_0 - r_0\cos\alpha}.$$

Wickelt man die Länge $M_0 Z_0 = l = \frac{p_0}{\cos\alpha}$ auf den Spiralbogen $M_0 M$ auf, so geht daraus hervor, dafs die einzelnen Bogen wie $M_0 M_1$ ebenso lang sind, wie die entsprechenden auf der Geraden $M_0 Z_0$ liegenden, dafs aber aus

diesem Grunde die gerade Linie $M_0 M_1 = r_0 + r_1$ hier kleiner ist, als dort $M_0' M_1' = r_0 + r_1'$.

Die Abnahme der Kreisradien ist also bei der Spirale eine stärkere, als beim Dreiecke.)

Selbstverständlich kann man zur obigen Berechnung auch das Dreieck MBB_1 benutzen. Um die Sätze über die Winkelhalbierenden zu vermeiden, schlage man folgenden Weg ein. Man hat zunächst die Gleichungen

$$MB_0 = e^{-\frac{\gamma}{\tan\alpha}} . ME = e^{-\frac{\xi}{\tan\alpha}} . \sqrt{p_0^2 - r_0^2},$$

$$MB_1 = e^{\frac{\gamma}{\tan\alpha}} . ME = e^{\frac{\xi}{\tan\alpha}} . \sqrt{p_0^2 - r_0^2}.$$

Aufserdem ist im Kreisviereck $MB_0 M_0 B_1$ nach dem Ptolemäischen Satze

$$MM_0 . B_0 B_1 = MB_0 r_0 + MB_1 . r_0$$

oder

$$p_0 . B_0 B_1 = r_0 (MB_0 + MB_1).$$

Ferner folgt aus dem Dreieck $M_0 B_0 B_1$, dafs $B_0 B_1 = 2 r_0 \cos\gamma$ ist. Demnach wird

$$MB_0 + MB_1 = \frac{p_0}{r_0} 2 r_0 \cos\gamma = 2 p_0 \cos\xi.$$

Es ist aber auch nach obigem

$$MB_0 + MB_1 = \left(e^{\frac{\xi}{\tan\alpha}} + e^{-\frac{\xi}{\tan\alpha}}\right) \sqrt{p_0^2 - r_0^2},$$

und daher ist $\xi = \gamma$ zu bestimmen aus der Gleichung

$$2 p_0 \cos\xi = \left(e^{\frac{\xi}{\tan\alpha}} + e^{-\frac{\xi}{\tan\alpha}}\right) \sqrt{p_0^2 - r_0^2},$$

die mit der oben gefundenen übereinstimmt und ihre Richtigkeit bestätigt.

§ 220) **Konstruktion der mafsgebenden Figur.** Will man die Figur 118 aus den gegebenen Stücken p_0, r_0, α konstruieren, so zeichne man zunächst $MM_0 = p_0$ und den Kreis M_0 mit Radius r_0. An MM_0 lege man in M_0 nach der einen Seite den $\sphericalangle \alpha$ an und errichte auf $M_0 M$ in M

ein Lot, welches mit dem freien Schenkel von α den Schnitt Z_0 und damit die Länge $M_0 Z_0$ der Mittelpunktsspirale giebt. Die von Z_0 aus an den Kreis gelegten Tangenten geben die Berührungspunkte A_0 und C_0 der Grenzspiralen. Mit Hilfe der rechtwinkligen Dreiecke $A_0 M \mu_a$ und $C_0 M \mu_i$ findet man die genannten Krümmungsmittelpunkte, die auf $A_0 M_0$ und $M_0 C_0$ liegen. $A_0 C_0$ giebt das Lot $A_0 J_0$ auf $\mu_a \mu_i$. Die Kreistangente $M W_0$ giebt einen um M zu legenden Orthogonalkreis $\widehat{W_0 V_0}$, der auf $M M_0$ den Punkt E_0 bestimmt, während der Schnitt der Geraden $A_0 C_0$ und $M M_0$ schon vorher den Punkt N_0 gegeben hat, durch den die Gerade $W_0 V_0$ geht.

Für eine bloſse Veranschaulichungszeichnung reicht es hin z. B. den Krümmungskreis μ_a durch A_0 zu legen, der nach auſsen hin so lange auf der zu zeichnenden Spirale bleibt, daſs man z. B. einen Spiral-Sektor von etwa 5^0 (von $M A_0$ nach einem so weit gehenden $M A_0'$ hin zu messen) als Grundlage für die Spiralkonstruktion benutzen kann. Statt dessen kann man irgend ein p_1 mit Hilfe von $\frac{p_1}{p_0} = e^{\frac{\gamma}{\tan \alpha}}$ für ein beliebiges γ logarithmisch berechnen und dann mit möglichster Genauigkeit für die Konstruktion der Spirale benutzen. Diese schneidet man, da alle Spiralen der Schar kongruent sind, zweckmäſsig als Schablone aus und befestigt sie mit einer Heftzwecke bei M so, daſs sie um diesen Punkt drehbar ist. Dann lassen sich alle Spiralen leicht in die Figur eintragen. Durch E_0 z. B. legt man die Spirale der B, durch M die Spirale der Mittelpunkte M_n. Die erstere giebt B_0 und B_1. Die Geraden $M_0 B_1$ und $M_0 B_0$ geben auf der Mittelpunktsspirale die benachbarten Mittelpunkte M_1 und M_{-1}. So hat man fortzufahren. Die angegebenen Sätze geben für die Genauigkeit der Zeichnung die beste Kontrolle.

Daſs die Konstruktionen zum Teil nur Annäherungskonstruktionen sind, liegt in dem transscendenten Charakter der Spiralen.

§ 221) Die Berechnungen erfolgen in ähnlicher Weise. Einige Resultate seien angegeben bezw. zusammengestellt.

1) $\triangle\, MM_0A_0$ giebt den spitzen Winkel δ mittels des Sinussatzes, so dafs $\sin\delta = \frac{r_0}{p_0}\cos\alpha$ ist. Daraus folgt $\sphericalangle\, \varepsilon = 180 - [\delta + (90^\circ - \alpha)] = 90^\circ - \delta + \alpha$; $\triangle\, MM_0C_0$ giebt dasselbe δ und $\sphericalangle\, \varepsilon_1 = 90^\circ - \delta - \alpha$. Aus beiden Dreiecken folgen $p_{A_0} = p_0\frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta}$, $p_{C_0} = p_0\frac{\sin\varepsilon_1}{\sin\delta}$.

2) Aus $\triangle\, A_0M_0C_0$ folgt $A_0C_0 = 2r_0\cos\delta$.

3) Aus $\triangle\, A_0M\mu_a$ und $C_0M\mu_i$ folgt $\varrho_a = \frac{p_{A_0}}{\sin\alpha}$ bezw. $\varrho_i = \frac{p_{C_0}}{\sin\alpha}$. Aus $M_0\mu_a = M_0\mu_i$ ergiebt sich $\varrho_a - r_0 = \varrho_i + r_0$ oder $2r_0 = \varrho_a - \varrho_i$.

4) $\triangle\, A_0J_0\mu_a$ und $\triangle\, C_0J_0\mu_i$ geben $\mu_aJ_0 = \varrho_a\sin\delta$, $\mu_iJ_0 = \varrho_i\sin\delta$, $\overline{\mu_a\mu_i} = (\varrho_a + \varrho_i)\sin\delta$.

5) Es bestehen die Proportionen

$$\varrho_a : \varrho_i = p_{A_0} : p_{C_0} = \sin\varepsilon : \sin\varepsilon_1 = A_0J_0 : C_0J_0 = A_0N_0 : N_0C_0$$

u. s. w.

Demnach ist

$$A_0N_0 = \frac{A_0C_0}{\varrho_a + \varrho_i}\cdot\varrho_a = \frac{\varrho_a - \varrho_i}{\varrho_a + \varrho_i}\varrho_a\sin\delta;$$

$$C_0N_0 = \frac{A_0C_0}{\varrho_a + \varrho_i}\varrho_i = \frac{\varrho_a - \varrho_i}{\varrho_a + \varrho_i}\varrho_i\sin\delta,$$

u. s. w.

6) $MW_0^2 = p_0^2 - r_0^2 = MN_0 \cdot p$, also $MN_0 = \frac{p_0^2 - r_0^2}{p_0}$, $MU = p_0r_0$, $U_0N_0 = MN_0 - MU = (p_0 - r_0)\left[\frac{p_0 + r_0}{p_0} - 1\right]$

$$= (p_0 - r_0)\frac{r_0}{p_0}. \quad \text{Also } \frac{MU_0}{U_0N} = \frac{p_0}{r_0} = \frac{MT_0}{N_0T_0}.$$

$$J_0S_0^2 = J_0C_0 \,.\, J_0A_0 = \varrho_i\varrho_a\cos^2\delta = JE_0^2.$$

7) Für gewisse Fälle ist es wünschenswert, diese Ausdrücke auf die drei gegebenen Stücke z. B. auf p_0, r_0, α zurückzuführen. Dabei geht z. B. über

$$p_{A_0} = p_2 \frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta} \text{ in } p_0 \frac{\sin [90^0 - (\delta - \alpha)]}{\sin \delta} = p_0 \frac{\cos (\delta - \alpha)}{\sin \delta}$$

$$= p_0 \frac{\cos \delta \cos \alpha + \sin \delta \sin \alpha}{\sin \delta} = p_0 [\cot \delta \cos \alpha + \sin \alpha].$$

Nun ist aber

$$\cot \delta = \frac{\cos \delta}{\sin \delta} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \delta}}{\sin \delta} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \delta} - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{p_0^2}{r_0^2 \cos^2 \alpha} - 1} = \frac{1}{r_0 \cos \alpha} \sqrt{p_0^2 - r_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Demnach wird

$$p_{A_0} = p_0 \left[\frac{1}{r_0} \sqrt{p_0^2 - r_0^2 \cos^2 \alpha} + \sin \alpha\right]$$

$$= \frac{p_0}{r_0} \left[\sqrt{p_0^2 - r_0^2 \cos^2 \alpha} + r_0 \sin \alpha\right],$$

und ebenso

$$p_{C_0} = \frac{p_0}{r_0} \left[\sqrt{p_0^2 - r_0^2 \cos^2 \alpha} - r_0 \sin \alpha\right],$$

also

$$p_{A_0} + p_{C_0} = \frac{2 p_0}{r_0} \sqrt{p_0^2 - r_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Ferner wird

$$A_0 C_0 = 2 r_0 \cos \delta = 2 r_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r_0 \cos \alpha}{p_0}\right)^2} = \frac{2 r_0}{p_0} \sqrt{p_0^2 - r_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Der später auftretende Ausdruck $\cos \delta (p_{A_0} + p_{C_0})$ verwandelt sich in

$$\frac{2}{r_0} (p_0^2 - r_0^2 \cos^2 \alpha).$$

Diese Formeln werden aber teilweise etwas umständlich. Eine Reihe davon wird bei den späteren Untersuchungen Anwendung finden.

§ 222) Verschiedene Entstehungsarten der logarithmischen Spiralröhrenfläche. Die erste Entstehungsart war schon im Anfang des Kapitels angegeben:

a) Eine Kugel mit veränderlichem Radius bewege sich so, dafs der Mittelpunkt auf einer logarithmischen Spirale wandert, wobei der Radius der Kugel und der Radius vector ihres Mittelpunktes stets in demselben Verhältnis bleiben sollen. Die Umhüllungsfläche der sämtlichen Kugeln ist die zu untersuchende Röhrenfläche.

Zwei unendlich benachbarte der Kugeln schneiden sich in einem Kreise, der normal zur Symmetrieebene der Fläche, im allgemeinen aber nicht normal zur augenblicklichen Bewegungsrichtung seines Mittelpunktes steht. Für die Grenze liegt dieser Schnittkreis auf der Spiralröhrenfläche. Die Fläche besitzt also unendlich viele Kreisschnitte. Jeder dieser Kreisschnitte ist normal zur augenblicklichen Bewegungsrichtung des Mittelpunktes der Kugel, denn $M_0 H_0$ in Figur 118 ist normal zu $A_0 C_0$. Die zweite Entstehungsweise ist also folgende, allerdings umständlicher zu beschreibende:

b) Ein Kreis, dessen Ebene stets normal zu der Ebene stehen soll, die zur Bewegung seines Mittelpunktes dient, habe veränderlichen Radius, dessen Länge in konstantem Verhältnis zu dem Radius vector seines Mittelpunktes in Bezug auf einen gegebenen festen Punkt M stehen soll. Sein Mittelpunkt (H_0) soll sich auf einer logarithmischen Spirale von gegebenen Schnittwinkel α bewegen, die M zum Centrum hat, eben so alle Punkte des Durchmessers $A_0 C_0$, in dem der Kreis die Ebene jener Spirale schneidet.

Man denke sich in den Grenzpunkten (A_0, C_0) dieses Durchmessers Normalen der Spiralen gezeichnet, auf denen sie sich bewegen. Dann geben diese einen Schnittpunkt M_0, der sich ebenfalls auf einer Spirale jener Schar bewegt. Der Kreisschnitt steht stets normal zur augenblicklichen Bewegungsrichtung dieses Punktes M_0.

Dazu ist noch folgendes zu bemerken: Auf Figur 118 ist eine Spirale der Punkte J_0 gezeichnet. Diese Punkte J_0 sind Krümmungsmittelpunkte der Spirale, die durch einen gewissen Punkt N_0 geht. Dieser Punkt wird durch die

Gerade $M_0 M$ auf $A_0 C_0$ bestimmt. Durch ihn geht die Spirale, die den Kreisschnitt $A_0 C_0$ normal schneidet, und diese ist Evolvente zur Spirale der J. Die Ebene des bewegten Kreises steht stets normal zur augenblicklichen Bewegungsrichtung dieses Punktes N_0, sie berührt stets den Cylinder der Spirale der J_0, von dessen Mantel sie sich abwickelt.

Die Bewegung des Kreisschnittes mit veränderlichem Radius kann also auch dahin definiert werden, dafs seine Ebene sich von dem Mantel eines Cylinders abwickeln soll, der senkrecht zur Grundrifsebene steht und diese in einer gegebenen logarithmischen Spirale (der J_0) schneidet; dabei aber soll derjenige Punkt N_0, der mit dem Berührungspunkte J_0 und mit C_0 und A_0 eine harmonische Punktgruppe bildet, in der er J_0 zugeordnet ist, mit der Tangente $J_0 A_0$ fest verbunden sein, sich also senkrecht gegen die augenblickliche dieser Tangente bewegen. Alle anderen Punkte des Kreisschnittes aber sollen sich so bewegen, dafs ihre Entfernung von N_0 stets proportional zur veränderlichen Entfernung $J_0 N_0$ (oder auch zu $N_0 M$) bleibt. Das letztere kann noch eingehengehender präzisiert werden.

Eine dritte Entstehungsart ergiebt sich folgendermafsen: Die Kugel M_0 in Figur 118 hat in Bezug auf M einen Tangentenkegel $V_0 W_0 M$. Eine der Kegelgeraden liegt so, dafs ihre Projektion als $M N_0$ erscheint. Diese der Kegelgeraden und ihr unterhalb liegendes Symmetriebild sind die einzigen, die den Kreisschnitt $A_0 C_0$ berühren. Die obere bildet mit der Grundrifsebene einen Winkel, der gleich $\sphericalangle N_0 M W_0$ ist. Bewegt sich nun die Kugel in der vorgeschriebenen Weise, so bleibt die sich mit drehende Kegelgerade Tangente der Kugel. Ihre Länge nimmt dabei so zu oder ab, dafs sie zu der des Kugelradius in demselben Verhältnis bleibt. Weil aber der Neigungswinkel $N_0 M W_0$ stets derselbe bleibt, bewegt sie sich stets auf einem Kegel, dessen Achse in M normal zur Symmetrieachse steht. Diesem Kegel gehört auch der Mantel an, auf dem sich das Symmetriebild der Geraden bewegt (unterer Kegelmantel). Auf diesem Doppelmantel bewegen sich die beiden Kugelpunkte,

die N_0 zur Projektion haben, auf symmetrischen Loxodromen des Kegels. Die Entstehnngsart ist also folgende:

Eine Kugel bewege sich als Berührungskugel von veränderlichem Radius in dem äufseren Mantelraume eines senkrechten Kreiskegels so, dafs die Berührungspunkte auf symmetrischen Loxodromen des Kegels wandern. Die umhüllende Fläche sämtlicher dabei entstehender Kugeln ist die logarithmische Spiralröhrenfläche.

Diese Erklärung ist die anschaulichste und kürzeste. Jede der drei Entstehungsweisen bringt eine gewisse Reihe von Eigenschaften der Fläche zur Kenntnis. Der hier besprochene Kegel soll der Berühungskegel der Fläche heifsen, die Loxodromen der Berühungspunkte sollen (zum Unterschiede von der Berührungsspirale der Punkte B der Symmetrieebene) als die Berührungsloxdromen bezeichnet werden. Zu beiden gehört als Projektion die Spirale der N.

§ 223) Die Bewegungskurven der übrigen Kreisschnittspunkte sind ebenfalls Kegelloxodromen, jedoch solche anderer Kegel. Jede Verbindungslinie eines solchen Punktes mit M behält nämlich während der Bewegung ihre Neigung gegen die Symmetriebene bei, bewegt sich also auf dem Mantel eines Kegels, der im allgemeinen die Spiralfläche in solchen Kurven schneidet, von denen je zwei symmetrisch sind, je zwei perspektivisch zu einander in Bezug auf M sind. Jeder solche Kegelmantel schneidet die Fläche in allen Windungen, die unendlich zahlreichen Schnittpunkte jeder seiner Geraden liegen aber auf einer der vier Kurven. Die Sonderfälle des paarweisen Zusammenfallens für die Grenzspiralen und für die den Punkten N entsprechenden Loxodromen (Berührungsloxodromen) liegen auf der Hand.

In der Projektion auf der Grundrifsebene erscheinen alle diese Bewegungskurven (wie schon angedeutet) als logarithmische Spiralen; sie sind also zugleich Loxodromen senkrechter Cylinder, welche die logarithmischen Spiralen zur Grundlinie haben, d. h. „Schraubenlinien“ von konstantem Steigungswinkel ν. Ist dem-

nach l die Länge einer logarithmischen Spirale von einem ihrer Punkte bis zum Centrum M, so ist die Länge der zugehörigen Bewegungskurve $l' = \frac{l}{\cos\nu} = \frac{p}{\cos\alpha \, . \, \cos\nu}$, wenn p der entsprechende Radius vector der Spirale ist.

§ 224) Die höchste und die niedrigste der Bewegungskurven sollen in dieser Hinsicht berechnet werden. Sie gehören zu dem Punkte H_0 der Figur 218. Dieser liegt in der Höhe $r_0 \cos\delta$ oder $H_0 H_0'$ über der Grundrifsebene. Die Länge der entsprechenden Spirale ist $l = \frac{H_0 M.}{\cos\alpha}$ Dabei berechnet sich $H_0 M$ als Mittellinie des Dreiecks $M A_0 C_0$ nach der Formel $t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ als

$$M H_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2p_{A_0}^2 + 2p_{C_0}^2 - A_0 C_0^2},$$

wobei die Gröfsen p_{A_0}, p_{C_0}, $A_0 C_0$ nach § 221 durch die gegebenen Gröfsen p_0, r_0, α auszudrücken sind. Es ist nämlich

$$p_{A_0} = \frac{p_0}{r_0}\left[\sqrt{p_0^2 - r_0^2\cos^2\alpha} + r_0 \sin\alpha\right],$$

$$p_{C_0} = \frac{p_0}{r_0}\left[\sqrt{p_0^2 - r_0^2\cos^2\alpha} - r_0 \sin\alpha\right],$$

$$A_0 C_0 = 2r_0 \cos\delta = \frac{2r_0}{p_0}\sqrt{p_0^2 - r_0^2\cos^2\alpha}.$$

Denkt man sich den betreffenden Spiralcylinder zur Ebene aufgerollt, so wird die Spirale zur Geraden $p = \frac{MH_0}{\cos\alpha}$, die Bewegungskurve zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, und da die Kathete

$$H_0 H_0^1 = r_0 \cos\delta \frac{r_0}{p_0}\sqrt{p_0^2 - r_0^2\cos^2\alpha}$$

ist, so ist die Länge der Bewegungskurve

$$l' = \sqrt{\left(\frac{MH_0}{\cos\alpha}\right)^2 + \overline{H_0 H_0'}^2},$$

wo die entsprechenden Werte einzusetzen sind. Der konstante Steigungswinkel ν berechnet sich aus $\tan\nu = \frac{H_0 H_0'}{M H_0}$, oder aus $\cos\nu = \frac{l}{l'}$. (Er stimmt also nicht etwa mit dem Steigungswinkel δ der Kegelgeraden $H_0 Z_0$ überein. Es sind eben von den Bewegungskurven verschiedene Kurven, die noch zu besprechenden Krümmungslinien zweiter Art, deren Gefälle mit denen der Kegelgeraden übereinstimmt. Auch die Bewegungskurven, die über den Punkten M_n schweben, zeigen andere Steigungswinkel, denn sie passieren nicht den höchsten Punkt des Kreisschnittes, schneiden diesen auch nicht rechtwinklig, H_0 gehört nicht zu der durch M_0 gehenden Spirale.)

In entsprechender Weise kann für jede der Bewegungskurven der Steigungswinkel berechnet werden. Man hat nur die Länge der betreffenden Spirale zu bestimmen und die Höhe des Kreisschnittpunktes über der Grundrifsebene zu berechnen.

§ 225. Die Krümmungsradien der Bewegungskurven bestimmen sich folgendermafsen. Der Krümmungsradius des spiralischen Cylinders ist $\varrho = \frac{p}{\sin\alpha}$, wenn p der Radius vector des betreffenden Spiralpunktes ist. Man denke sich den entsprechenden Krümmungscylinder gezeichnet und auf ihm in dem zu untersuchenden Punkte des Kreisschnittes eine „Schraubenlinie“ vom Steigungswinkel ν angebracht, der nun als konstant vorausgesetzt wird. Diese Schraubenlinie hat den Krümmungsradius $\varrho' = \frac{\varrho}{\cos^2\nu}$, und dieser ist zugleich der der untersuchten Bewegungskurve an der betreffenden Stelle. Allgemein ist demnach der Krümmungsradius der Bewegungskurve

$$\varrho' = \frac{p}{\sin\alpha\cos^2\nu},$$

so dafs er proportional dem betreffenden Radius vector der Grundrifsspirale und umgekehrt proportional dem Quadrate vom Cosinus des Steigungswinkels ist.

§ 226. **Die beiden Scharen von Krümmungslinien der Spiralröhrenfläche sind die Kreisschnitte und deren orthogonale Kurvenschar auf der Fläche.** Die Gründe brauchen hier nicht wiederholt zu werden. Die Tangenten der zweiten Schar längs eines Kreisschnittes treffen sich sämtlich in der Spitze des zu diesem gehörigen

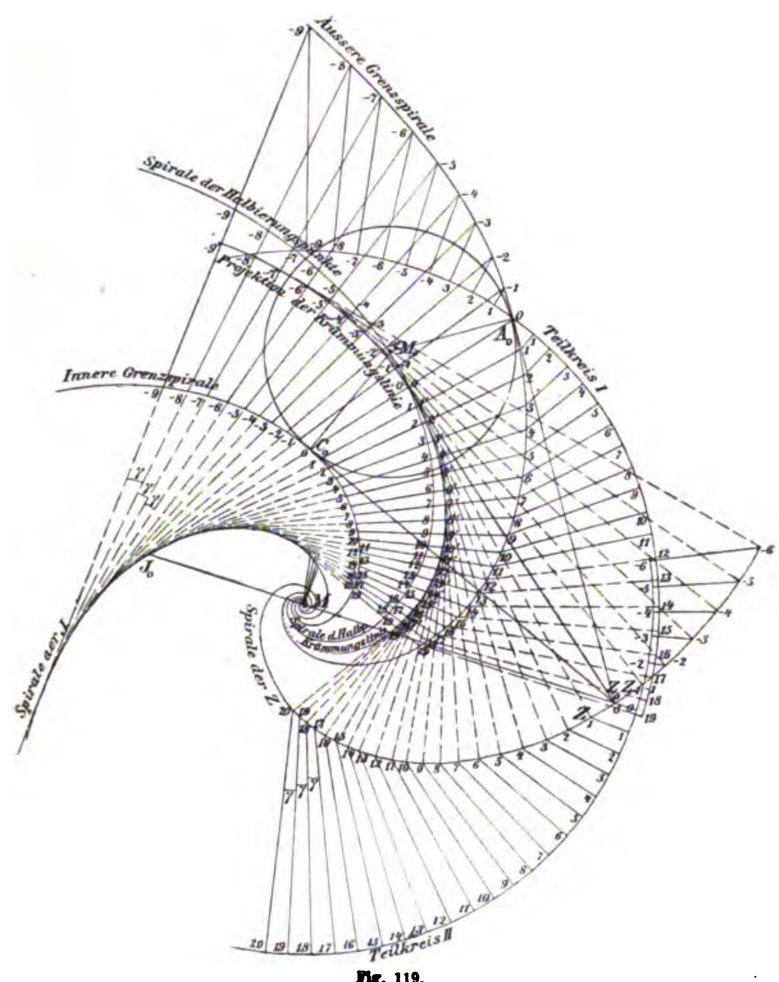


Fig. 119.

Kegels, wo sie im allgemeinen die Symmetrieebene durchstofsen. Wird diese als Grundrifsebene betrachtet, so ist die Projektion des Systems leicht zu zeichnen, d. h. mit beliebiger Annäherung zu konstruieren, was in Figur 119 geschehen ist.

Die Berührungspunkte des Kreises M_0 geben die Projektion des Kreisschnittes $A_0 C_0$, deren Verlängerung Tangente der Spirale der J ist. Nach Zeichnung dieser Spirale sind ihre Tangenten konstruiert, die unter demselben Winkel γ aufeinander folgen. Dies geschieht bequem mit Hilfe eines Teilkreises I, der um M geschlagen und in entsprechender Weise eingeteilt wird. Die von den Teilpunkten nach M gehenden Radien geben auf der äufseren (oder inneren) Grenzspirale die betreffenden Punkte $0, \overline{+}\, 1, \overline{+}\, 2, \overline{+}\, 3, \ldots$, von denen aus dann Tangenten an die Spirale der J zu legen sind. Diese geben die Kreisschnitte, deren Halbierungspunkte auf einer Spirale (Spirale der H) liegen. Die Tangenten des Kreises M_0 in den Berührungspunkten geben den Punkt Z_0, durch den man zweckmäfsiger Weise die Spirale legt, in der die Spitzen sämtlicher Berührungskegel liegen. Die zu den Kreisschnitten gehörigen Punkte Z findet man wieder mit Hilfe eines Teilkreises. Denselben wie vorher nimmt man nicht, damit die Zeichnungen sich nicht verwirren. Die Teilung geschieht wieder durch von M ausgehende Radii vectores, die unter Winkeln γ aufeinander folgen. Dabei hat man von dem von Z_0 ausgehenden Radius vector zu beginnen. Die Radii vectores geben auf der Spirale der Z die entsprechenden Teilpunkte. (Würde man von diesem aus nach den gleichnamigen Halbierungspunkten der Kreislinien Gerade legen, so würden diese ebenfalls unter Winkeln γ aufeinander folgen. Dies geschieht hier aber nicht, sondern Nachstehendes.) Man ziehe die Gerade $\overline{Z_0 0}$ nach dem Halbierungspunkte der Berührungssehne des Kreises M_0 bis zum Schnitte mit dem folgenden Kreisschnitte -1, was auf diesem einen gleichnamigen Punkt $-1'$ bestimmt. Dieser liegt nicht im Mittelpunkte des Kreisschnittes, sondern auf der konkaven*) Seite der Spirale der Halbierungspunkte H.

*) Würde man die Abstände der Kreisschnitte zu grofs nehmen, so könnte der Punkt auf die Spirale der Halbierungspunkte und sogar auf ihre konvexe Seite fallen. Die Abstände sind aber unendlich klein zu denken. Also müssen die Punkte auf die konkave Seite fallen. Für unendlich kleine Abstände werden die Abweichungen von der Spirale der Halbierungspunkte ein wenig gröfser, als in der Figur.

(denn alle aufserhalb der Spirale der N in Figur 118 liegenden Spiralen schneiden die Kreisschnitte spitzwinklig, und das verlängerte $Z_0 O$ giebt eine Sehne der Spirale der H.) Jetzt ziehe man die Gerade $\overline{Z_{-1}(-1')}$ und verlängere sie bis zum Kreisschnitte -2, was $-2'$ giebt, so fahre man fort mit der Geraden von $\overline{Z_{-3}(-2')}$ bis zum Kreisschnitte $-3'$ u. s. w. Dies giebt eine gebrochene Linie $0, -1', -2', -3', -4', \ldots, -9', \ldots,$ die angenähert die Projektion der zu untersuchenden Krümmungslinie giebt. Nach rückwärts verfährt man ebenso. Man zieht vom Halbierungspunkte 0 des Kreisschnittes 0 aus eine Gerade nach Z_1, die den Kreisschnitt 1 in einem gleichnamigen Punkte $1'$ schneidet, verbindet diesen mit Z_2 und markiert den Schnittpunkt $2'$ auf dem Kreisschnitte 2 u. s. w. Diese Punkte $1', 2', 3', 4', \ldots.$ fallen auf die konvexe Seite der Spirale der Halbierungspunkte.

Setzt man die Konstruktion nach aufsen und innen fort, so entfernt sich die Projektion der Krümmungslinien mehr und mehr von der Spirale der Halbierungspunkte und nähert sich nach aufsen hin asymptotisch der inneren Grenzspirale, nach M hin der äufseren Grenzspirale.

Fängt man nicht mit dem Kreise M_0 an, sondern z. B. mit einem Kreise M_0'', so entsteht eine ähnliche Kurve. Das Ähnlichkeitsverhältnis ist dann $p_0 : p_0''$. Folglich gilt der Satz:

Die Projektionen der sämtlichen Krümmungslinien zweiter Art der logarithmischen Spiralröhrenfläche sind einander ähnlich. Jede schneidet die Spirale der Halbierungspunkte der Kreisschnittlinien einmal und nähert sich nach M hin asymptotisch der äufseren Grenzspirale, nach dem unendlichen Bereiche hin der inneren Grenzspirale. Der Abstand des genannten Schnittpunktes von M ist als Parameter zu betrachten und bestimmt das Gröfsenverhältnis. Jede Tangente geht durch die Spitze des Berührungskegels, der zu dem zum Berührungspunkte gehörigen Kreisschnitte gehört. Keine der Kurven schneidet eine andere der Schar. Auch die beiden Grenzspiralen gehören zu dieser

Schar. Bei der äufseren ist der Schnittpunkt mit der Spirale der Halbierungspunkte im unendlichen Bereiche zu suchen, bei der inneren im Centrum *M*. Die äufsere ist also ähnlich einem unendlich kleinen bei *M* liegenden Stück jeder Krümmungslinie, jede der Krümmungslinien ist ähnlich einem bei *M* liegenden unendlich kleinen Stück der inneren Grenzspirale.

Dadurch ist die scheinbare Ausnahme hinsichtlich der Ähnlichkeit aufgeklärt.

Denkt man sich ein Modell der oberen Hälfte der Röhrenfläche dadurch dargestellt, dafs man über jeder Kreisschnittlinie einen halbkreisförmigen Drahtbügel anbringt, dessen Ebene normal zur Grundrifsebene ist, so hat man in den Punkten $0', \pm 1', \pm 2', \pm 3', \ldots$ nur Lote zu errichten, um die Punkte der eigentlichen Krümmungslinien zweiter Art räumlich festzulegen. Trotz der asymptotischen Annäherung der Projektionskurven sind die Krümmungslinien in stetigem Steigen begriffen, entfernen sich also nach dem unendlichem Bereiche hin immer mehr von den Grenzspiralen. Man erkennt dies an den Kegelgeraden, die ihre Tangenten sind. Wichtig ist noch folgender Zusammenhang.

§ 227) **Zusammenhang der Krümmungslinien zweiter Art mit denen der Krümmungscyklide.** Nach Figur 118 bestimmen der Kreisschnitt $A_0 C_0$ und die zugehörigen Krümmungskreise μ_a und μ_i der Grenzspiralen die entsprechende Krümmungscyklide, die dort denselben Berührungskegel mit der Spitze Z_0 hat. Die Schmiegungsebenen der Krümmungslinien zweiter Art der Spiralröhrenfläche und der Cyklide stimmen dort überein, sie haben als Tangenten dieselben Kegelgeraden. **Längs des Kreisschnittes $A_0 C_0$ gehen diese Schmiegungsebenen für die Cyklide sämtlich durch die in der Grundrifsebene liegende Achse $Z_0 A_1$ (vergl. Figur 120). Dies ist also dort auch für die Spiralröhrenfläche der Fall.** Dabei ist $A_0 C_0 \parallel Z_0 A_1$, wie bei der Cyklide. (Dies folgt auch daraus, dafs die Spirale der Z Evolvente der Spirale der Kugelmittelpunkte M_n ist.)

Die Krümmungskreise μ_a und μ_i stimmen für das Auge auf längere Strecken mit den Grenzspiralen überein. Mathe-

matisch sagt man, sie hätten je drei Punkte mit ihnen gemein. Demnach darf man auch sagen, Cyklide und Röhrenfläche stimmten dort in drei dicht aufeinander folgenden Kreisschnitten überein. Demnach stimmt jeder Kreisschnitt zweiter Art der Cyklide in drei Punkten mit der ihm entsprechenden Krümmungslinie zweiter Art der Spiralfläche überein. Daraus folgt: Die Kreisschnitte zweiter Art der Krümmungscyklide sind die Krümmungskreise der entsprechenden Krümmungslinien zweiter Art auf der Spiralröhrenfläche für die Punkte des Kreisschnittes $(A_0 C_0)$. Die Mittelpunkte jener Kreise sind also die Krümmungsmittelpunkte, und die auf ihren Ebenen errichteten Lote sind die augenblicklichen Krümmungsachsen für die Krümmungslinien zweiter Art der Röhrenfläche.

Der die drei Kreisschnitte umfassende unendlich dünne Kreisstreif der einen Fläche läfst sich also von dieser Fläche auf die andere übertragen.

§ 228) Das Gaufssche Krümmungsmafs der logarithmischen Spiralröhrenfläche stimmt also in jedem Punkte überein mit dem der zugehörigen Krümmungscyklide in dem entsprechenden Punkte. Insbesondere findet der Übergang von der positiven zur negativen Krümmung längs der Punkte H_0' statt.

Die erste Krümmung $\frac{1}{r}$ ist konstant für die Punkte beider Flächen längs jedes Kreisschnittes. Sie bestimmt sich aus dem Radius der inneren Berührungskugel. Die zweite Krümmung $\frac{1}{r'}$ bestimmt sich bei der Cyklide für jenen Punkt aus dem Radius der äufseren Berührungskugel, dessen Richtung mit dem des vorigen jedesmal übereinstimmt. Das Gaufssche Krümmungsmafs für beide Flächen ist demnach $\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r'}$.

Während die erste Krümmung längs des Kreisschnittes konstant ist, ist die zweite längs derselben Kurve veränder-

lich. Bei der Cyklide liegen diese Krümmungsmittelpunkte zweiter Art der Fläche auf einer Hyperbel. Diese Hyperbel liegt in der auf der Grundrifsebene normalen Symmetrieebene der Cyklide, sie geht durch die Punkte μ_a und μ_i, die ihre Scheitelpunkte sind, und ihre beiden Asymptoten stehen senkrecht auf den beiden Tangentialebenen, welche die Cyklide von aufsen längs eines ganzen Kreises berühren. Jeder Punkt dieser Hyperbel ist einer der Krümmungsmittelpunkte zweiter Art der Cyklidenfläche für einen Punkt ihrer Kreisschnitte erster Art, also auch für einen Punkt des Kreisschnittes $A_0 C_0$ der Spiralfläche.

Während also für die Krümmung erster Art längs des Kreisschnittes $A_0 C_0$ nur der eine Punkt M_0 in Betracht kam, kommen für die Krümmung zweiter Art sämtliche Punkte jener Hyperbel in Betracht.

Für die ganze Spiralröhrenfläche liegen die Krümmungsmittelpunkte erster Art auf der logarithmischen Spirale der Punkte M_n in der Symmetrieebene, also auf dem Mittelpunktswege der bewegten Kugel. Die Fläche dieser Krümmungsmittelpunkte ist also hier zu einer Kurve ausgeartet.

Die Krümungsmittelpunkte zweiter Art dagegen liegen auf einer spiralisch-hyperbolischen Fläche, die aus jenen Hyperbeln dadurch entsteht, dafs die Scheitel μ_a und μ_i der Hyperbel auf der Spirale der μ_a und μ_i wandern, wobei die Ebenen der veränderlichen Hyperbel stets normal zur Grundrifsebene bleibt, während die Asymptoten ihre Neigung gegen die Grundrifsebene beibehalten.

§ 229) Die abwickelbare Fläche der Flächennormalen ist für die Punkte jedes Kreisschnittes $A_0 C_0$ der über diesem Kreise stehende Kreiskegel mit der Spitze M_0. Längs der Krümmungslinien zweiter Art handelt es sich um diejenige abwickelbare Regelfläche, welche durch jene Kurven und die Normalen gebildet wird und eine Gratlinie besitzt, auf deren Untersuchung hier nicht eingegangen werden soll. Die Gratlinie für die erste Krümmung ist der Punkt M_0.

Wandert ein Punkt auf der Spiralröhrenfläche längs einer der Bewegungskurven, so ist dabei das

Gaufssche Krümmungsmafs der Fläche umgekehrt proportional dem Quadrate seines Abstandes vom Centrum M der Fläche.

Die sämtlichen Tangenten jedes Kreisschnittes der Spiralröhrenfläche gehen durch die Hauptachse JX der jedesmaligen Krümmungscyklide, berühren also den spiralischen Cylinder, der zu den Punkten J gehört, längs einer seiner Geraden.

Die Tangenten jeder Bewegungskurve schneiden die Grundrifsfläche in einer bestimmten logarithmischen Spirale der Schar. Die Tangenten der Kreisschnitte längs der Punkte einer Bewegungskurve schneiden die Symmetrieebene der Fläche ebenfalls in einer logarithmischen Spirale. Man bemerke, dafs von der Krümmungscyklide stets nur der Kreisschnitt erster Art in Frage kommt, der normal zur senkrechten Symmetrieebene steht und daher in der nachstehenden Figur 120 als Gerade durch J_0 erscheint. (Eigentlich handelt es sich um zwei solche Kreise, die hinter einander liegen.)

Entsprechende Sätze lassen sich noch in gröfserer Zahl aufstellen. Sämtliche werden sich am besten an einer bestimmten Konstruktionsfigur erläutern, die jetzt ausgeführt werden soll.

§ 230) Aufgabe. Die aus der Bewegung einer veränderlichen Kugel hervorgehende logarithmische Spiralröhrenfläche soll gezeichnet werden, und zwar in der Projektion auf die als Grundrifsebene betrachtete Symmetrieebene. Dabei sollen gegeben sein der Radius vector $p_0 = MM_0$, der zugehörige Kugelradius r_0 und der Schnittwinkel α der Spirale des Mittelpunktsweges. Dabei wird folgendes verlangt: Die beiden Grenzspiralen, ihre Krümmungskreise μ_a und μ_i für die Punkte A_0 und C_0, die Centrale $\overline{\mu_a \mu_i}$ der zu $A_0 C_0$ gehörigen Krümmungscyklide. Die Krümmungscyklide selbst im Aufrifs, wobei jene Centrale als Grenzlinie für Grund- und Aufrifs betrachtet werden soll (die Centrale ist nur aus Raumgründen nicht horizontal gelegt), die einfachste isothermische Einteilung dieser Cyklide durch Kreisschnitte (Krümmungslinien) zweiter Art. Die Übertragung dieser Einteilung auf $A_0 C_0$ und die durch die Teil-

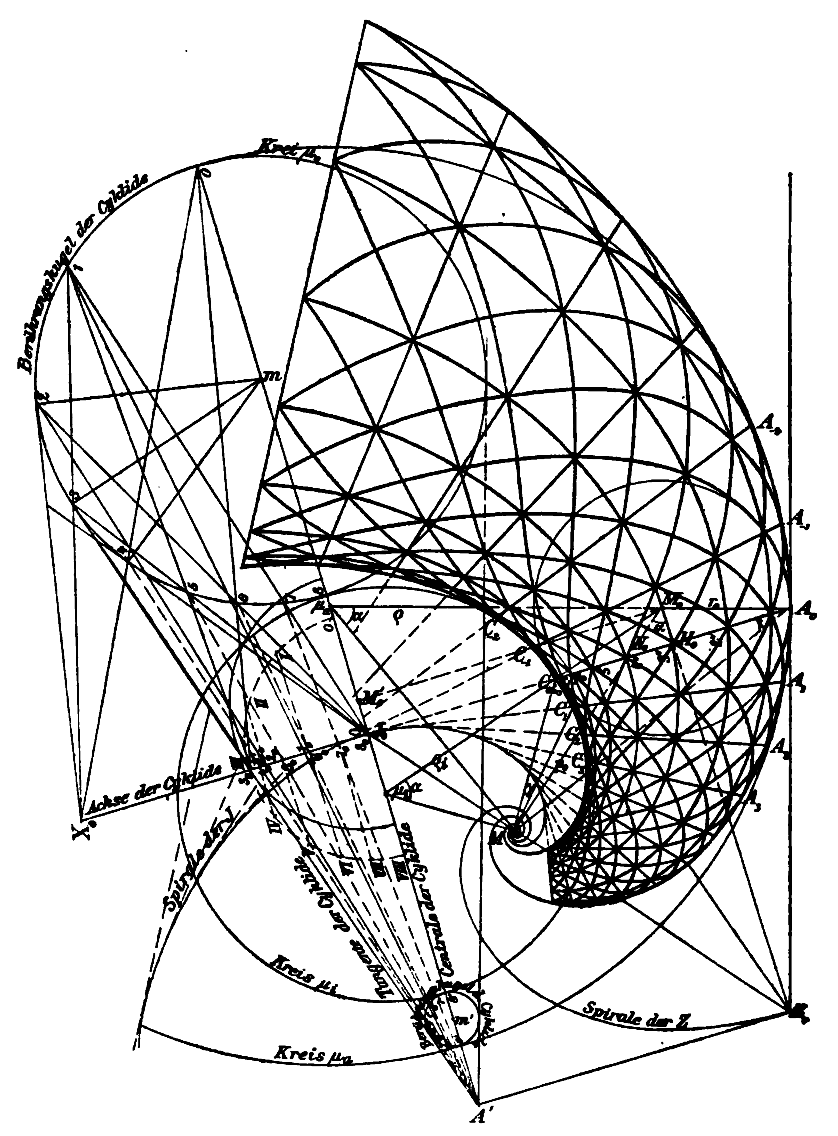

Kreis μ_0
Berührungskugel der Cyklide
Achse der Cyklide
Spirale der Y
Kreis μ_1
Kreis μ_2
Tangente der Cyklide
Centrale der Cyklide
Spirale der Z
A'

Fig. 120.

punkte gehenden Spiralen (als Projektionen der Bewegungskurven); eine regelmäfsige Einteilung der Fläche durch Kreisschnitte und die Diagonalkurven des entstehenden Vierecknetzes. (In Fig. 120 mufs oben stehen „Kreis μ_a“.)

Auflösung. Man konstruiere wie vorher aus M, $MM_0 = p_0$, Kreis M_0 und α die Tangente $M_0 H_0$ der Mittelpunktsspirale und mit Hilfe des Lotes MZ_0 auf p_0 die Länge MZ_0 dieser Spirale. Tangenten, die von Z_0 aus an den Kreis M_0 gelegt werden, geben die Punkte A_0 und C_0, durch welche die beiden Grenzspiralen zu legen sind. Die rechtwinkligen Dreiecke $A_0 M \mu_a$ und $C_0 M \mu_i$, in denen die Geraden $A_0 \mu_a$ und $C_0 \mu_i$ durch M_0 gehen, bestimmen μ_a und μ_i, die Gerade $A_0 C_0$ giebt den Schnitt N_0 auf p_0 und J_0 auf $\mu_a \mu_i$, und dabei mufs $A_0 J_0$ auf $\mu_a \mu_i$ senkrecht stehen, und MJ_0 mufs die Fortsetzung von $Z_0 M$ sein, worin eine Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung liegt.

Man zeichne jetzt die Krümmungskreise μ_a und μ_i, welche die Centrale $\mu_a \mu_i$ in den Punkten 0 und $0'$ bezw. 8 und $8'$ schneiden. Die Halbierungspunkte m und m' von $\overline{0, 8}$ und $\overline{0', 8'}$ geben die Mittelpunkte der als Kreise erscheinenden Berührungskugeln der zu $A_0 C_0$ gehörigen Krümmungscyklide. Die gemeinschaftlichen äufseren Tangenten dieser Kreise geben auf der Centrale den Punkt A'. Durch diese Tangenten und die beiden Kreise ist der Aufrifs der Krümmungscyklide gezeichnet. (Die Punkte $A' Z_0 H_0 J_0$ müssen ein Rechteck geben, worin wiederum eine Genauigkeitskontrolle liegt. Dabei mufs $A'Z_0$ Tangente der Spirale der Z sein.)

Die isothermische Einteilung der Krümmungscyklide durch Kreisschnitte zweiter Art geschieht bequem am Kreise m mit Hilfe der Tangente $J_0 4$, der Geraden $\overline{0, 4, X_0}$, (wobei $J_0 X_0$ die Fortsetzung von $\overline{A_0 J_0}$ und zugleich Hauptachse der Cyklide ist), der Tangente $\overline{X_0, 2}$, der Geraden $\overline{2, 6, J_0}$, der Geraden $\overline{0, 6, E_0}$ (wobei E_0 auf $J_0 X_0$ liegt), der Tangente $\overline{E_0 3}$, der Geraden $\overline{X_0 3, 1}$, der Geraden $\overline{1, 5, E_0}$ oder $\overline{3, 5, J_0}$, der Geraden $\overline{1, 7, J_0}$, so dafs man am Kreise m die Teilpunkte $0, 1, 2, 3, \ldots 8$ hat. Diese Teilpunkte verbinde man mit A', was auf dem Kreise m' die Teilpunkte $0', 1', 2', \ldots 8'$ giebt und auf der Geraden $J_0 X_0$, die Kreisschnitte

erster Art der Cyklide giebt, die Teilpunkte 0_0, 1_0, 2_0, 3_0, $4_0, \ldots 8_0$, die teils vorn, teils hinten zu denken sind.

Projiziert man M_0 auf die Centrale $\mu_a \mu_i$, was M_0' giebt, so mufs die Berührungskugel M_0' der Cyklide von selbst den Radius r_0 haben. (Sie ist in der Figur mit gezeichnet.) Der Kreisschnitt der Cyklide, der in die Gerade $J_0 X_0$ fällt, mufs von selbst einen Durchmesser gleich $A_0 C_0$ haben. Auch darin liegen gute Genauigkeitskontrollen. Dieser letztere Kreis werde um 90^0 gedreht, so dafs er mit den Punkten $0, I, II, III, IV, \ldots VIII$ in die Ebene der Aufrifszeichnung fällt. Diese Punkte selbst erhält man durch Parallele zur Centrale $\mu_a \mu_i$, die durch 0_0, 1_0, $2_0, \ldots 8_0$ gelegt sind. Jetzt mache man auf $A_0 C_0$ die Strecken $\overline{H_0 1''} = \overline{1_0 I}$, $\overline{H_0 2''} = \overline{2_0 II}$, $\overline{H^0 3''} = \overline{3_0 III}$, $\overline{H_0 4''} = \overline{4_0 IV}$, $\overline{H_0 5''} = \overline{5_0 V}$, $\overline{H_0 6''} = \overline{6_0 VI}$, $\overline{H_0 7''} = 7_0 VII$. Durch die Punkte $1''$, $2''$, $3'', \ldots 7''$ von $A_0 C_0$ sind dann die Spiralen der Schar zu legen, welche die verlangte Einteilung des Flächenstreifs bezw. der Röhrenfläche geben. (Diese Einteilung ist keine isothermische, die Kurven aber sind Projektionen von Isothermen der Fläche.)

Um die geforderten Kreisschnitte zu erhalten, zeichne man eine beliebige Tangente (an die Spirale der J) $A_1 C_1$ als Nachbarkreisschnitt zu $A_0 C_0$. Dies giebt einen Centriwinkel $C_0 M C_1 = \gamma$ der inneren Grenzspirale. Auf dieser markiere man Punkte C_0, C_1, C_2, $C_3 \ldots$, bezw. C_{-1}, C_{-2}, $C_{-3}, \ldots$, deren Radii vectores unter dem Winkel γ aufeinander folgen. Die Tangenten, die von diesen Punkten an die Spirale der J gelegt werden, geben die Kreisschnitte $A_2 C_2$, $A_3 C_3, \ldots$ bezw. $A_{-1} C_{-1}$, $A_{-2} C_{-2}$ u. s. w. (Diese Kreisschnitte sind keine Isothermen.)

Damit ist das verlangte Vierecksnetz gezeichnet, welches die Projektion des Vierecksnetzes der Röhrenfläche ist.

Die verlangten Diagonalkurven sind nun mit beliebiger Genauigkeit einzutragen. Man erhält sie genauer, wenn man statt der *8* Teilpunkte des Halbkreises m etwa *16*, *32*, *64*, ... Teilpunkte konstruiert und statt des Winkels γ der Radii vectores den Winkel $\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{4}, \frac{\gamma}{8}, \ldots$ wählt. (Umgekehrt

aber kann man die Schnittpunkte der Diagonalkurven benutzen, um mit grofser Genauigkeit weitere Spiralen bezw. Kreisschnitte zu erhalten. Dann kann man neue Diagonalkurven einschalten u. s. w.)

Man denke sich so die Teilung bis ins Kleinste fortgeführt, so dafs man sehr kleine, für die Grenze sogar unendlich kleine Vierecke vor sich hat. Nur von solchen soll jetzt die Rede sein.

§ 231) Bemerkungen. In der gezeichneten Projektion sind diejenigen kleinen Vierecke, die demselben Streifen zwischen zwei Nachbarspiralen angehören, einander ähnlich. Für den Fall unendlicher Kleinheit sind die entsprechenden Vierecke der Fläche eben, gehören also Tangentialebenen an. Die Tangentialebenen eines solchen Streifens haben aber dieselbe Neigung gegen die Grundrifsebene. Folglich sind auch die Vierecke des betreffenden Streifens der Röhrenfläche ähnliche Vierecke. An dieser Ähnlichkeit nehmen auch die beiden Gruppen von „Diagonalen" teil. Dagegen sind die längs eines Kreisschnittstreifens liegenden Vierecke des Netzes auf der Röhrenfläche einander nicht ähnlich. Jede der Diagonalkurven wird also von den verschiedenen Bewegungskurven unter verschiedenen Winkeln geschnitten, von jeder einzelnen Bewegungskurve werden aber sämtliche Diagonalkurven jeder Schar unter demselben Winkel geschnitten. Demnach sind sämtliche Diagonalkurven jeder Schar einander ähnlich, so jedoch, dafs die homologen Teile demselben „Spiralstreifen" angehören; aufserdem besteht jede Diagonalkurve des Netzes aus lauter ähnlichen Umgängen um die Röhrenfläche. Die homologen Linien und Flächenteile der Vierecke eines „Spiralstreifens" bilden daher geometrische Reihen, die in der Richtung nach M hin konvergent sind.

§ 232) Durch Inversion vom Centrum M aus verwandelt sich die Röhrenfläche in eine symmetrische Fläche. Jeder Kreisschnitt wird wieder Kreisschnitt, jede Berührungskugel wird wieder Berührungskugel, jede der Bewegungskurven wird eine symmetrisch ähnliche Bewegungskurve, jede der Krümmungscykliden wird Krüm-

mungscyklide, die konstruierte Einteilung der Fläche wird wieder eine solche, folglich gehen die beiden Scharen von Diagonalkurven in zwei Scharen von Diagonalkurven über, die eine symmetrisch ähnliche Einteilung geben, und zwar geht jede Schar in eine symmetrisch ähnliche über. Die Krümmungslinien zweiter Art werden wiederum solche, die Bewegungskurven ebenfalls. Sämtliche logarithmischen Spiralen der gezeichneten Schar werden wieder solche. Die sämtlichen Krümmungscykliden verwandeln sich in ähnliche, wobei der Zusatz symmetrisch überflüssig wird. Die zu den Kreisschnitten gehörigen Berührungskegel werden Cykliden besonderer Art mit je zwei Knotenpunkten. Die über den logarithmischen Spiralen zu denkenden senkrechten Cylinder, deren Loxodromen die Bewegungskurven der Röhrenfläche sind, gehen in Flächen über, die man sich durch ein Modell vorstellen kann. Man hat nur nötig, die neue logarithmische Linie auf Holz zu zeichnen und über jeden Radius vector einen senkrecht auf der Ebene stehenden halbkreisförmigen Drahtbügel zu stellen. Die Loxodromen des Cylinders werden Loxodromen der nur zur Hälfte dargestellten Fläche und zugleich Loxodromen der Flächen, in welche die zugehörigen Kegel der erstgenannten Loxodromen übergehen. Die Kegel werden wieder Cykliden mit zwei Knotenpunkten, von denen einer nach M fällt.

Da sämtliche Geraden, wie die Tangenten und Normalen, in Kreise durch M übergehen, sämtliche Ebenen, wie die Tangentialebenen, Ebenen der Kreisschnitte, Normalebenen, der Kurven u. s. w. in Kugeln durch M, so bleibt eine Reihe der ausgesprochenen Sätze in neuer Fassung erhalten. Die vorkommenden harmonischen Punkte und Strahlen (z. B. J_0, C_0, N_0, A_0) gehen in Punkte von Kreisen über, die das Möbiussche Doppelverhältnis -1 haben.

§ 233) Die Aufgabe, den Aufrifs der Spiralröhrenfläche zu zeichnen, bleibe als instruktives Übungsbeispiel dem Leser überlassen. Man lege dabei Figur 120 zu Grunde, lege sie jedoch so, dafs $\mu_a \mu_i$ horizontal wird, so dafs der Kreis $A_0 C_0$ in die Gerade $J_0 X_0$ des Aufrisses fällt, in dem die Krümmungscyklide natürlich wegfällt, während die Punkte $0_0, 1_0, 2_0, \ldots, 8_0$ bestehen bleiben. Man kann sich auf die Darstellung eines halben Umgangs beschränken und dessen andere Hälfte auf besonderem Blatte

konstruieren. Von Wichtigkeit sind die beiden Kugeln, deren Mittelpunkte im Grundrifs in der durch M gelegten (neuen) Horizontalen liegen, denn für diese liegt der in Figur 118 als wichtig charakterisierte Punkt N auf dem scheinbaren Umrisse. Die Verbindungslinien dieser Punkte N geben die Grenzlinien des Berührungskegels der Fläche (mit der Spitze M und der dort auf der Symmetrieebene senkrechten Achse), auf dem die Berührungsloxodrome nun leicht zu zeichnen ist. Auch die übrigen Kegelloxodromen werden am besten an ihren Kegeln konstruiert. Die Schnitte der Aufrifsebene durch die Reihe der Berührungskugeln werden mit Hilfe von Schnittkreisen konstruiert, deren Umhüllende die gesuchten Ovale sind.

§ 234) Isothermisches. Hat man den Grundrifs und Aufrifs gezeichnet, so lassen sich weitere Konstruktionen durchführen. Die Tangenten des durch denselben Punkt gehenden Kreisschnittes und der dortigen Bewegungskurve oder auch der Krümmungslinie z. B. bestimmen eine Tangentialebene der Spiralröhrenfläche. In dieser Ebene denke man sich auf der Tangente der Bewegungskurve ein Lot errichtet, welches bis zur unendlich benachbarten Bewegungskurve hin als auf der Fläche betrachtet werden kann, so dafs man ein Element einer Orthogonalkurve des Systems der Bewegungskurve hat. Die Aneinanderreihung dieser Elemente giebt die Orthogonalkurve selbst in beliebig genauer Darstellung.

Alle diese Orthogonalkurven erscheinen im Grundrifs als ähnliche Kurven, so dafs man nur eine einzige zu konstruieren braucht. Sie sind auch in Wirklichkeit einander ähnlich. Aus Symmetriegründen sind sie geschlossene Kurven. Zeichnet man sie (mit Hilfe der gleichen Winkel γ bei M) in Abständen, welche der Ähnlichkeit entsprechen, so erhält man eine isothermische Einteilung der logarithmischen Spiralröhrenfläche in Ringstreifen. Denkt man sich nämlich ein kleines „Rechteck“ aus zwei benachbarten Kegelloxodromen der Fläche und den Grenzlinien eines solchen Ringstreifens konstruiert, und setzt man die erstgenannten Kurven durch die Schar von Ringstreifen fort, so erhält man lauter ähnliche Rechtecke, z. B. lauter Quadrate. Denkt man sich an eine solche Quadratreihe eine neue angelehnt, und fährt man so fort, so hat man schliefs-

lich die ganze Fläche in ein System (schliefsender oder nichtschliefsender d. h. übereinandergreifender) Quadratreihen eingeteilt. Damit ist folgendes nachgewiesen:

Die logarithmische Spiralröhrenfläche läfst sich durch die auf ihr liegende Schar von Kegelloxodromen und deren Orthogonalschar in ein System ähnlicher Rechtecke einteilen. Beide Kurvenscharen sind also isothermische. Demnach läfst sich die Fläche auf einem unendlich langen ebenen Parallelstreif konform so abbilden, dafs die Grenzlinien des letzteren einer der Kurven der ersteren Schar entsprechen, die Parallellinien des Streifens dagegen der ganzen Schar. Die orthogonale Parallelenschar entspricht dabei der Schar der Kegelloxodromen.

Die beiden Scharen von Diagonalkurven einer solchen Einteilung sind Loxodromen der logarithmischen Spiralröhrenfläche, welche eine Einteilung in kleine ähnliche Rhomben geben. Jede dieser Loxodromenscharen ist eine isothermische Kurvenschar und giebt mit ihrer Orthogonalschar, die ebenfalls eine Loxodromenschar ist, ebenfalls die Möglichkeit einer Einteilung in ähnliche Rechtecke.

Man kann demnach die logarithmische Spiralröhrenfläche auf dem ebenen Parallelstreif auch so konform abbilden, dafs die Grenzlinien des letzteren einer der Loxodromen der Fläche entsprechen.

Jede solche isothermische Einteilung geht durch Inversion von M aus in eine symmetrisch ähnliche über, jede einzelne der Kurven also in eine symmetrisch ähnliche.

Über die aus diesen Sätzen folgenden physikalischen Beziehungen soll hier nicht von neuem gesprochen werden, auch nicht über den Reichtum von Übungsaufgaben geometrischer und funktionen-theoretischer Art, die sich anschliefsen lassen. Über die allgemeinen Inversions-Transformationen der Fläche soll noch besonders gesprochen werden.

Von besonderem Interesse sind die Vergröfserungsverhältnisse, die bei der konformen Abbildung auf den

Parallelstreifen auftreten. Man braucht diese nur für die Punkte eines einzigen Kreisschnittes zu kennen, dann sind sie sämtlich bekannt. Das Vergröfserungsverhältnis nimmt nämlich für die Punkte jeder der Kegelloxodromen der Fläche zu, wie die Radii vectores dieser Punkte zunehmen.

§ 235) **Aufgabe.** **Den Flächeninhalt der logarithmischen Spiralröhrenfläche vom Centrum M bis zu einem gegebenen Kreisschnitte zu berechnen.**

Auflösung. Man berechne zunächst die zwischen zwei nahe benachbarten Kreisschnitten $A_0\,C_0$ und $A_1\,C_1$ liegende Ringfläche, die sich für die Grenze als Mantel eines abgeschrägten Drehungskegels betrachten läfst. Ein solcher ist in Band II § 260 (Formel 5) berechnet als

$$M=\pi\left[rs-\frac{b+c}{2}\sqrt{p_2 p_3}\right]=\pi\left[rs-\frac{b+c}{4}\sqrt{a^2-(b-c)^2}\right],$$

wo b die Gerade von der Kegelspitze Z_0 bis A_1, c die Gerade von Z_0 bis C_1 bedeutet, r den Grundradius (hier $r_0 \cos\delta$), a die Gerade $A_1\,C_1$. Bezeichnet man die „Geraden" $A_0\,A_1$ und $C_0\,C_1$ mit s_2 und s_3 (vergl. Band II) und die Kegelseite $Z_0\,A_0 = Z_0\,C_0$ mit s, so hat man für b zu setzen $s - s_2$, für c dagegen $s - s_3$, endlich ist $A_1\,C_1 = a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ hier gleich $\sqrt{b^2 + c^2\, 2bc\cos(2\delta)}$, wobei 2δ der Hauptschnittwinkel des Kegels an der Spitze ist. Für b und c sind nun die eingeführten Werte zu setzen. Dann hat man als Mantelinhalt

$$M=$$

$$\pi\left[rs-\frac{2s-s_2-s_3}{4}\sqrt{(s-s_2)^2+(s-s_3)^2-2(s-s_2)(s-s_3)\cos 2\delta-(s_2-s_3)^2}\right].$$

Hier ist $\cos 2\delta = \cos^2\delta - \sin^2\delta =$

$$\frac{s^2-r^2}{s^2}-\frac{r^2}{s^2}=\frac{s^2-2r^2}{s^2}=1-\frac{2r^2}{s^2}.$$

Setzt man letzteres für $\cos 2\delta$ ein, so hebt sich vieles weg und die Formel geht über in

$$M=\pi\left[rs-\frac{2s-s_2-s_3}{4}\sqrt{4(s-s_2)(s-s_3)\frac{r^2}{s^2}}\right]$$

oder endlich in

$$1)\ M = \frac{\pi r}{2s}\left[2s^2 - (2s - s_2 - s_3)\sqrt{(s - s_2)(s - s_3)}\right].$$

Im Anschlufs an die Bezeichnungen in Figur 118 setze man jetzt $r = r_0 \cos\delta$, $s = \frac{r_0}{\tan\delta}$. Der Bogen $C_0 C_1$ ergiebt sich bei sehr kleinem γ aus $\triangle C_0 C_1 M$ als $s_2 = MC_1 \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$

$$= p_{C_1}\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = p_{C_0} \cdot e^{\frac{-\gamma}{\tan\alpha}} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

$$\text{ebenso } A_0 A_1 \text{ als } s_3 = p_{A_0} \cdot e^{\frac{-\gamma}{\tan\alpha}} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Der Ausdruck unter der Wurzel in Gleichung 1) geht also über in

$$\left(\frac{r_0}{\tan\delta} - p_{A_0} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot e^{\frac{-\gamma}{\tan\alpha}}\right) \cdot \left(\frac{r_0}{\tan\delta} - p_{C_0} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot e^{\frac{-\gamma}{\tan\alpha}}\right).$$

Er vereinfacht sich aber erheblich durch folgende Überlegung. Man hat schliefslich γ als unendlich klein zu betrachten, so dafs man $e^{\frac{-\gamma}{\tan\alpha}} = e^0 = 1$ setzen darf. (Dies ist nicht gestattet für $\alpha = 0$ und $\alpha = 180^0$, was jedoch nur den Fall bedeutet, wo die Spirale zur Geraden wird. Um diesen handelt es sich hier nicht.) Aufserdem darf man für unendlich kleines γ statt $\sin\gamma$ einfach γ schreiben. Multipliziert man nun aus, so hat man das endliche Glied $\frac{r_0^2}{\tan^2\delta}$, die unendlich kleinen Glieder erster Ordnung

$$-\frac{r_0}{\tan\delta} \cdot p_{A_0} \cdot \frac{\gamma}{\sin\alpha} \text{ und } -\frac{r_0}{\tan\delta} p_{C_0} \cdot \frac{\gamma}{\sin\alpha}$$

und das unendlich kleine Glied zweiter Ordnung $p_{A_0} \cdot p_{C_0} \cdot \frac{\gamma^2}{\sin^2\alpha}$. Diese drei letzten Glieder sind für die Grenze gegen das endliche Glied zu vernachlässigen, und so ist statt der Wurzel einfach zu schreiben $\frac{r_0}{\tan\delta}$. Setzt man nun alles Genannte in die Formel 1) um, so entsteht der Ausdruck

$$M = \frac{\pi r_0 \cos\delta}{2\frac{r_0}{\tan\delta}} \left\{ \frac{2r_0^2}{\tan^2\delta} - \left[\frac{2r_0}{\tan\delta} - \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} e^{\frac{-\gamma}{\tan\alpha}} \cdot (p_{A_0} + p_{C_0}) \right] \frac{r_0}{\tan\alpha} \right\}.$$

Auch hier ist $e^{\frac{-\gamma}{\tan\alpha}} = 1$ und $\sin\gamma = \gamma$ zu setzen, aber die unendlich kleinen Glieder erster Ordnung, dürfen hier nicht vernachlässigt werden, weil die endlichen Glieder $\pm \frac{2r_0^2}{\tan^2\delta}$ sich wegheben. Schliefslich erhält man für den unendlich kleinen Mantel die Formel

2) $$M_1 = \frac{\pi r_0}{2} \cos\delta \frac{\gamma}{\sin\alpha} (p_{A_0} + p_{C_0}).$$

Jetzt ist die geometrische Reihe aller dieser Mäntel bis zum Centrum M hin zu bilden, was auf die Summe

$$F = \sum M_n = M_1 \left[1 + e^{-\frac{2\gamma}{\tan\alpha}} + {}^{-\frac{4\gamma}{\tan\alpha}} + \ldots\ldots \right]$$
$$= \frac{M_1}{1 - e^{-\frac{2\gamma}{\tan\alpha}}}$$

führt. Führt man, wie früher, die Reihenentwickelung der Potenz von e durch, und setzt man dort nach Hebung der ± 1 den Faktor $\frac{2\gamma}{\tan\alpha}$ heraus, so erhält man schliefslich für unendlich kleines γ, da die Reihensumme gleich 1 wird,

$$F = M_1 \frac{\tan\alpha}{2\gamma}.$$

Setzt man den Wert von M_1 aus Gleichung 2) ein, so erhält man, da γ im Zähler und Nenner vorkommt, und daher gestrichen werden kann, für die Fläche den endlichen Ausdruck

3) $$F = \frac{\pi r_0}{4} \frac{\cos\delta}{\cos\alpha} (p_A + p_C).$$

Jetzt soll alles auf die gegebenen Gröfsen p_0, r_0, α zurückgeführt werden. Nach obigem ist (vergl. § 221)

$$(p_{A_0} + p_{C_0}) \cos\delta = \frac{2}{r_0}(p_0^2 - r_0^2 \cos^2\alpha).$$

Demnach wird der Flächeninhalt der Spiralröhrenfläche von $A_0 C_0$ bis zum Centrum M hin

$$4)\qquad F = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p_0^2 - r_0^2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha},$$

eine Formel, die leicht in Worte zu kleiden und geometrisch zu deuten ist. Schreibt man dafür

$$F = \frac{\pi p_0^2}{2 \cos \alpha} \left[1 - \left(\frac{r_0}{p_0} \cos \alpha \right)^2 \right],$$

und bedenkt man, dafs $\frac{r_0}{p_0}$ für die gesamte Fläche konstant ist, so erkennt man, dafs der Flächeninhalt proportional dem Quadrate des Radiusvectors p_0 ist.

§ 236) Bemerkungen. Für den Sonderfall $p_0 = r_0$ gehen sämtliche Berührungskreise durch M, für diesen Fall wird

$$F = \frac{\pi p_0^2 \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

Für den Sonderfall $p_0 = r_0 \cos \alpha$ ist die Fläche gleich Null. Es handelt sich dabei um den Fall, bei dem die äufsere und die innere Spirale zusammenfallen und die Evolvente der Mittelpunktsspirale bilden, wobei die Tangente der letzteren zugleich die Normale der Grenzspirale ist. Dabei ist in der That $p_0 = \frac{r_0}{\cos \alpha} = \varrho_a$. Dieser Fall verdient überhaupt besondere Besprechung. Für $\alpha = 45^\circ$ ist

$$F = \frac{\pi}{2} \, \frac{2 p_0^2 - r_0^2}{\sqrt{2}}.$$

Für gewisse Betrachtungen ist noch eine andere Formel für F bemerkenswert. Es ist nämlich auch

$$p_{A_0} + p_{C_0} = p_0 \frac{\sin \varepsilon + \sin \varepsilon_1}{\sin \delta} = p_0 \frac{2 \sin \frac{\varepsilon + \varepsilon_1}{2} \cos \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2}}{\sin \delta}$$

$$= 2 p_0 \frac{\sin (90^\circ - \delta) \cos \alpha}{\sin \delta} = 2 p_0 \frac{\cos \delta \cos \alpha}{\sin \delta}.$$

Dadurch wird

$$F = \frac{\pi p_0 r_0}{2} \frac{\cos^2 \delta}{\sin \delta}.$$

Mit dieser Formel läfst sich nämlich leicht die für die Mantelfläche des zum Kreisschnitt $A_0 C_0$ gehörigen Tangentenkegels geltende vergleichen. Diese ist

$$F' = \pi r s = \pi r_0 \cos \delta \frac{r_0}{\tan \delta} = \pi r_0^2 \frac{\cos^2 \delta}{\sin \delta}.$$

Daraus folgt

$$F' : F = 2 r_0 : p_0,$$

oder

$$F = F' \frac{p_0}{2 r_0}.$$

Folglich: Welches auch der konstante Schnittwinkel der Spiralen sei, stets verhält sich die Mantelfläche des Tangentenkegels zu der Spiralröhrenfläche, wie der Durchmesser der bewegten Kugel zum Radius vector ihres Mittelpunktes.

Ist z. B. $p_0 = 2 r_0$, so sind beide Flächen von demselben Inhalt. Für $p_0 > 2 r_0$ ist die Spiralfläche die gröfsere, für $p < 2 r_0$ die Kegelfläche die gröfsere.

Es ist auch zweckmäfsig, den Flächeninhalt F mit der Fläche der Kugel M_0 oder deren Kalotte über $A_0 C_0$ in Verhältnisbeziehung zu setzen.

§ 237) Aufgabe. Den Rauminhalt der Spiralröhrenfläche für das Stück von M bis zu einem Kreisschnitte $A_0 C_0$ zu berechnen.

Auflösung. Nach Band II § 260 ist der Inhalt des abgeschrägten Drehungskegels

$$J_1 = \frac{\pi}{3} [r^2 h - p_2 p_3 \sqrt{p_1 p_2}]$$

$$= \frac{\pi}{3} \left[r^2 h - \frac{a^2 - (b-c)^2}{4} \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4}} \right]$$

oder

$$J_1 = \frac{\pi}{24} \left\{ 8 r^2 h - [a^2 - (b-c)^2] \sqrt{(b+c)^2 - a^2} \right\}.$$

Führt man dieselben Bezeichnungen ein, wie bei der Berechnung der Fläche, und setzt man $\frac{h}{s} = \cos\delta$, so wird die Formel

$$J_1 = \frac{\pi}{24}\Big\{8r^2 s\cos\delta$$

$$-[(s-s_2)^2 + (s-s_3)^2 - 2(s-s_2)(s-s_3)\cos 2\delta - (s_3-s_2)^2]\cdot\sqrt{}\Big\}.$$

Dabei wird der Ausdruck unter der Wurzel

$$(2s-s_2-s_3)^2 - (s-s_2)^2 - (s-s_3)^2 + 2(s-s_2)(s-s_3)\cos 2\delta.$$

Wiederum wird $\cos 2\delta = \cos^2\delta - \sin^2\delta = 1 - \frac{2r^2}{s^2}$. Bei der Auswertung der Ausdrücke hebt sich wiederum vieles weg, und zunächst wird

$$J_1 = \frac{\pi}{24}\Big\{8r^2 s\cos\delta$$

$$-4(s-s_2)(s-s_3)\frac{r^2}{s^2}\sqrt{4(s-s_2)(s-s_3)\left(1-\frac{r^2}{s^2}\right)}\Big\}.$$

Hier kann man für $\left(1-\frac{r^2}{s^2}\right)$ schreiben $\cos^2\delta$ und dadurch wird

$$J_1 = \cos\delta\,.\,\frac{\pi r^2}{3s^2}\cdot\left[s^3-(s-s_2)(s-s_3)\sqrt{(s-s_2)(s-s_3)}\right]^{*)}.$$

Jetzt ist einzusetzen $r_0\cos\delta$ für r, $\frac{r_0}{\tan\delta}$ für s, für s_2 unter Vernachlässigung des unendlich kleinen wie oben $p_{A_0}\frac{\gamma}{\sin\alpha}$, für s_3 ebenso $p_{C_0}\frac{\gamma}{\sin\alpha}$. Der unter der Wurzel stehende Ausdruck geht für unendlich kleines γ, wie bei der

*) Die Schreibweise $[(s-s_2)(s-s_3)]^{\frac{3}{2}}$ wird hier vermieden, weil sie das korrekte Vernachlässigen des Unendlichkleinen gegen das Endliche erschwert.

vorigen Rechnung, über in $\frac{r_0^2}{\tan^2\delta}$, was gleich s^2 ist, und so hat man bis jetzt

$$J_1 = \frac{\pi}{3}\frac{r_0^2\cos^2\delta\cos\delta}{\frac{r_0^2}{\tan^2\delta}}\cdot\left[\frac{r^3}{\tan^3\delta}-\frac{r_0}{\tan\delta}\left(\frac{r_0}{\tan\gamma}-p_{A_0}\frac{\gamma}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{r_0}{\tan\gamma}-p_{C_0}\frac{\gamma}{\sin\alpha}\right)\right].$$

Multipliziert man innerhalb der eckigen Klammer aus, so hebt sich das endliche Glied $\frac{r^3}{\tan^3\delta}$ gegen $-\frac{r^3}{\tan^3\delta}$, so dafs nur das unendlich kleine Glied erster Ordnung

$$p_{A_0}\frac{\gamma}{\sin\alpha}\cdot\frac{r_2^0}{\tan^2\delta}+p_{C_0}\frac{\gamma}{\sin\alpha}\cdot\frac{r_0^2}{\tan^2\delta}=(p_{A_0}+p_{C_0})\frac{\gamma}{\sin\alpha}\cdot\frac{r_0^2}{\tan^2\delta}$$

und das unendlich kleine Glied zweiter Ordnung

$$-p_{A_0}\cdot p_{C_0}\cdot\frac{\gamma^2}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{r_0}{\tan\delta}$$

stehen bleibt. Das letztere kann gegen das unendlich kleine erster Ordnung gestrichen werden, das Unendlichkleine erster Ordnung aber bleibt stehen, da das Endliche, gegen welches es vernachlässigt werden könnte, weggefallen ist. Als Rauminhalt des unendlich niedrigen abgeschrägten Kegels bleibt also für unendlich kleines γ stehen

1) $$J_1 = \frac{\pi}{3}\frac{\cos^3\delta}{\sin\alpha}\gamma\, r_0^2(p_{A_0}+p_{C_0}).$$

Jetzt ist die geometrische Reihe aller solcher Kegelinhalte von A_0C_0 bis M hin zu summieren. Dadurch erhält man

$$J=\Sigma J_n = J_1\left[1+e^{\frac{-3\gamma}{\tan\alpha}}+e^{\frac{-6\gamma}{\tan\alpha}}+\ldots\right]=\frac{J_1}{1-e^{-\frac{3\gamma}{\tan\alpha}}}.$$

Behandelt man den Nenner wie vorher unter Reihenentwickelung, so erhält man nach Wegheben der ± 1 durch

Heraussetzung von $\frac{3\gamma}{\tan\alpha}$ und Feststellen der bleibenden Reihensumme als 1 den Ausdruck

$$J = J_1 \frac{\tan\alpha}{3\gamma}.$$

Setzt man J_1 nach Gleichung 1) ein, so wird

$$J = \frac{\pi}{3}\frac{\cos^3\delta}{\sin\alpha}\gamma r_0^2 (p_{A_0} + p_{C_0})\frac{\tan\alpha}{3\gamma} = \frac{\pi}{9} r_0^2 (p_{A_0} + p_{C_0})\frac{\cos^3\delta}{\cos\alpha},$$

worin das Unendlichkleine weggefallen ist, da γ gehoben werden konnte. Für $p_{A_0} + p_{C_0}$ ist dasselbe, wie vorher, einzusetzen, ebenso ist $\sin\delta = \frac{r_0}{p_0}\cos\alpha$, $\cos^2\delta = \frac{p_0^2 - r_0^2\cos^2\alpha}{p_0^2}$ zu setzen. Dadurch erhält man die Formel

$$2)\quad J = \frac{2\pi}{9}\frac{r_0}{p_0^2\cos\alpha}(p_0^2 - r_0^2\cos^2\alpha)^2 = \frac{2\pi}{9} p_0 r_0^2 \frac{\cos^4\delta}{\sin\delta}$$

für den Inhalt des untersuchten Raumes innerhalb der logarithmischen Spiralröhrenfläche.

§ 238) Bemerkungen. Schreibt man für die erste dieser Formeln

$$J = \frac{2\pi}{9\cos\alpha} p_0^3 \cdot \left(\frac{r_0}{p_0}\right)\left[1 - \left(\frac{r_0}{p_0}\right)^2 \cos^2\alpha\right]^2,$$

und bedenkt man, daſs $\frac{r_0}{p_0}$ für die ganze Fläche ein konstantes Verhältnis ist, so erkennt man, daſs der Rauminhalt proportional p_0^3 ist.

Der zugehörige Kreiskegel (Tangentenkegel $A_0 C_0 Z_0$) hat den Rauminhalt

$$J' = \frac{\pi h}{3} r^2 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{r_0\cos^2\delta}{\sin\delta}\right) r_0 \cos^2\delta = \frac{\pi r_0^3 \cos^4\delta}{3\sin\delta}.$$

Demnach ist

$$J' : J = \frac{\pi r_0^3 \cos^4\delta}{3\sin\delta} : \frac{2\pi}{9} p_0 r_0^2 \frac{\cos^4\delta}{\sin\delta}$$

oder

$$J' : J = r_0 : \frac{2}{3} p_0,$$

so daſs

$$3) \qquad J = J' \frac{2}{3} \frac{p_0}{r_0}$$

ist.

Welches also auch der konstante Schnittwinkel α der Spiralen sei, stets ist der Inhalt des Spiralröhrenflächenraumes das $\frac{2}{3}\frac{p_0}{r_0}$-fache vom Inhalte des zugehörigen Kegels.

Die entsprechenden Sonderfälle sind ebenso zu behandeln, wie vorher. Es ist auch zweckmäſsig, die Inhalte J innerhalb der Spiralröhrenfläche zu dem der Kugel M_0 oder dem ihres Segmentes über $A_0\,C_0$ in Verhältnisbeziehung zu setzen.

§ 239) **Schlieſsungsprobleme nach Art der Steinerschen** lassen sich an die untersuchten Flächen anschlieſsen. Einige gelten schon auf Grund der Ähnlichkeit, z. B. folgendes: Erfüllt eine ganzzahlige Reihe von Berührungskugeln gerade einen Umgang der Fläche, so ist dies mit jeder solchen Reihe der Fall. Andere gelten auf Grund der Abbildung auf den Parallelstreif, z. B. folgendes: Schlieſst in einem der besprochenen isothermischen Ringstreifen eine Reihe von Quadraten der betreffenden Einteilung nach einem Umgange, so schlieſst sie stets, wo sie auch beginne. Dasselbe gilt von den Quadraten innerhalb eines Streifens zwischen zwei Loxodromen der Fläche, die zu einer quadratischen Einteilung gehören. Entspricht eine Reihe solcher Quadrate genau einem Umgange um die Fläche, so geschieht dies stets, wo auch die Reihe beginne.

[Bei der Drehungscyklide denke man sich zwischen zweien der inneren Berührungskugeln und der Fläche andere Berührungskugeln einbeschrieben, die alle drei Flächen berühren. Die äuſserste und innerste dieser neuen Kugelschar bestimmen, wie leicht zu zeigen ist, eine Dupinsche Cyklide, welche die ursprüngliche in einem Kreisschnitte berührt, und deren Kreisschnittebenen zweiter Art durch die Drehungs-

achse der Cyklide gehen. Durch Inversion gilt der Satz auch allgemein von der Dupinschen Cyklide, nur dafs an Stelle der Drehungsachse deren Hauptachse (durch J) tritt. Auch in einen der entsprechenden Räume der Spiralröhrenfläche lassen sich solche Berührungskugeln einbeschreiben. Es fragt sich, welchen Modifikationen der genannte Satz hier unterliegt, ob die Kugelschar etwa längs eines Kreisschnittes berührt, ob die Reihe, wie dort, stets schliefst, wenn sie einmal schliefst, u. s. w. Die Frage, welche Gestalt die Umhüllende der Kugeln hat, ist dabei zunächst zu beantworten.]

Weitere Schliefsungsprobleme sollen an einem besonderen Beispiele angedeutet werden.

§ 240) Eine merkwürdige Kugelschar, die einem schon berührten Sonderfalle entspricht, entsteht in folgender Weise. Man denke sich eine logarithmische Spirale durch Radii vectores, die unter konstantem Winkel γ aufeinander folgen, regelrecht eingeteilt, wobei die Teilpunkte mit μ bezeichnet werden mögen. Auf diesen Radii vectores denke man sich im Centrum M Lote errichtet, die bis zu den Durchschnitten P mit den in den entsprechenden Punkten μ an die Spitze gelegten Tangenten reichen, so dafs die Tangenten die Längen der von M aus bis zu den Berührungspunkten reichenden Spiralbogen angeben. Die Schnittpunkte der Lote und der Tangenten liegen dann auf einer gleichwinkligen Spirale desselben Centrums, der Evolvente der ersten Spirale. Um die Punkte μ lege man mit den zugehörigen Tangenten als Radien Kreise. Diese Kreise sind Krümmungskreise der zweiten Spirale und werden von dieser umhüllt, aber gleichzeitig geschnitten. Jedes der Lote verlängere man über M hinaus um sich selbst, dann bilden die Endpunkte B eine dritte Spirale derselben Schar, die derart liegt, dafs jeder um M gelegte Kreis durch sie selbst und durch die zweite Spirale in einem Durchmesser geschnitten, also halbiert wird. Sie ist die isothermisch Halbierende des eine ganze Umdrehung umfassenden Spiralstreifens (hier die doppelt gedachte zweite Spirale). Die Punkte B entsprechen also den Berührungspunkten B der früher behandelten Figuren, nur handelt es sich jetzt um einen der Fälle, wo die einbeschriebenen Kreise einander nicht in dem Sinne berühren können, wie es früher

geschah. Die Bedeutung der Punkte B zu untersuchen, wird als Aufgabe gestellt. Sodann soll die durch die gezeichneten Kreise bestimmte Kugelschar untersucht werden, für die sie Hauptkreise sind. Diese Kugelschar wird nicht, wie vorher, von einer Spiralröhrenfläche umhüllt, sondern nur von einer Linie, der zweiten Spirale. Die wesentlichen Eigenschaften dieser Kugelschar sollen im

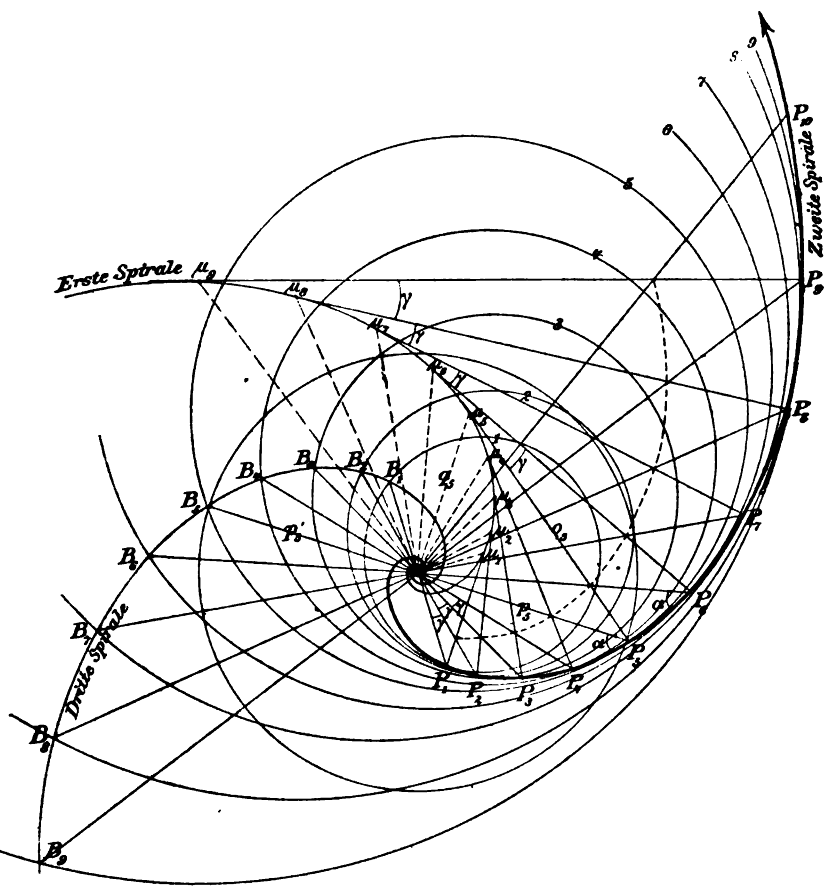


Fig. 121.

Anschlufs an die früheren Betrachtungen ermittelt werden. Sie wird z. B. nicht nur von den Spiralen, sondern auch von den Loxodromen der zu diesen gehörigen senkrechten Cylinder, also von gewissen Kegelloxodromen, unter konstanten Winkeln durchschnitten. Jede dieser Kurven giebt homologe Punkte der Kugeln. Wie die gestrichelte Spirale der Figur zeigt, liegen die Schnittpunkte entsprechender Geraden auf Spiralen der Schar. Im Ringstreif zwischen je zwei der gezeichneten Kreise (die nur für $\gamma = 0$ einander berühren) lassen sich Berührungskreise einzeichnen, die, je nachdem man den Abstand wählt, entweder nach einer endlichen Anzahl von Umgängen schliefsen, oder überhaupt nicht schliefsen, in gewissen Sonderfällen schon nach einem Umgange schliefsen. Geschieht z. B. letzteres bei den Kreisen *1* und *5*, so geschieht es auch bei *2* und *6*, bei *3* und *7* u. s. w., wo auch der erste Berührungskreis liegen möge. In dieser Hinsicht verhält sich also diese spiraloidische Kreisschar wie eine Steinersche. Ein Unterschied liegt aber darin, dafs bei der Steinerschen Kreisschar die Berührungspunkte benachbarter Berührungskreise auf einem Kreise derselben Schar (auf den Streifen isothermisch halbierenden) liegen, hier aber nicht etwa auf einem Kreise der spiraloidischen Schar. Die Figur stellt also zugleich eine Reihe aufeinander folgender Cykliden von besonderer Lage dar, für welche an Stelle der Kreisreihen Kugelreihen treten.

Denkt man sich die gezeichneten Kugeln, z. B. von der zehnten ab bis nach M hin fortgesetzt, so ist der Quotient der geometrischen Reihe ihrer Radien gleich $e^{\frac{-\gamma}{\tan\alpha}}$. Demnach läfst sich die Summe der Kreisperipherien, der Kugeloberflächen, der Kugelinhalte bis dorthin genau berechnen.

Jede Orthogonalkurve der gezeichneten Kreisschar hat auf der Spirale der P einen Wendepunkt, da sie aber unendlich viele Durchschnittspunkte mit ihr hat, besitzt sie unendlich viele Wendepunkte.

Weitere Eigenschaften dieser Kreis- und Kugelschar zu entwickeln, bleibe dem Leser überlassen. Einige ergeben sich z. B. mittels der Inversion gegen irgend eine um M gelegte Kugel, wodurch das Symmetriebild der Spiralenschar

in Bezug auf jeden ihrer Radii vectores entsteht und die vorkommenden Geraden und Ebenen in Kreise bezw. Kugeln, die durch M gehen, verwandelt werden. Aber auch die Ähnlichkeitspunkte der Kugelschar, die Potenzlinien und Potenzebenen u. s. w. geben zu Sätzen Veranlassung. Daſs auch die Inversion von beliebigem Raumpunkte aus von Interesse ist, wird sich unten zeigen.

β) Die Inversionsverwandten der logarithmischen Spiralröhrenfläche.

§ 241) Die Inversionsverwandten der Schar logarithmischer Spiralen. Die Spiralenschar entstand aus der Schar konzentrischer Kreise und des Strahlenbüschels, die von jener ersteren Schar unter konstanten Winkeln $(90^0 + \alpha)$ und α durchschnitten werden. Durch Inversion von einem beliebigen Punkte der Ebene aus geht das Strahlenbüschel nebst konzentrischer Kreisschar über in ein Kreisbüschel nebst orthogonaler Kreisschar. Die Schar logarithmischer Spiralen verwandelt sich dabei in eine Kurvenschar, welche das Kreisbüschel unter dem konstanten Winkel α, die Kreisschar unter $(90^0 + \alpha)$ schneidet. Wie man von Bicirkularkoordinaten spricht, kann man auch von Bicirkularspiralen sprechen. Jedoch kann man die neuen Spiralen auch als logarithmische Doppelspiralen bezeichnen.

Die Kreise des Büschels haben über der die Büschelpunkte verbindenden Sehne konstante Peripheriewinkel. Macht man diese Sehne zur X-Achse, die andere Symmetrielinie des Büschels zur Y-Achse, so kann man statt des Peripheriewinkels für jeden Punkt eines Kreises die Differenz der Neigungswinkel der Schenkel gegen die X-Achse nehmen, was eine Gleichung $(\varphi - \varphi_1) = \gamma$ giebt. Für die Kreise der Kreisschar ist bekanntlich das Verhältnis der Radii vectores konstant, so daſs man für jeden Kreis die Gleichung $\frac{p}{p_1} = e$ hat. Läſst man $(\varphi - \varphi_1)$ der Reihe nach die Werte der Glieder einer arithmetischen Reihe annehmen, z. B.

$$1)\qquad (\varphi - \chi) = 0, \pm \frac{2\pi}{n}, \pm \frac{4\pi}{n}, \pm \frac{6\pi}{n}, \pm \cdots\cdots,$$

und macht man ebenso der Reihe nach

2) $$lg\left(\frac{p}{q}\right) = 0, \pm\frac{2\pi}{n}, \pm\frac{4\pi}{n}, \pm\frac{6\pi}{n}, \pm\ldots\ldots,$$

so erhält man die quadratische Einteilung durch Kreisbüschel und Kreisschar. Man kann geradezu sagen, dafs bei der Transformation die Neigungen

$$\vartheta = 0, \pm\frac{2\pi}{n}, \pm\frac{4\pi}{n}, \pm\ldots.$$

sich in die Neigungsdifferenzen unter 1) verwandelt haben, die Radien

$$r = 0, e^{\pm\frac{2\pi}{n}}, e^{\pm\frac{4\pi}{n}}, \ldots..$$

in die Radienverhältnisse

$$\frac{p}{q} = e^0, e^{\pm\frac{2\pi}{n}}, e^{\pm\frac{4\pi}{n}}, \ldots\ldots,$$

woraus eben die Reihe 2) hervorgeht. Ohne näher auf diese Koordinaten einzugehen, bemerke man Folgendes:

In § 205 entsprach der Geraden

$$\frac{Y - Y_1}{X - X_1} = \tan\alpha = k$$

die logarithmische Spirale

$$\frac{\vartheta - \vartheta_1}{lg\,r - lg\,r_1} = \tan\alpha = k.$$

Die Gleichung der letzteren geht durch Inversion über in

$$\frac{(\varphi - \chi) - (\varphi_1 - \chi_1)}{lg\left(\frac{p}{q}\right) - lg\left(\frac{p_1}{q_1}\right)} = \tan\alpha = k.$$

Letzteres ist also die Gleichung der logarithmischen Doppelspiralen oder Bicirkularspiralen. Man kann aber die Gleichung auch einfacher schreiben. In § 205 wurde aus der Geraden

$$X - Y\cot\alpha = X_1$$

die Spirale

$$ {}^{e}lg\, r - \vartheta \,.\, \cot \alpha = {}^{e}lg\, r_1, $$

oder

$$ \frac{r}{r_1} = e^{\vartheta \cot \alpha}, \text{ oder } r = r_1 e^{\vartheta \cot \alpha}. $$

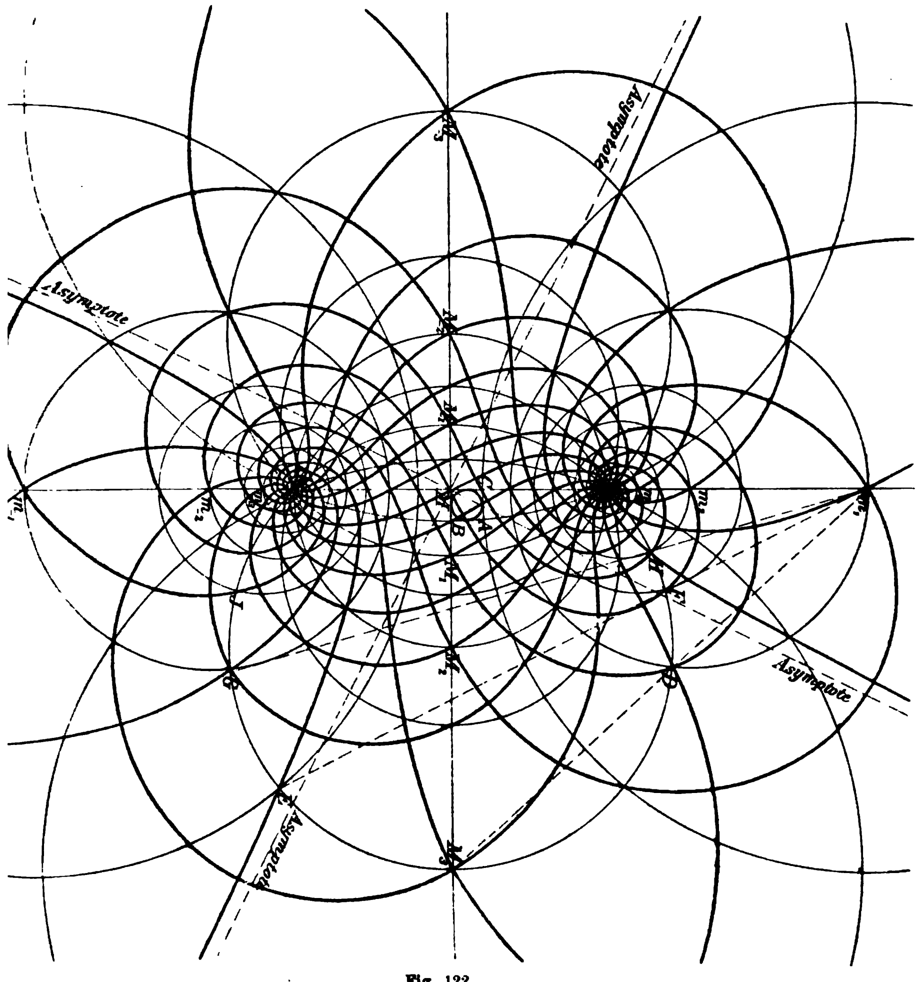


Fig. 122.

Hier wird aus der Spirale die Doppelspirale

$$^{e}lg\left(\frac{p}{q}\right) - (\varphi - \chi)\cot\alpha = {}^{e}lg\left(\frac{p_1}{q_1}\right)$$

bezw.

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{q_1}{p_1} = e^{(\varphi - \chi)\cot\alpha}$$

oder

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p_1}{q_1} \cdot e^{(\varphi - \chi)\cot\alpha}.$$

Läfst man X_1 die Wertfolge $0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots$ annehmen, so erhält man eine Parallelenschar von gleichen Abständen, läfst man $^{e}lg\, r_1$ diese Wertfolge annehmen, so erhält man eine Spiralenschar von gleichen Winkelabständen, läfst man den Ausdruck $^{e}lg\,\frac{p_1}{q_1}$ diese Wertfolge annehmen, so erhält man eine isothermische Schar von logarithmischen Doppelspiralen. Die variabelen Ausdrücke $\left(\frac{p}{q}\right)$ und $(\varphi - \chi)$ sind dabei die Bicirkularkoordinaten. Die Gleichung der Orthogonalschar geht ebenso aus der der orthogonalen Geradenschar hervor. Diese Bemerkungen sollen nur zeigen, wie elementar diese Kurven auch analytisch behandelt werden können.

Die logarithmische Spirale hatte folgende Eigenschaft: Nimmt der Neigungswinkel des Radius vector in arithmetischer Reihe zu, so nimmt seine Länge in geometrischer Reihe zu (oder ab).

Daraus entspringt als Haupteigenschaft der Bicircularspirale folgendes:

Nimmt die Differenz $\varphi - \chi$ der Neigungswinkel der beiden Radii vectores in arithmetischer Reihe zu, so nimmt das Verhältnis der Längen der Radii vectores in geometrischer Reihe zu (oder ab).

In Figur 122 sind zwei Scharen solcher Kurven, welche die Ebene in ein System von „Quadraten“ einteilen, dargestellt. Dabei ist der Fall gewählt, dafs die beiden Kreis-

scharen unter Winkel geschnitten werden, die sich durch $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ und $\tan(90^{\circ} + \alpha) = -\frac{2}{1}$ ergeben.

Die Mittelpunkte der acht Kreise des Büschels sind M, M_1, M_2, M_3, M_{-1}, M_{-2}, M_{-3} und M_{∞}. Will man weitere Kreise einschalten, so wähle man die übrigen Kreisschnitte derselben Achse als Mittelpunkte. Die Mittelpunkte der Kreisschar ergeben sich, sobald man einen hat. Dieser eine kann durch eine Berechnung mit Hilfe des natürlichen Logarithmus gefunden werden. (Mit Annäherung findet man ihn mit Hilfe des bei M in den Meridianstreif eingetragenen Berührungskreises und zwar um so genauer, je mehr Büschelkreise man gezeichnet hat. Absolut genau ist die Konstruktion nur für unendliche Kleinheit des Kreises.) Man erhält so ein kleines „Quadrat“ (z. B. mit Hilfe einer Horizontalen) $ABMC$. Die Tangente in A giebt den Mittelpunkt m_1 und symmetrisch m_{-1}. [Man kann auch die Quadrat-Einteilung mittels Strahlenbüschel und konzentrischer Kreisschar benutzen und die Figur mittels der Inversion in die neue Form umgestalten. Auch kann man diese durch stereographische Projektion aus der quadratischen Einteilung der Kugel durch Meridiane und Parallelkreise erhalten.] Die Gerade $M_3 m_1$ giebt den Punkt D auf dem Kreise M_2. Die Tangente in M_2 giebt den Mittelpunkt m_2 und symmetrisch m_{-2}. Die Gerade Em_1 giebt auf dem Kreise M_3 den Punkt F, die Tangente in F giebt den Mittelpunkt m_3 und symmetrisch m_{-3}. Die Gerade Gm_1 giebt H, die Tangente in H würde m_4 geben, und so kann man mit J u. s. w. fortfahren bis ins Unendliche.

Man kann die beiden Scharen von Diagonalkurven in die Quadrate einzeichnen, was die Bicirkularspiralen zu $+45^{\circ}$ giebt. Die beiden Scharen sind dann kongruent. Um nicht kongruente Scharen zu erhalten, kann man, wie es in der Figur geschehen ist, die Diagonalen von Doppelquadraten (oder anderen Rechtecken) wählen.*)

*) Eine interessante Eigenschaft ist noch folgende: Legt man an eine Schar von Bicircularspiralen parallele Tangenten, so liegen deren Berührungspunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel. Für alle Arten von Tangentenrichtungen erhält man ein Büschel solcher Hyperbeln durch die Büschelpunkte. Die Orthogonalschar von Lemniskaten sendet jedes Individuum durch gleich grofse Quadrate der Einteilung.

§ 242) Weitere Eigenschaften der Bicirkularspiralen. Sämtliche logarithmischen Spiralen derselben Schar sind kongruent, demnach lassen sich sämtliche Bicircularspiralen einer Schar durch Inversion aus einer einzigen logarithmischen Spirale ableiten. Die Bicirkularspiralen einer Schar sind also unter sich kreisverwandt (oder inversionsverwandt). Zu jeder giebt es im allgemeinen eine symmetrische kongruente innerhalb der Schar. Nur die durch den Mittelpunkt der Büschelsehne gehenden sind nur einmal vorhanden, ebenso die durch den unendlich fernen Punkt gehenden, die also Asymptoten haben. Kurven, die eine Schar dieser Art unter konstantem Winkel durchsetzen, sind wiederum Bicirkularspiralen, im Sonderfalle Kreisbüschel oder Kreisschar. Jede Doppelspirale macht um jeden Büschelpunkt unendlich viele Windungen, jedoch um beide in entgegengesetztem Sinne. Gleichwinklige Kurven dieser Art schneiden einander nicht. Inversion mittels eines Kreises des Büschels oder der Schar verwandelt die Doppelspirale in eine das Kreisbüschel unter entgegengesetztem Winkel schneidende Doppelspirale. Beliebige Inversion verwandelt die Schar von Doppelspiralen wieder in eine solche, jedoch ein anderes Kreisbüschel schneidende. Durch Inversion von einem Büschelpunkte aus entstehen Systeme logarithmischer Spiralen.

Jeder Krümmungskreis einer logarithmischen Doppelspirale berührt und schneidet sie zugleich im Berührungspunkte, trifft sie aber nie wieder, so dafs er den einen Teil der Kurve einschliefst, den andern Teil ausschliefst. Durch jeden Punkt der Ebene geht ein und nur ein Krümmungskreis der Kurve. Zwei solcher Krümmungskreise schneiden einander nie, nur unendlich benachbarte berühren einander auf der Doppelspirale selbst, welche die Schar umhüllt, jeder also umschliefst sämtliche Windungen des von ihm eingeschlossenen Kurventeils, wird aber von allen des andern Teils umschlossen oder ausgeschlossen. Den Grenzfall bildet der zur Geraden ausartende Krümmungskreis, der dem Wendepunkte der Kurven entspricht. Daher kann auch jede Doppelspirale nur einen einzigen Wendepunkt haben. Nach § 212 liegen alle Wendepunkte einer solchen Schar auf einer geraden Linie, der einen Asymptote. Die Evolute einer logarithmischen Doppelspirale ist das

Inversionsbild einer Kurve, die man folgendermafsen leicht erhält. Man zeichne zu einer gewöhnlichen logarithmischen Spirale diejenigen Orthogonalkreise, die durch einen gegebenen Punkt P gehen. Diese Kreise umhüllen eine Kurve. Macht man nun P zum Inversionscentrum, so wird die Umhüllende der Kreise in die Evolute der entsprechenden Doppelspirale verwandelt.

In den Streifen zwischen zwei Doppelspiralen einer Schar läfst sich eine Reihe von Berührungskreisen einbeschreiben, die einander paarweise berühren. Diese Berührungspunkte liegen auf einer Doppelspirale derselben Schar, welche den Streifen isothermisch halbiert. Die Kurven selbst sind stereographische Projektionen von Kugelloxodromen, geben also die Darstellung der Loxodromen auf den Karten der östlichen und westlichen Halbkugelkarte.

§ 243) Das Inversionsbild der logarithmischen Spiralröhrenfläche für beliebige Punkte ihrer Symmetrieebene. Die beiden Grenzspiralen verwandeln sich in Bicirkularspiralen, die der Fläche einbeschriebenen Kugeln gehen in Kugeln über, welche die dem Streif zwischen diesen beiden Kurven einbeschriebenen Kreise zu Hauptkreisen haben. Berühren einander solche Kugeln, so geschieht es auf einer den Streif isothermisch halbierenden Doppelspirale. Die umhüllende Fläche aller Kugeln ist das gesuchte Inversionsbild der logarithmischen Spiralröhrenfläche. Die Fläche hat eine Symmetriebene. Die Kreisschnitte der ursprünglichen Fläche verwandeln sich wiederum in Kreisschnitte, die senkrecht zur Symmetrieebene stehen. Sie sind Krümmungslinien der Fläche. Die zu ihnen orthogonale Kurvenschar der Fläche giebt deren Krümmungslinien zweiter Art. Jede Krümmungscyklide der ursprünglichen Fläche geht über in eine Krümmungscyklide der neuen Fläche. Das Gaufssche Krümmungsmafs der Fläche in jedem Punkte entspricht dem Krümmungsmafse der betreffenden Cyklide in demselben Punkte.

(Die Mittelpunkte der einbeschriebenen Kugeln der ersten Fläche gehen nicht in die Mittelpunkte der der zweiten Fläche einbeschriebenen Kugeln über, der neue Mittelpunktsweg ist also keine Bicirkularspirale.)

Auf der logarithmischen Spiralröhrenfläche befanden sich Kurven „Bewegungskurven“, welche Loxodromen senk-

rechter Kreiskegel oder auch senkrechter Cylinder mit logarithmischer Spirale als Grundlinie waren. Diese Kreiskegel gehen in eine Art von Dupinschen Cykliden mit zwei Knotenpunkten und zwei Wulsten über, die Loxodromen aber bleiben Loxodromen. Die Entstehung der neuen Röhrenfläche läfst sich daher dahin definieren, dafs eine Kugel von veränderlichem Radius sich so bewegt, dafs sie beide Wulste berührt und die Berührungspunkte auf den Wulsten Loxodromen zurücklegen. Man kann sie bezeichnen als die Röhrenfläche der Bicirkularspiralen oder der logarithmischen Doppelspiralen.

Auch die Cylinder mit spiralischer Basis gehen in eigentümlich gestaltete Flächen über. Diese werden gebildet von Kreisen, die auf der Symmetrieebene senkrecht stehen, durch das Inversionscentrum gehen und aufserdem durch die Punkte der aus jeder spiralischen Basis entstehenden Doppelspirale. Die Loxodrome der Cylinder werden Kurven, welche die Kreise der neuen Flächen unter konstantem Winkel schneiden.

§ 244) Liegt das gewählte Inversionscentrum und der spiegelnde Kreis ganz aufserhalb der Spiralröhrenfläche, so wird deren Inversionsbild eine Röhrenfläche, die ganz innerhalb der Kugel liegt und nur innerliche Berührungskugeln von nur endlicher Gröfse besitzt.

Liegt die Inversionskugel ganz innerhalb der Röhrenfläche, so wird das neue Gebilde ebenfalls ganz von der Kugel umschlossen und dabei treten eigentümliche Änderungen ein. Um diese zu übersehen, wähle man eine der Berührungskugeln, z. B. M_0 zur abbildenden Kugel. Der Berührungskreis bleibt dann ungeändert, so dafs längs desselben die neue Röhrenfläche von der nun äufseren Kugel berührt wird. Die beiden durch M_0 gehenden Berührungskugeln verwandeln sich in Ebenen, welche die neue Fläche längs zweier Kreise berühren. Diese Lage des Inversionscentrums ist aber nur ein besonderer Fall. Hier sollen allgemeinere Fälle gewählt werden.

Demnach giebt es zwischen zwei gleichwinkligen Bicirkularspiralen zwei Haupttypen von Röhrenflächen dieser Art, die sich am besten an zwei zusammengehörigen Skizzen erläutern.

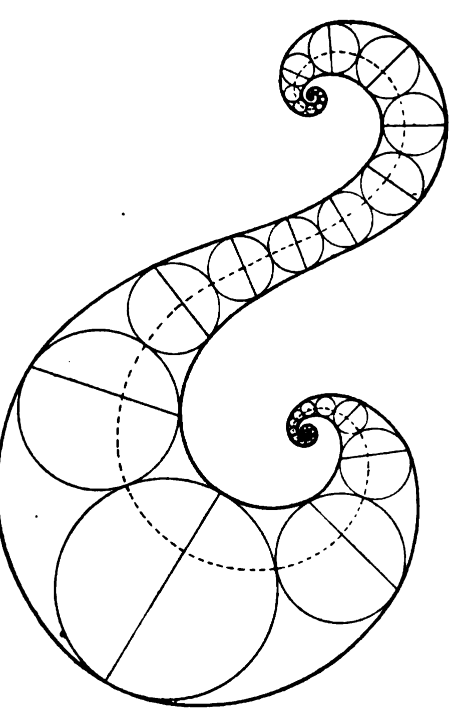


Fig. 123.

§ 245) Figur 123 stellt den ersten Typus dar, bei dem alle Berührungskugeln im Endlichen verlaufen. Die Berührungskreise der beiden ebenen Bicirkularspiralen befinden sich in der endlichen Innenfläche zwischen beiden Kurven. Jede der Berührungssehnen ist Projektion eines Kreises, den man auf einem Holzmodell der Symmetrieebene durch halbkreisförmige Drahtbügel darstellen kann, die senkrecht auf der Ebene stehen.

§ 246) Figur 124 stellt den zweiten Typus dar, bei dem zwei der Berührungskugeln unendlich grofs sind, so dafs die bis ins Unendliche reichende Aufsenfläche des vorigen Innenstreifens von den Berührungskreisen erfüllt wird. Während jedoch die Kugeln bis zu unendlicher Gröfse zunehmen, verläuft trotzdem die Fläche im Endlichen, sie ist eben nur in den ebenen Grenzspiralen mit der vorigen identisch. Die Grenzspiralen sind aber bei beiden mit ganz verschiedenen Kreisen versehen, die, senkrecht auf der Symmetrieebene stehend, von Kurve nach

Kurve gehen, das eine Mal als Projektionen Querlinien der Innenfläche, das andere Mal solche der Aufsenfläche gebend. Auch hier kann man die durch gerade Linien dargestellten Kreise durch halbkreisförmige Drahtbügel veranschaulichen.

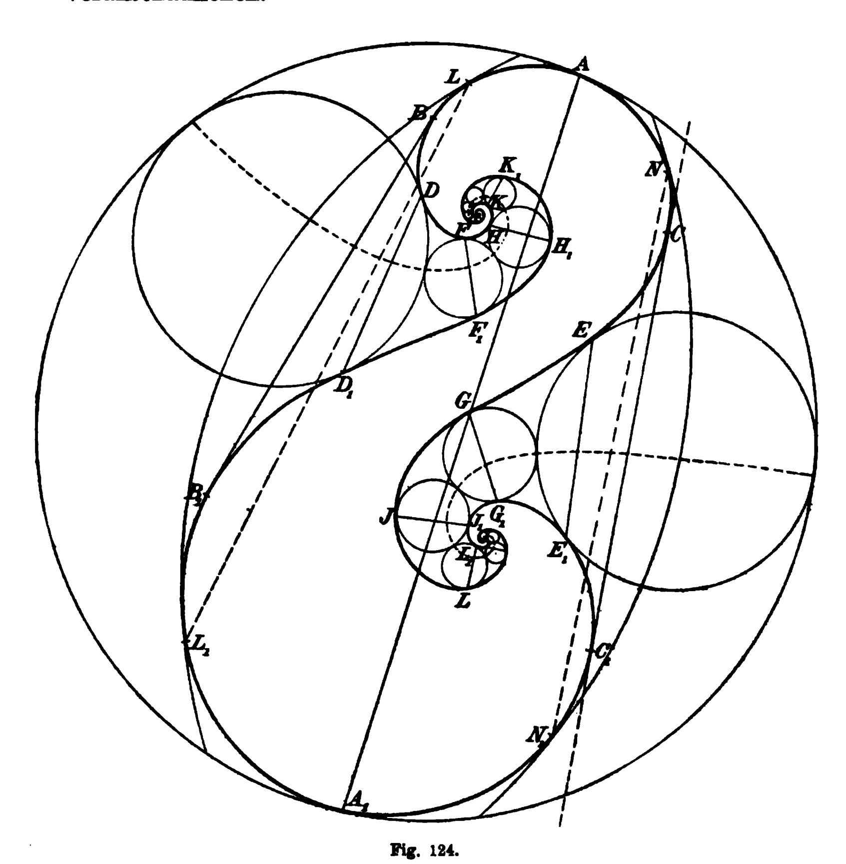


Fig. 124.

§ 247) Ein Zwischentypus, bei dem jeder der beiden ebenen Streifen ins Unendliche reicht, also jeder als innerer oder äufserer aufgefafst werden kann, ist durch Figur 125 dargestellt. Bei letzterem ist ein auf einer der Grenzspiralen der ursprünglichen Fläche gelegener Punkt zum Inversions-

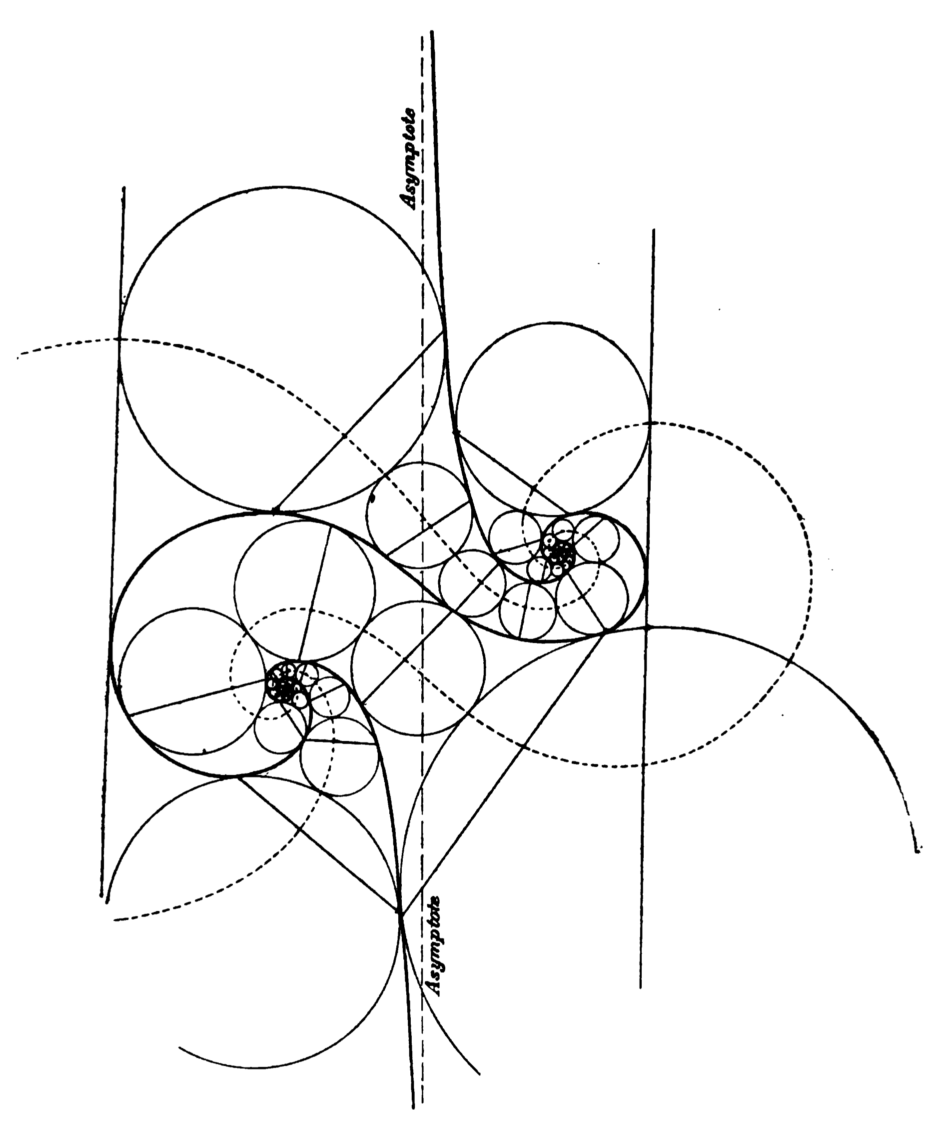


Fig. 125.

punkt gemacht worden. Eine der Krümmungscykliden gehört bei diesem Typus der ins Unendliche reichenden Art an, die schon in Band I bei Figur 245 und 246 behandelt worden ist. Beide Streifen sind hier offen und mit Berührungskreisen angefüllt. Dadurch sind zwei Röhrenflächen dargestellt. Wo die (geradlinigen) unendlich grofsen Kreise berühren, sind statt der Drahtbügel einfache Lothe zu errichten.

§ 248) Bemerkungen. Naturgemäfs läfs sich auch beim gewöhnlichen Spiralstreif nicht nur die Innenfläche, sondern auch die Aufsenfläche mit Berührungskreisen versehen, so dafs auch dort zwei Spiralröhrenflächen möglich sind, welche dieselben Grenzspiralen haben. Werden beide zugleich von einem beliebigen Punkte der Symmetrieebene aus der Inversion unterworfen, so wird die eine der Flächen in den ersten, die andere in den zweiten Typus verwandelt. Nur wenn der Inversionspunkt auf einer Grenzspirale liegt, nimmt jede der beiden Flächen die Form eines Zwischentypus an.

Zu Figur 124 sei noch folgendes bemerkt: Eine der Berührungssehnen, AA_1, ist die gröfste von allen. Ihr Kreis entspricht bei der Inversion mittels des Kreises M_0 dem Kreisschnitte $A_0 C_0$. Die gemeinschaftlichen Tangenten BB_1 und CC_1 stellen die Berührungskreise der ins Unendliche reichenden Kugeln (Ebenen) dar. Sie entsprechen bei der obigen Inversion den beiden durch M_0 gehenden Kugeln. Die Berührungskreise DD_1 und EE_1 der Grenzkurven und der gezeichneten äufseren Berührungskugel entsprechen den beiden Nachbarkugeln von M_0. Aufserhalb DD_1 und EE_1 schwellen die Kugeln bis ins Unendliche an und ragen über die gezeichnete Kugel hinaus, innerhalb DD_1 und EE_1 verlaufen die Kugeln innerhalb der gezeichneten äufseren Kugel.

Die durch die obige Bewegung der Kugel charakterisierte Entstehung dieser Flächen giebt auch die Entstehung der Bewegungskurven an. Auch hier bilden diese mit ihren Orthogonalkurven isothermische Kurvensysteme, welche auch die Konstruktion der Loxodromen und die konforme Abbildung auf den Parallelstreif ermöglichen.

§ 249) Aufgabe. Gegeben seien zwei Bicirkularspiralen aus derselben Schar. Die beiden zu ihnen

gehörigen Röhrenflächen sollen in Grund- und Aufrifs gezeichnet werden, und zwar soll die Fläche durch die Kreisschnitte in inversionsverwandte Streifen eingeteilt werden. Die Bewegungskurven dagegen sollen sich der isothermischen Einteilung einer Krümmungscyklide anschliefsen.

Wo es der transscendente Charakter der Aufgaben erfordert, sind die Konstruktionen nach den oben angewandten Annäherungsmethoden zu geben.

§ 250) Aufgabe. Aus jeder rein geometrischen Eigenschaft der logarithmischen Spiralröhrenfläche soll eine solche ihres Inversionsbildes (mit Symmetrieebene) abgeleitet werden.

Man versuche dabei, mit Hilfe der Bicirkularkoordinaten auch einiges von metrischen Beziehungen abzuleiten. Bei dieser Gelegenheit lassen sich auch Sätze der allgemeinen Lehre von den Raumkurven spezialisieren.

§ 251) Inversion der logarithmischen Spiralröhrenfläche von einem Punkte des Lotes aus, welches sich im Centrum M auf der Symmetrieebene errichten läfst.

Da der Inversionspunkt aufserhalb der beiden zwischen den Grenzspiralen möglichen Flächen dieser Art liegt, ist nur ein Typus zu erwarten. Die Symmetrieebene verwandelt sich in eine Kugel. An Stelle der Symmetrie tritt Inversionsverwandtschaft zwischen dem äufseren und inneren Teile der zu konstruierenden Fläche. Die Grenzspiralen verwandeln sich in gewöhnliche Loxodromen der Kugel. Ihre Polpunkte liegen auf einem Durchmesser der Kugel. Die Berührungskreise des Spiralstreifens gehen über in Kreise auf der Kugel, welche in einem der beiden loxodromischen Streifen liegen. Durch diese Kreise sind Kugeln zu legen, welche die Kugelfläche orthogonal schneiden. Auf jeder dieser Kugeln befindet sich ein Berührungskreis (Kreisschnitt) der gesuchten Fläche. Im Modell kann man diese Kreislinien für den äufseren Teil der gesuchten Fläche durch Drahtbügel darstellen, die kreisförmig gebogen sind und die Kugelfläche dort orthogonal durchstofsen, wo die einbeschriebenen Kreise die Grenzloxodromen berühren. Die gröfsten dieser Bügel befinden sich in der Nähe des „Äquators". (Im be-

sonderen Falle können die Berührungspunkte, in denen sie die Kugel durchstofsen, um *180°* von einander entfernt sein, dann wird der Bügel unendlich grofs, d. h. ein bis ins Unendliche reichender Durchmesser der Kugel.) Das Innere der Bügel ist die Fortsetzung der Kreise durch das Innere der Kugel. (In jenem besonderen Falle reicht also die Fläche bis in den Mittelpunkt der Kugel.)

Die Mittelpunkte der Berührungskugeln selbst können folgendermafsen bestimmt werden. Zu jedem umbeschriebenen Kreise des Loxodromenstreifens gehört ein Tangentenkegel, dessen Spitze den Mittelpunkt der Berührungskugel giebt. Die verbindende Kurve aller dieser Spitzen ist der Mittelpunktsweg der veränderlichen Berührungskugel. Dieser ist jedoch keine Kugelloxodrome.

Die Umhüllende der so vollständig bestimmten Kugelreihe kann als die **Röhrenfläche** der (gewöhnlichen) **Kugelloxodromen** bezeichnet werden.

Sie besitzt die oben besprochenen Bügel als Kreisschnitte, die als Krümmungslinien erster Art zu betrachten sind, während deren auf der Fläche liegende Orthogonalkurven die Krümmungslinien zweiter Art sind. Jede Krümmungscyklide ist wieder in eine solche übergegangen, und daher sind die Krümmungsradien der Krümmungslinien zweiter Art und das Gaufssche Krümmungsmafs der Fläche für jeden Punkt bekannt. Die Bewegungskurven der ursprünglichen Fläche sind in die entsprechenden der neuen Fläche übergegangen. Jede schneidet die Kreisschnitte unter konstantem Winkel. Sie sind zugleich Loxodromen derjenigen Cykliden, in welche die Kegel, deren Loxodromen sie ursprünglich waren, übergegangen sind; zugleich sind sie Loxodromen der Flächen, in welche die Cylinder der logarithmischen Spiralen verwandelt worden sind, deren Loxodromen sie ursprünglich waren. Die logarithmischen Spiralen dieser Cylinder, die auf der Symmetrieebene liegen, sind in Loxodromen der obigen Schar übergegangen, die Cylindergeraden in Kreise, welche in den Punkten der letzteren normal durch die Kugelfläche gehen, aufserdem normal durch das auf der Kugel liegende Inversionscentrum. Dadurch sind die Bewegungskurven der loxodromischen Röhrenfläche geo-

metrisch bestimmt. Sie sind eine Isothermenschar, die mit ihrer Orthogonalschar eine Einteilung in kleine Quadrate, die Konstruktion der Flächenloxodromen und die konforme Abbildung auf jedem unendlichen Parallelstreif der Ebene ermöglicht.

§ 252) Aufgabe. Zu jeder geometrischen Eigenschaft der logarithmischen Spiralröhrenfläche soll die entsprechende der loxodromischen Röhrenfläche ausgesprochen werden. Die letztere Fläche soll im Grund- und Aufrifs korrekt (zum Teil mit beliebiger Annäherung) gezeichnet werden. Die wichtigsten der besprochenen Kurvenscharen sind dabei zu berücksichtigen.

§ 253) Inversion der logarithmischen Spiralröhrenfläche von einem beliebigen Raumpunkte aus.

Die Grenzspiralen verwandeln sich in zwei verallgemeinerte Loxodromen der Kugel, deren Pole nun nicht mehr einem Durchmesser angehören, sondern beliebige Lage auf der aus der Symmetrieebene entstandenen Kugel erhalten. Die Symmetrie geht wieder in Inversionsverwandtschaft zwischen dem äufseren und inneren Teile über. Hier sind wieder zwei Hauptfälle und ein vermittelnder Zwischenfall zu unterscheiden.

a) Liegt das Inversionscentrum aufserhalb der gegebenen Röhrenfläche, so bleiben alle Berührungskugeln endlich und bleiben innere Berührungskugeln der neuen Fläche, die ebenfalls ganz im Endlichen verläuft und im wesentlichen dieselben Eigenschaften hat, wie die vorige.

b) Liegt das Inversionscentrum innerhalb der gegebenen Röhrenfläche, so werden alle Berührungskugeln zu äufseren. Die Unterschiede dieses Falles gegen den Fall a) entsprechen etwa denen der Figuren 123 und 124. Die Fläche verläuft ganz im Endlichen. Die beiden durch das Inversionscentrum gehenden Berührungskugeln verwandeln sich in Ebenen, welche die Fläche längs zweier Kreise berühren.

c) Liegt das Inversionscentrum auf der gegebenen Röhrenfläche, so tritt ein Zwischenfall ein.

Die in diesem Centrum liegende Berührungskugel verwandelt sich in eine Ebene, der entsprechende Berührungskreis in eine Gerade. Beide reichen, wie die neue Fläche, bis ins Unendliche, und zwar berührt die Ebene die Fläche längs dieser ganzen Geraden. Eine zweite sie in dieser Weise berührende Ebene ist nicht vorhanden.

Für die Anschauung ist es am bequemsten, den Oberflächenpunkt H_0 der Figur 120 als Inversionscentrum, den Abstand von H_0 bis zur Symmetrieebene als Inversionsradius zu nehmen. Die Symmetrieebene wird dann zu einer Kugel durch H_0 und den Fuſspunkt des Abstandslotes. Die Berührungskugel durch H_0 und der Berührungskreis verwandeln sich in Ebene und Gerade. Weil des letzteren Durchmesser das Doppelte vom Abstandslote ist, gehen diese Gerade und die Ebene durch den Mittelpunkt der erstgenannten Kugel. Von der einen zur anderen Loxodrome gehen die orthogonalen kreisförmigen Bügel, von denen einer zur Geraden wird, so daſs die Punkte A_0 und C_0 zu Diametralpunkten werden.

Damit sind alle drei Flächen erledigt. Die so entstandenen Flächen können als die Röhrenflächen der verallgemeinerten Kugelloxodromen bezeichnet werden.

Wesentlich Neues ist über diese Flächen, die ebenfalls Kreisschnitte und deren Orthogonalkurven zu Krümmungslinien haben und Krümmungscykliden besitzen, nicht zu sagen. Die Mittelpunkte der Berührungskugeln liegen wieder in den Spitzen von Tangentenkegeln der Berührungskreise. (Von diesen Tangentenkegeln wird aber bei c) einer zum Cylinder, so daſs die Spitze im Unendlichen liegt.) Die aufeinander folgenden Kugeln der Berührungsreihe berühren einander paarweise in den Punkten der isothermisch halbierenden Loxodrome. Jede der „Bewegungskurven“ schneidet sämtliche Kreisschnitte unter einem bestimmten konstanten Winkel. Ihre Schar ist eine Isothermenschar, ebenso die orthogonale Kurvenschar. Konstruktion der Loxodromen der neuen Flächen und Abbildbarkeit auf dem unendlichen ebenen Parallelstreif liegen auf der Hand.

Diese neuen Flächen sind die allgemeinsten unter den Inversionsverwandten der loga-

rithmischen Spiralröhrenflächen, die nun eine in sich geschlossene Gruppe bilden. Jede dieser Flächen ist gegen eine bestimmte Kugel*) zu sich selbst reciprok, läfst also eine Transformation in sich selbst zu. Jede um einen der Pole gelegte Kugel, welche die Fläche schneidet, teilt diese in zwei kreisverwandte Teile, die im besonderen Falle symmetrisch gegen einander sind.

§ 254) Aufgabe a) Zu jeder geometrischen Eigenschaft der logarithmischen Spiralröhrenfläche soll die entsprechende der allgemeinsten kugelloxodromischen Röhrenfläche angegeben werden.

Aufgabe b) Eine der allgemeinsten kugelloxodromischen Röhrenflächen soll in Grund- und Aufrifs mit den wichtigsten Kurvenscharen gezeichnet werden.

Aufgabe c) Der Sonderfall der spiraloidischen Kugelschar, die statt von der Spiralröhrenfläche nur von einer logarithmischen Spirale umhüllt wird, soll durch Inversion von einem beliebigen Raumpunkte aus behandelt werden. Die Eigenschaften der neuen Kugelschar sind dabei zu untersuchen.

γ) Bemerkungen über sonstige Röhrenflächen.

§ 255) Die Röhrenflächen der Loxodromen des Drehungskegels. Man lasse eine veränderliche Kugel sich so bewegen, dafs ihr Mittelpunkt auf einer Kegelloxodrome wandert, ihr Radius aber zu dem Abstande von der Kegelspitze oder zu dem von der Achse des Kegels in konstantem Verhältnis bleibt. Die Umhüllende der Kugel in allen Lagen ist die gesuchte Fläche.

Oder: Eine veränderliche Kugel bewege sich so, dafs ihr Mittelpunkt auf dem senkrechten Cylinder einer logarithmischen Spirale wandert, und zwar auf einer Schraubenlinie (Loxodrome) desselben, während der Radius der Kugel zu dem Abstande von der Achse stets in demselben Verhältnis bleibt. Die Umhüllende ist die gesuchte Fläche.

*) Diese entspricht der Symmetrieebene der ursprünglichen Röhrenfläche.

Oder: Eine veränderliche Kugel bewege sich so, dafs sie stets eine logarithmische Spiralröhrenfläche längs einer ihrer „Bewegungskurven“ berührt, wobei ihr Radius zum Abstande des Berührungspunktes vom Centrum der Spiralröhrenfläche (oder von deren Achse) stets dasselbe Verhältnis behält, u. s. w.

Oder: Eine veränderliche Kugel bewege sich so, dafs sie stets zwei zu zwei Paaren logarithmischer Spiralen derselben Schar gehörige Röhrenflächen berührt, und zwar eine davon auf einer ihrer „Bewegungskurven“, u. s. w.

Oder: Eine veränderliche Kugel bewege sich zwischen den Mänteln zweier Kegel, sie stets berührend, so, dafs die Berührungspunkte mit beiden Mänteln längs zweier Kegelloxodromen wandern, u. s. w.

Schon die fünf genannten Entstehungsweisen deuten auf interessante Eigenschaften dieser Flächen, die ebenfalls Krümmungscykliden besitzen, hin. Ihre Kreisschnitte nebst Orthogonalschar sind wieder Krümmungslinien, die Bewegungskurven sind wieder Isothermen, u. s. w. Die Flächen stehen zur logarithmischen Spiralröhrenfläche in einer ähnlichen Beziehung, wie die Schraubenröhrenfläche zur Drehungscyklide. Sie enthalten daher die Spiralröhrenflächen als besonderen Fall. Sie lassen sich ebenso, wie diese, der Inversion von einem beliebigen Raumpunkte aus unterwerfen, der eine ganze Reihe besonderer Lagen einnehmen kann (z. B. aufserhalb, innerhalb, auf der Fläche, aufserhalb, innerhalb, auf dem Kegel, in dessen Spitze, in Punkten seiner Achse, u. s. w.)

Diese neue Gruppe von Flächen enthält die ganze Gruppe der Inversionsverwandten der logarithmischen Spiralflächen als besonderen Fall in sich, besitzt ganz entsprechende Eigenschaften und eine ganze Reihe von besonderen Formen.

Ihre Untersuchung wird als Aufgabe gestellt, die zur Übung des Anschauungsvermögens zweckmäfsig ist. Unter anderem soll untersucht werden, ob jede der aufgeschnitten

zu denkenden neuen Flächen sich in eine Fläche verbiegen läfst, deren Bewegungskurven logarithmische Spiralen sind.

Bei der Röhrenfläche der Kegelloxodrome ist zu beachten, dafs der Mittelpunkt der Kugel und ebenso sämtliche Punkte der Kreisschnitte der Fläche sich auf Kegelloxodromen bewegen, was bei den transformierten Flächen nicht mehr der Fall ist.

§ 256) Man kann auch die Röhrenflächen der Loxodromen von beliebigen Umdrehungsflächen untersuchen, die dadurch entstehen, dafs der Mittelpunkt einer unveränderlichen Kugel auf einer solchen Loxodrome wandert, wobei ihr Radius zu dem Abstande von der Achse des Drehungskörpers in konstantem Verhältnis bleiben soll.

Die auf diesem Wege aus der Kugelloxodrome entstehenden Flächen sind nicht mit den oben behandelten zu verwechseln, bei denen der Mittelpunkt der bewegten Kugel auf ganz anderer Kurve wanderte. Ihre Eigenschaften sind nicht so interessant, wie die der letzteren Flächen.

Dafs sich aus sämtlichen Röhrenflächen durch Inversion, Dualität, Affinität und Kollineation neue Flächen ableiten lassen, die zum Teil auch als Röhrenflächen mit ähnlichen Schnitten, z. B. elliptischen Schnitten, zu betrachten sind, ist selbstverständlich, scheint aber nicht von wissenschaftlicher Bedeutung zu sein.*)

---

*) Es sei ausdrücklich betont, dafs es sich bei solchen Erweiterungsversuchen nur um Übungen und Beispiele handelt. Mit Recht, wenn auch mit Schärfe, sagt Steiner in der „Systematischen Entwickelung“, Werke, Seite 420, bei ähnlicher Gelegenheit: „Wollte man jedoch diese Umwandlungen weiter wiederholen, so würden sie ins Langweilige führen, sie würden nichts wesentlich Neues enthalten, mithin weniger wichtig sein, als die einfachen Elementarsätze, aus welchen sie hergeleitet, und von welchen sie im Grunde nur als Karikaturen erscheinen.“ Auch das Wort „travestieren“ wird von Steiner gebraucht.

Poncelet spricht im Traité, II. S. 422 in ähnlicher Weise gegen die Überschätzung der Dualitäts-Transformationen, die, wie er sagte, aus gewissen Äufserungen von Chasles in dessen „Aperçu historique“, Seite 268, hervorleuchtet.

Das Beispiel der Inversionsverwandten der logarithmischen Spiralröhrenfläche ist aber nach den verschiedensten Richtungen hin ein derartig instruktives und die räumliche Anschauung übende, dafs es von solchen Urteilen in keiner Hinsicht getroffen werden könnte.

Weitere Übungen lassen sich im Anschlufs an obige Betrachtungen in dem Sinne anstellen, dafs man z. B. nicht nur den Mittelpunkt einer einzelnen Kugel sich auf logarithmischer Spirale bewegt, sondern irgend eine Kugelschar derart bewegt, dafs jeder Punkt auf logarithmischer Spirale oder Kegelloxodrome im obigen Sinne wandert. Die Kugelschar kann eine konzentrische sein, so dafs die Kreisschnitte der entstehenden Flächen konzentrische Kreise geben, oder eine Berührungsschar, so dafs z. B. alle Kugeln einander in Centrum der Schar von Spiralen berühren, oder auch derart, dafs die Kreisschnitte Steinersche Kreischaren bezw. Kreisbüschel geben. Einige solche Fälle dürften Übungsbeispiele zur Potentialtheorie geben, die auf transscendentem Gebiete liegen. Durch Drehung der Doppelspiralen der Fig. 122 um die senkrechte oder horizontale Gerade der Figur oder um eine sonstige Mittelpunktsachse entstehen Drehungsflächen von interessanten Eigenschaften. Mit Hilfe von Meridianebenen geben sie orthogonale Einteilungen des Raumes. Ähnliches gilt von den logarithmischen Spiralen. Die Schnittwinkel $\pm 45^0$ geben die schönsten Beispiele.

§ 257) Bemerkungen über ein Beispiel der Maschinentechnik. Man verdankt dem Maschinenbau eine Reihe vom Raumgebilden, deren mathematisch exakte

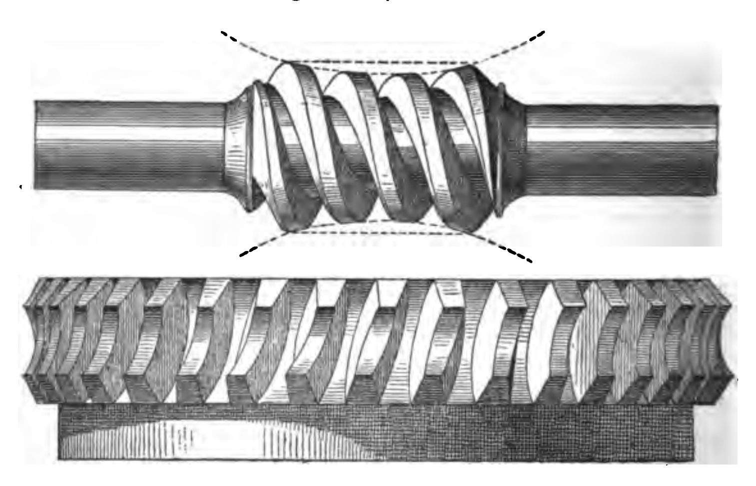


Fig. 126.

Konstruktion zu den schönsten Übungen im stereometrischen Zeichnen führt. Das hier zu Behandelnde gehört in gewissem Sinne hierher. Es handelt sich in Figur 127 um die blofse Skizze eines Globoidschneckenantriebs. Die strenge Konstruktion sei als Übungsaufgabe gestellt, bei deren Lösung auch auf folgendes zu achten ist. Man hat, um die Leistungsfähigkeit des Getriebes zu verstärken und die Abnutzung zu vermindern und den Totgang zu vermeiden, die Absicht gehabt, stets sämtliche Windungen mit den schräg stehenden Zähnen des Schneckenrades in Berührung zu haben. Zu diesem Zwecke war es nötig, das Gewinde nicht cylindrisch zu begrenzen, sondern durch eine Drehungscyklide (die hier als Globoid bezeichnet worden ist). Der Kreis dieser Cyklide pafst sich an den entsprechenden des Schneckenrades an. Er ist an der Skizze der Schnecke zu erkennen. Dasselbe gilt von dem Kernkörper des Gebildes, der ebenso durch Kreise (Cykliden) von bestimmter Gröfse zu begrenzen ist. Die begrenzenden Schraubenlinien verlaufen also auf Cykliden, nicht auf Cylindern. — Die Zähne des Schraubenrades sind nicht, wie bei dem gewöhnlicher Konstruktion, cylindrisch, sondern ebenfalls cyklidisch begrenzt, damit ein tieferer Eingriff ermöglicht werde. Das Hauptschnittprofil des Schneckengewindes kann ein von geradlinigen Flanken begrenztes sein, wie beim trapezischen Gewinde, dann haben die Zähne des Schneckenrades evolventisches Profil in jeder Normalebene zur Radachse. (Dies entspricht dem aus Zahnstange und Rad bestehenden Getriebe mit Trapez- und Evolventenprofil. Auch andere Fälle sind möglich, z. B. geradlinige Flanke und cyklidische Wölbung bei der Zahnstange, evolventische Wölbung und geradlinige Flanke bei dem Rade.) Dem Leser bleibe es überlassen, die durch die cyklidische Begrenzung entstehenden Abweichungen von dem gewöhnlichen Schneckengetriebe zu untersuchen. Abarten dieser Form sind die „Lorenz-Getriebe“.

Beiläufig sei an dieser Stelle auch der konischen Räder (Winkelräder) mit ihren Verzahnungen gedacht, besonders auch der sogenannten Kammwalzen, die ebenfalls instruktive Beispiele für die darstellende Geometrie abgeben.

δ) Bemerkungen über die Möglichkeit exakter Konstruktionen.

§ 258) Mascheroni hat in der „Geometria del Compasso“ (1797) gezeigt, daſs es möglich ist, alle Konstruktionen der Elementargeometrie mit alleiniger Hilfe des Zirkels durchzuführen. Poncelet und Steiner zeigten in entsprechender Weise, daſs sie lösbar sind mit Hilfe des Lineals und eines festen Kreises. Im allgemeinen versteht man unter elementar durchführbaren Konstruktionen solche, die mit Hilfe von Zirkel und Lineal zu erledigen sind. Die exakte Konstruktion ist dabei nur in der inneren Vorstellung möglich, denn praktisch ist sie mit allerlei Ungenauigkeiten behaftet. Sehr groſs ist der Bereich dieser Konstruktionen nicht, noch geringer der mit dem Lineal allein möglichen. Schon die Aufgaben der Kreisteilung treten im allgemeinen aus dem Bereiche der Elementargeometrie heraus.

Die Alten kannten nur die Kreisteilung für die Zahlen 2, 3, 5 und für die durch Multiplikation mit 2^n aus diesen hervorgehenden, auſserdem noch den abgeleiteten Fall $3 . 5 = 15$ und $2^n . 15$. Erst Gauſs fand, daſs, abgesehen vom Faktor 2^n und sonstigen abgeleiteten Formen, die Kreisteilung genau ausführbar ist für Primzahlen von der Form $2^p + 1$. Glücklicherweise braucht man nur Zahlen von der Form $2^{(2^n)}$ darauf hin zu untersuchen, ob sie Primzahlen sind. Bis jetzt kennt man nur folgende Primzahlen von dieser Form:

$$2^1 + 1 = 3,\ 2^2 + 1 = 5,\ 2^4 + 1 = 17,\ 2^8 + 1 = 257,$$
$$2^{16} + 1 = 65537.$$

Die Reihe deutet ein gewisses Gesetz der Exponenten an, aber Euler fand, daſs die regelmäſsige Reihe der letzteren hier zu Ende ist, denn er zeigte, daſs $2^{32} + 1$ keine Primzahl, sondern durch $2^6 . 10 + 1 = 641$ teilbar ist Auch $2^{(2^6)}$ und $2^{(2^7)}$ geben zu 1 addiert keine Primzahlen. Über $2^{(2^8)} + 1$ ist noch nicht entschieden. Einige auſserhalb der Reihenfolge stehenden Potenzen sind aber behandelt worden Pervouchine fand, daſs $2^{(2^{12})} + 1$ teilbar ist durch $2^{13} . 14 + 1$, daſs $2^{(2^{23})} + 1$ durch $2^{24} . 10 + 1$ teilbar

ist. Weiteres kennt die Wissenschaft bisher noch nicht. Sie weifs nicht, ob die betreffenden Primzahlen mit $2^{16}+1$ überhaupt zu Ende sind, sie weifs nicht, ob eine gröfsere endliche Anzahl vorhanden ist, oder ob die Anzahl unendlich grofs ist.

Bis jetzt weifs man nur, dafs, abgesehen vom Faktor 2^n folgende Teilungen des Kreises mit Zirkel und Lineal durchführbar sind:

3	5	17	257	65537
	3.5	3.17	3.257	3.65537
		5.17	5.257	5.65537
		3.5.17	17.257	17.65537
			3.5.257	257.65537
			3.17.257	3.5.65537
			5.17.257	3.17.65537
			3.5.17.257	3.257.65537
				5.17.65537
				5.257.65537
				17.257.65537
				3.5.17.65537
				3.5.257.65537
				3.17.257.65537
				5.17.257.65537
				3.5.17.257.65537

An Stelle der drei Hauptfälle *3*, *5*, *15* des Altertums sind also *31* getreten, was eine erhebliche Erweiterung bedeutet.

Gaufs selbst hat die geometrische Konstruktion des 17-Ecks durchgeführt, v. Staudt und Schröter haben sie nach Ponçelet-Steiner mit einem festen Kreise und dem Lineal ausgeführt. Nach Mascheronis Methode liegt noch keine Konstruktion vor, obwohl sie möglich ist. Richelot hat das 257-Eck behandelt, Hermes das 65537-Eck untersucht.

Damit ist alles die Kreisteilung betreffende, was die Wissenschaft kennt, erledigt. Für die Maschinentechniker sind aber noch anderweitige Teilungen nötig, also ist er schon hier gezwungen, zu Annäherungskonstruktionen überzugehen. Auch die nicht selten eintretende Dritteilung

des Winkels, die mit Zirkel und Lineal unmöglich ist, zwingt ihn zu solchen.

§ 259) Die Unmöglichkeit, die Zahl π aus der Längeneinheit geometrisch zu konstruieren, macht die Aufgabe, eine Schraubenlinie des Kreiscylinders vom gegebenen Steigungswinkel exakt zu konstruieren, oder für eine in beliebig vielen Punkten exakte konstruierte Schraubenlinie diese Winkel geometrisch darzustellen, zu einer nur mit Annäherung zu lösenden Aufgabe, denn die Abwickelung des Kreiscylinders ist nur angenähert lösbar. Ähnliches gilt von der Zahl e und der wichtigen logarithmischen Linie.

Der Techniker ist also schon bei verhältnismäfsig einfachen Aufgaben gezwungen, zu Annäherungskonstruktionen überzugehen, oder neben Zirkel und Lineal gewisse Kurvenlineale zu benutzen oder Apparate, mit deren Hilfe man auf kinematischem Wege gewisse Kurven mit entsprechender Genauigkeit konstruieren kann. Als solche Kurvenlineale sind z. B. vorzuschlagen die Parabel, die gleichseitige Hyperbel, die logarithmische Linie, die logarithmische Spirale (deren Schablone sich bei den obigen Untersuchungen und Konstruktionen als wichtig erwies), die Sinuslinie, Cykloide und einige andere schon aus dem Altertum bekannte Kurven, mit deren Hilfe man die Dreiteilung des Winkels, die Verdoppelung des Würfels und ähnliche Probleme lösen kann. Das letzte Hilfsmittel bleibt die Berechnung bis auf beliebig viele Dezimalstellen, die dann benutzt wird, mit Hilfe des Mafsstabs die betreffende Gröfse mit möglichster Genauigkeit einzutragen.

Schon die Aufgabe, den elliptischen Cylinder in die Ebene abzuwickeln oder ihn durch Gerade in Streifen von demselben Inhalte einzuteilen, erfordert einen erheblichen Aufwand an Rechnung, da es sich um die Auswertung des betreffenden elliptischen Integrals handelt. Und dies gilt auch von der Konstruktion der Loxodromen (Schraubenlinien) dieses einfachen Cylinders.

Die exakte Konstruktion also beschränkt sich besonders in der Stereometrie auf verhältnismäfsig wenig Fälle. Als geometrische Konstruktionen im weiteren Sinne hat man solche zu betrachten, bei denen man durch eine endliche Anzahl von Konstruktionsakten eine beliebig grosse Genauigkeit

(wenn auch nur in der Vorstellung, nicht in der praktischen Ausführung) erreichen kann. So nimmt man z. B. Kurven, von denen beliebig viele Punkte exakt konstruiert werden können, als konstruierbar im weiteren Sinne an. Hat man z. B. eine der besprochenen quadratischen Einteilungen, die mit beliebiger Genauigkeit beliebig weit fortgesetzt werden kann, gezeichnet, so kann man die isogonalen Trajektorien als konstruiert betrachten.

§ 250) Das Ganze kommt hinaus auf den Begriff der **Differentialgeometrie**, d. h. der auch mit unendlich kleinen Gröfsen arbeitenden Geometrie, die jedoch dahin streben mufs, von der Sprache der Differential- und Integralrechnung möglichst befreit zu werden, so dafs sie ein Recht erhält, als selbständige Wissenschaft dazustehen. Vorläufig ist dies noch nicht der Fall, wie z. B. die Differentialgeometrie von Bianchi zeigt, die von den Mitteln der höheren Analysis unausgesetzten Gebrauch macht. Wie weit man ohne jene höheren Hilfsmittel gelangen kann, läfst sich nicht ohne weiteres übersehen. Dafs aber ein Eindringen in viele Gebiete der Raumgeometrie ohne die Differential- und Integralrechnung ermöglicht werden kann, zeigen vielleicht auch die vorstehenden Untersuchungen und Konstruktionen.

Es handelt sich dabei nicht um ein Überflüssigmachen der höheren Analysis, sondern um das Zukunftsideal eines selbständigen Ausbaues für das System der Raumgeometrie. Hier ist nur mit elementaren Hilfsmitteln gearbeitet worden, und zwar zu dem Zwecke, den Bereich der **Elemente der Stereometrie** nach Möglichkeit zu erweitern. Gerade die darstellende Geometrie scheint berufen zu sein, an dieser Erweiterung mitzuarbeiten. Dies soll aber weniger von der praktischen Ausführung der Zeichnungen gesagt sein, sondern von der geistigen Arbeit mit den idealen Werkzeugen der darstellenden Geometrie auf dem Gebiete der inneren Vorstellung.

ε) Geschichtliches über die in den Kapiteln I bis IV behandelten Raumkurven und Flächen.

§ 261) Die Kettenlinie (catenaria, chaînette) und das mit ihr zusammenhängende Katenoid (dieser Name rührt

von Plateau, dem Urheber der bekannten Versuche her) haben eine förmliche Geschichte hinter sich. Galilei beschäftigte sich damit in den „Gesprächen über Mechanik" (Discorsi e demostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, 1638), und zwar im zweiten derselben. Dabei wird die Kurve von ihm irrtümlich für eine Parabel gehalten. Dies ist nach Cantor II, 698, der einzige wesentliche Irrtum, den man ihm überhaupt vorwerfen könnte. Allerdings kann auch die Parabel Kettenlinie sein, dann müfste aber das Gewicht der einzelnen Teile so geregelt sein, dafs zu gleichen Horizontabständen gleiche Gewichte gehören. Aufgedeckt wurde der Irrthum im Jahre 1646 durch Chr. Huygens (1629 bis 1695), der damals erst 17 Jahr alt war (Oeuvres complètes de Chr. Huygens, I, Seite 28). Das Problem selbst wurde damit nicht gelöst, sondern erst 1690 von Jac. Bernoulli mathematisch formuliert. Dies geschah im Maiheft der Acta Erudit. (1690) am Schlusse eines Aufsatzes über die Isochronen mit den Worten: „Invenire, quam curvam referat funis laxus et inter duo puncta fixa libere suspensus". Leibniz, Huygens, Joh. Bernoulli lösten die Aufgabe sofort, Leibniz am vollkommensten, da er die Gleichung direkt in Cartesichen Koordinaten gab. Joh. Bernoullis Lösung wurde in den Act. Erud. Juniheft 1691 veröffentlicht. Huygens, der sich noch immer ablehnend gegen die Differentialrechnung verhielt, gab seine elementar gehaltene Lösung an Leibniz am 9. Oktober 1690 und veröffentlichte sie im Junihefte 1691 der Act. Erud. Man vergleiche darüber Korteweg: „La solution de Chr. Huygens du problème de la chaînette" in der Bibl. Math. von Enneström, I, 1900, S. 90 bis 108, wo es heifst: „Ainsi le problème de la chaînette lui offrit une occasion précieuse pour mesurer la puissance de ses méthodes contre celles de Leibniz et Bernoulli". Später brachte de l'Hospital das Problem in Beziehung zu dem der Brachistochrone. Auch Dav. Gregory behandelte die Aufgabe (1699). Seine Resultate waren richtig, die Methode aber fand Widerspruch und führte zu unerquicklichen Streitigkeiten. Jac. Bernoulli erweiterte 1701 in den Act. Erud. das Problem für beliebige Belastungen. Taylor beschäftigte sich damit in der Method. Increm. (1714), Euler 1744 in der „Method. inveniendi lineas curvas maximi minimive

proprietate gaudentes". Von Interesse ist die elementare Behandlung, die Möbius in seiner Statik, Werke III, Seite 417 der Kettenlinie zu teil werden läfst. In neuerer Zeit wurde die Kurve vielfach elementar untersucht, z. B. von Gretschel in Grunerts Archiv, Band 43, von Jung in Mehmkes Zeitschr., Band 45. Die hier gegebene Behandlungsweise ist eine selbständige.

§ 262) Über das Katenoid und das zugehörige Minimalproblem giebt es fast nur Analytisches. Dies liegt wohl an der Schwierigkeit, für die Gültigkeit gewisser allgemeiner Gesetze bestimmte Grenzen festzustellen, was der elementaren Betrachtung nur selten gelingt. Lagrange bahnte solche Untersuchungen an und legte damit den Grund zur Variationsrechnung (Miscell. Taur. II $17^{60}/_{61}$). Dabei fehlte es an Beispielen, und erst Meusnier bemerkte, dafs das Katenoid und die zugehörige Schraubenregelfläche Minimalflächen und aufeinander abwickelbar seien. Im Anschlufs an ihn wies Bour in einem „Mémoire sur les développées" nach (Journ. de l'Ec. Pol. XXII, 1777), dafs jede Schraubenfläche auf eine Drehungsfläche abgewickelt werden könne, und Catalan zeigte, dafs die einzige Regelfläche, die als Minimalfläche auftritt, die Minimalschraubenregelfläche sei. Die konforme Abbildbarkeit aller Schraubenflächen ist durch den Zusammenhang mit den Drehungsflächen grundsätzlich erledigt.

§ 263) Gaufs vervollkommnete die Theorie der Minimalflächen durch die „Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibri" (1829). Auf seinen Vorschlag stellte 1831 die Göttinger Fakultät eine Preisaufgabe über Drehungsflächen kleinsten Flächeninhalts, wobei eine Arbeit von Goldschmidt den Preis erhielt. In ihr wird das Katenoid näher untersucht und die Frage behandelt, ob und wann man durch die beiden Grenzkreise zwei, eins oder kein Katenoid legen kann. Von jetzt ab beschäftigten sich die Physiker mit dem Gegenstande und seit 1860 spricht man allgemein von Plateauschen Problemen. Plateau stellte die gegebenen Grenzen durch Drähte dar, tauchte diese in Glycerin-Seifenwasser ein und liefs beim Herausnehmen Seifenblasenflächen entstehen, die infolge des in der Flüssigkeit liegenden Kontraktionsbestrebens sehr genau den mathematischen Minimalflächen entsprechen müssen. In den Jahren

1860 bis 1868 veröffentlichte er in den Mémoires der belgischen Akademie eine ganze Reihe von Untersuchungen unter dem Titel „Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pésanteur". Das Katenoid z. B. wird behandelt in Serie V, § 2, 3, 11, 15; in Serie VII, § 21, 22; in Serie X, § 29.

Die Goldschmidtschen Grenzfälle kommen dabei zur experimentellen Untersuchung, und diese gaben den Anstofs zu wichtigen allgemeineren Forschungen. Eine Grenze der Stabilität zeigt sich z. B. in dem Augenblicke, wo die Kreisringe so weit auseinandergehen, dafs die Katenoidfläche gleich der Summe der beiden Kreisflächen ist. Für diesen Fall also giebt es zwei Möglichkeiten. Die eine ist das gewöhnliche Katenoid, die andere ein ausgeartetes Katenoid, welches aus zwei Kreisflächen und der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte besteht. Bei gröfserer Entfernung der Kreise zerreifst die Seifenblase und dann ist für die Physik kein eigentliches Katenoid mehr möglich.

Entsprechende Versuche lassen sich mit der Minimalschraubenfläche anstellen. In einem Glascylinder befinde sich ein die Achse darstellender Messingdraht, an diesem ein fester Radius (ebenfalls Draht) und dazu ein beweglicher, bis zur Gefäfswand reichender Radius, der mittels einer engen Schlinge um die Achse gelegt ist und so auf und nieder bewegt und gedreht werden kann. Geschieht letzteres, nachdem man zwischen den Radien eine Seifenwasserblase angebracht hatte, so entsteht die Minimal-Schraubenregelfläche zwischen den Radien der Achse und der feucht zu haltenden Cylinderwand. Für jeden senkrechten Abstand der beiden Radien giebt es einen Grenzwinkel, bei dem die Blase zerreifst. Man vergleiche darüber: H. A. Schwarz: Untersuchung der zweiten Variation des Flächeninhalts von Minimalflächenstücken, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1872, Seite 718 bis 735, oder Gesammelte Abhandlungen I, Seite 166 und 167, wo auch weitere Litteratur mitgeteilt wird. Schon die 1861 erschienenen Leçons de Calcul des Variations von Lindelöf und Moigno behandelten von Seite 204 ab die Katenoidprobleme ausführlicher.

§ 264) Was Monge, Scherk, Bonnet, Weierstrafs, Riemann, Steiner, Sturm, Lie u. s. w. auf

dem Gebiete der Minimalflächen geleistet haben, lese man nach bei H. A. Schwarz, oder in den „Leçons sur la théorie des surfaces“ von Darboux (1887), oder bei Beltrami: „Sulle proprietà generali delle superficie ad area minima“ (Memorie dell'Acad. di Bologna, VII, 1868, oder in den Vorlesungen über Differentialgeometrie von Luigi Bianchi (deutsch von Lucat bei Teubner, Leipzig). Steiner und Lie arbeiteten dabei geometrisch, die übrigen rein analytisch. Weingarten bewies, dafs die Evolutenfläche einer pseudo-sphärischen Fläche sich auf das Katenoid, also auch auf die Minimalschraubenfläche abwickeln läfst; Dini verbog die pseudo-sphärischen Drehungsflächen, z. B. die der Traktrix, so, dafs die Kreise der aufgeschnittenen ursprünglichen Fläche in Schraubenlinien derselben Ganghöhe übergingen. Da nach Band I das Krümmungsmafs beim Verbiegen unverändert bleibt, schuf er damit die pseudo-sphärischen Schraubenflächen. (Bei Bianchi, Seite 468, ist eine solche im Anschlufs an Brills Katalog skizziert.) Die Möglichkeit solcher Flächen geht ohne weiteres aus dem Bourschen Theorem hervor.

Diese Andeutungen mögen zeigen, zu welchen Wissensgebieten man von dem hier elementar behandelten Gegenstande (Kettenlinie, Katenoid, Minimalschraubenregelfläche) aus übergehen kann.

§ 265) Die gegen den Schlufs des letzten Abschnitts benützte logarithmische Spirale wurde schon von Descartes (Epistola 73, 74, 91) untersucht, nach Montuclas Mitteilungen auch von einem Jesuiten Nicolas, dessen Abhandlung „de novis spiralibus exercitatio geometrica“ zu Tolosa im Jahre 1693 gedruckt wurde. Ihr folgte noch eine andere „de lineis spiralibus logarithmicis“ desselben Verfassers mit demselben Druckorte. Auch bei Wallis (Opera I, 560) und bei Barrow: „Lect. geom.“ Seite 124 findet man einiges über diese Kurven. Die erste wissenschaftliche Behandlung ist aber Jac. Bernoulli zuzuschreiben, der sich im Junihefte 1891 der Acta Erud. zum erstenmale, im Maihefte 1892 zum zweitenmale mit der Kurve beschäftigte und sie als „spira mirabilis“ bezeichnete, weil sie bei zahlreichen Umgestaltungen stets wiederkehrt und als Evolute (auch Selbstevolute), als Evolvente (auch Selbstevolvente), als Diakaustik, Katakaustik u. s. w. stets

wieder eine logarithmische Spirale derselben Art giebt. (Vergl. das „Eadem mutata resurgo“ auf seinem Grabsteine.) Über die Abhandlung von 1691 vergl. Cantor III, Seite 481), da dort das erste elliptische Integral auftritt. Über den Zusammenhang mit den Kegelloxodromen und den Kugelloxodromen wurde schon in Band I berichtet. Alle Eigenschaften lassen sich, wie z. B. Verfasser in Schlömilchs Zeitschrift im Jahre 1871 zeigte, sehr leicht mit Hilfe der logarithmischen Abbildung aus denen der Geraden ableiten. Dort wurden auch die aus der Kurve durch Inversion hervorgehenden logarithmischen Doppelspiralen oder Bicirkularspiralen behandelt. An diese Arbeit schlofs sich im folgenden Jahre in derselben Zeitschrift eine kinematische von Burmester an. Die Arbeit des Verfassers wird zwar in Burmesters Abhandlung, aber nicht mehr in dessen Kinematik citiert.

§ 266) Über die schon im Altertume bekannten Schraubenlinien schrieb unter Benutzung von Raumkoordinaten zum erstenmale Parent (1702) in seinen „Essais et Recherches de math. et de phys. II, 684. Nach Proklus geht die Kenntnis des Satzes, dafs gleiche Abschnitte der gewöhnlichen Schraubenlinie kongruent seien, bis auf Geminus zurück. Im vierten Buche der Coll. des Pappus (Ausgabe Hultsch, 258—264) wird die jetzt als Minimalschraubenregelfläche bekannte Fläche des sogenannten „flachen Schraubengewindes“ beschrieben. Was Pappus sonst von Raumkurven kannte, darüber vergleiche man Cantor I, 421. Auch Klügels Wörterbuch berichtet darüber im Artikel Spirale, Band IV, Seite 449. Später als Parent hat sich Robervals mit der Schraubenlinie beschäftigt und sie durch Projektion mit der verallgemeinerten Sinuslinie (Sinoide) in Verbindung gebracht, ebenso den Zusammenhang der Sinuslinie mit der Cykloide klargelegt. Darüber hat auch Pitot geschrieben (vgl. Cantor III, S. 445).

§ 267) Über die Röhrenflächen*) hat nach Baltzer unter dem Titel „Über krumme Cylinder“ Euler einiges

*) Während der Korrektur erschien im „Archiv der Matth. u. Physik“ III, 1. Heft eine analytische Abhandlung über Röhrenflächen von V. Kommerell, die auf Bonnet (Journ. de l'Ec. Pol. 52), Bour (Journ. Heft 39) hinweist, ebenso auf Stahl u. Kommerell: Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie.

geschrieben. Später ist über Monge zu berichten. Über die mit den logarithmischen Spiralen und Doppelspiralen zusammenhängenden Kreis-Röhrenflächen und ihre Inversionsverwandten war dem Verfasser nur die eigene Abhandlung im Crelleschen Journale bekannt, deren einer Satz hier modifiziert werden mufste. Über die Cykliden hat Dupin in den „Applications de géometrie et de méc.“ gehandelt. Die betreffende Litteratur wurde schon in Band I mitgeteilt.

Eine soeben als Programmbeilage erschienene Schrift von Strobel „Über Flächen, die durch veränderliche Kegelschnitte“ erzeugt werden“ (Heilbronn 1901), nennt die nachstehende Litteratur zu diesem Gegenstande. Flächen, die durch kreisförmig Erzeugende mit konstant bleibendem oder veränderlichem Halbmesser erzeugt werden, also Röhrenflächen oder verallgemeinerte Cykliden (z. B. anallagmatische Flächen) haben behandelt Cayley, memoirs on quartic surfaces, Procedings of the London math. soc. III, 1871; Casey, on cyclides and sphero-quartics, Phil. Trans., Band 161; Maxwell: Über Cykliden im engeren Sinne, quaterly journal IX; Montard, sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre, Nouvelles Annales III, 2. série; sur les lignes de courbure d'une classe de surface du quatrième ordre, Compt. rend. 59, II; Ribaucour, sur une propriété des surfaces enveloppes de sphères, Compt. rend. 67; sur les systèmes cycliques, C. r. 76; sur les faisceaux de cercles, 76; Darboux, théorie générale des surfaces, I und IV, Seite 495 u. s. w., Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux, 1898; M. G. Demartres: 1. Sur les surfaces à génératrice circulaire, Annales de l'école normale supérieure, II, 3. série, 1885; 2. Mémoire sur les surfaces qui sont divisées en carrées par une suite de cercles et leurs trajectoires orthogonales, Annales IV, 1887. Dies sollen die eingehendsten Arbeiten sein.

Der zweite Teil der Strobelschen Arbeit sucht die Theorie der durch Kurven zweiten Grades erzeugten Röhrenflächen anzubahnen, jedoch ist das Gegebene nur geringfügig. Die Globoidschnecken endlich geben ein Beispiel von Röhrenflächen, die durch veränderliche „Trapeze“ und andere veränderliche Profile entstehen und auf verallgemeinerte Schraubenlinien führen. Das „Trapez“ ist dabei Schraubenprofil, nicht etwa „Normalschnitt“ der Fläche.

§ 268) Zur Untersuchung der Ausdehnungsfähigkeit der Guldinschen Regeln wurden oben einige allgemeine Sätze über Raumkurven und Flächen eingeschaltet. Geschichtliches findet man z. B. bei Gino Loria (deutsch von Schütte, erschienen bei B. G. Teubner), in einem Mémoire von Saint Venant (Journal de l'Ecole Pol. XXX), in einem solchen von Frenet (Liouvilles Journal, XVII, 437), in dem genannten Werke von Darboux, in Schell: Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung; auch in der Raumlehre von Salmon-Fiedler, neuerdings in dem ausführlichen Berichte von Kötter „Über die Entwickelung der synthetischen Geometrie", der durch die deutsche Mathematiker-Vereinigung veröffentlicht ist und bis zum Jahre 1847 reicht. Er hat eine Kluft ausgefüllt, zu deren Beseitigung der kurze Abrifs von Loria nicht ausreichen konnte.

Danach verdanken wir dem schon genannten Pitot (vergl. Cantor, III, 427 bis 428), eine Reihe der noch jetzt gebräuchlichen Bezeichnungen der Raumlehre. Andere wurden von Clairaut eingeführt, dessen „Recherches sur les courbes à double courbure" im Jahre 1731 erschienen und bahnbrechend wirkten. (Vergl. Cantor, III, von Seite 763 ab). Monge war der erste, der nach Eulers Vorgang die Röhrenflächen ausführlicher behandelte. Sein „Mémoire sur les developpées" wurde der Akademie im Jahre 1771 vorgelegt, jedoch erst 1785 in den Savants Etrangers, X abgedruckt. Auch er schuf dauernd angewandte Benennungen, besonders in seinen „Applications de l'Analyse à la Géométrie". Ihm verdankt man z. B. die Einführung der oskulierenden Kugel, der Punkte einfacher und doppelter Inflexion. Liouvilles Ausgabe des Werkes von Monge enthält im Anhange eine Übersetzung der bahnbrechenden Arbeit von Gaufs, der Disquisitiones circa superficies curvas, in der unter anderem der Begriff des (Gaufsschen) Krümmungsmafses für Flächen und dessen Charakter als Invariante bei Biegungen und der Begriff der sphärischen Abbildung eingeführt werden. Diese Abhandlung ist in Ostwalds Klassikern, deutsch übersetzt von Wangerin, erschienen. Bei Tinseau, Solution de quelques problèmes (vorgelegt 1784, abgedruckt 1781 in den Sav. Etrangers, IX findet man zuerst die Oskulationsebenen und die abwickelbaren Tangentenflächen.

Lancret giebt in einem Mémoire sur les courbes à double Courbure" (vorgelgt 1802, abgedruckt in den Sav. Etrang.) einige nach ihm benannte Sätze.

Geodätische Untersuchungen verdanken wir Gaufs, Joachimsthal (Crell. Journal, Band 16), Bonnet (Journal de l'Ec. Polyt.). Auch letzterer untersucht die Deformation der Flächen durch Biegung. In den Compt. Rend., Band 57, beschäftigt er sich mit der Frage, inwiefern Kugelflächen bei der Verbiegung ihre geradlinigen Erzeugenden behalten können. Minding (Crell. Journal, Band 18) zeigt, dafs jede Regelfläche so gebogen werden kann, dafs ihr Leitkegel eine beliebige vorgeschriebene Form annehmen mufs. Hinsichtlich der geodätischen Linien gelang es erst Jacobi, mit Hilfe der elliptischen Koordinaten die des dreiachsigen Ellipsoids genauer zu untersuchen, worauf es auch für die allgemeinen Flächen zweiten Grades gelang. Die Bestimmung der Krümmungslinien war schon Dupin gelungen, nach dessen berühmtem Theorem sich drei einander orthogonal schneidende Flächenscharen in solchen schneiden.

Neben Gaufs war Jacobi der letzte Mathematiker, der zu den universellen gerechnet werden kann, der die Geometrie und die Analysis in gleicher Weise beherrschte. Schon vorher war eine Spaltung in lauter Spezialisten eingetreten. Poncelet, Chasles, v. Staudt, Steiner, Möbius und andere arbeiteten geometrisch, andere rein analytisch auf dem besprochenen Gebiete. Die Leistungen Poncelets wurden schon früher besprochen. Chasles wies z. B. nach, dafs jeder starre Körper aus jeder beliebigen Lage in eine andere durch eine einzige Schraubung gelangen kann. Ihm also verdanken wir folgenden Satz: Die Bewegung eines unveränderlichen Systems ist äquivalent einer kontinuierlichen Folge verschwindend kleiner Schraubenbewegungen um eine bewegliche Achse, welche dabei die Erzeugungslinie einer bestimmten Regelfläche des absoluten Raumes ist. Auf diesem Satze beruht die ganze neuere Kinematik. Man vergleiche dazu folgende Arbeiten von Chasles: 1) Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entr'eux et placés d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini, ou infiniment petit, d'un corps solid libre; communiquée à la

Soc. Philom. 5. Févr. 1831. (Bulletin des sciences math. p. Férussac, Nov. 1830.) 2) Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace. Compt. Rend. de l'Ac. t. XVI p. 1420—1432 (1843). 3) Propr. relatives au déplacement fini quelconque dans l'espace, d'une figure de forme invariable, Compt. rend. 51, 5. Déc. 1860, 10. Déc. 1860, 52, 2. Jan. 1861, 4. Févr. 1861, 18. März 1861). Bei Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte findet man näheres darüber. Letzteres Buch trägt das Motto: „Geometrica geometrice!" Da von Schraubenbewegungen gesprochen wurde, war hier der Anlafs, auf diesen Teil der Litteratur hinzuweisen.

Über Steiner, v. Staudt und Möbius wurde schon früher berichtet.

§ 269) Die Theorie der Transformationsgruppen, auf die schon am Schlufs des vorigen Kapitels hingedeutet wurde, ist besonders von Lie und Felix Klein gefördert worden. Unter den zahlreichen Werken des ersteren sei das Werk mit entsprechendem Titel und die Geometrie der Berührungstransformationen hervorgehoben, unter denen des letzteren die „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen". Elementar sind diese Betrachtungen nicht gehalten, sie bedeuten vielmehr eine Brücke zwischen der höheren bezw. höchsten Analysis, besonders der reinen Funktionentheorie einerseits und gewissen geometrischen Anschauungsmethoden andererseits. Aber vieles aus den leichteren Kapiteln ist der elementaren Betrachtung zugänglich und dürfte dazu anregen, die Elemente der Raumlehre in der betreffenden Richtung ganz aufserordentlich zu fördern.

Die vermittelnde Stellung dieser beiden Forscher ist von grundsätzlicher Bedeutung und hat aufserordentlich anregend gewirkt, sie hat sogar einen grofsen Arbeitsplan ermöglicht, nach dem die Vertreter der rein arithmetischen und der mehr geometrischen Richtung einheitlich vorgehen können.

In neuerer Zeit nämlich beanspruchten die reinen Arithmetiker vielfach für sich die vornehmere Stellung. Die „nur geometrischen" Beweise wurden abgelehnt, da sie angeblich nur Verwirrung stifteten, und die geometri-

schen Hilfsvorstellungen, mit denen doch besonders durch Riemann der Analysis (An. situs) ganz neue Gebiete erschlossen wurden, waren in Gefahr, in Mifskredit zu gerathen. Schon Steiner wehrte sich in der Vorrede zur „Systematischen Entwickelung“ gegen die Minderschätzung der Geometrie. Sophus Lie, der als einer der ideenreichsten Mathematiker zu bezeichnen ist, sprach sich im Vorwort zur „Geometrie der Berührungstransformationen“ sehr scharf und unter Namensnennung gegen jenen einseitigen Standpunkt aus, und auch Felix Klein warnte vor der übertriebenen Arithmetisierung der Mathematik. Gaufs würde trotz seines ϑεὸς ἀριϑμητίζει vielleicht ähnlich geurteilt haben, wenn man nach dem, was er über Möbius „Barycentrischen Kalkül“ (den er nur mit Mifstrauen in die Hand genommen hatte) an Schumacher geschrieben hat, urteilen darf. Noch wahrscheinlicher wird die Vermutung durch seine Besprechung von Monges „Géométrie descriptive“, 3. Auflage, in den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom 31. Juli 1813, in der er nach lobender Anerkennung der Klarheit und der geschickten Anordnung des Werkes sagt, er müsse „das Studium desselben als eine kräftige Geistesnahrung empfehlen, wodurch unstreitig zur Belebung und Erhaltung des echten, in der Mathematik der Neueren sonst manchmal vermifsten geometrischen Geistes viel mit beigetragen werden kann.“ (Werke, IV, Seite 259.) Gaufs selbst also ist es, der bei manchen seiner Zeitgenossen den geometrischen Geist vermifst.

Ein Buch über die Elemente der Stereometrie ist selbstverständlich nicht der Ort, über die Berechtigung einer grundsätzlichen Spaltung der Mathematiker in Freunde und Gegner der Arithmetisierung zu entscheiden. Wohl aber darf, da die höhere Analysis der Geometrie gewaltig vorausgeeilt ist, der Wunsch ausgesprochen werden, auf rein geometrischem Wege möchte eine selbständige, d. h. von der Analysis unabhängige Differentialgeometrie zum Ausbau gebracht werden. Zu gegenseitiger Bekämpfung liegt kein Anlafs vor.

§ 270) Auch über die Frage, ob die Differentialgeometrie ganz aufserhalb der Elemente liegt, oder ob ein Teil von ihr den Elementen einverleibt werden kann, soll hier nicht endgültig entschieden werden. Aber schon

Archimedes war genötigt, zur Ermittelung des Kreisumfanges Differentialgeometrie anzuwenden, denn schliefslich arbeitet er doch mit Operationen im Gebiete des Unendlichkleinen. Hinsichtlich der Zahl π ist also die Frage seit zwei Jahrtausenden entschieden. Dafs aufserdem die Logarithmen und die Basis e der natürlichen Logarithmen in die Elemente aufzunehmen sind, erscheint ebenfalls unabweisbar. Schon aus letzterem folgt, dafs die Elemente weit über Euklid hinausgehen müssen. Baltzer hat in die Elemente mehr aufgenommen, als es bis dahin Regel war. Aber nach dem, was Poncelet, Steiner, v. Staudt, Möbius, Chasles und Monge geschaffen haben, und nach dem, was selbst die elementarste Technik an Vorkenntnissen beanspruchen mufs,*) reicht auch das, was Baltzers Elemente berücksichtigen, nicht mehr aus. Das Gebiet der Elemente mufs von Jahrhundert zu Jahrhundert erweitert werden. Die Methodik mufs darauf hinarbeiten, möglichst elementare Wege ausfindig zu machen, auf denen man zu den wichtigeren Errungenschaften der Wissenschaft gelangen kann. Auch ist es nur dadurch möglich, zu einem wirklichen System der Elemente zu gelangen, welches jetzt aus dem einfachen Grunde unmöglich ist, dafs sich überall Lücken und mangelnder Zusammenhang zeigen, wie an einigen Stellen bereits nachgewiesen wurde.

Also auch in dieser Richtung ist ein grofser Arbeitsplan möglich. Statt der verschiedenen Einzeluntersuchungen sollte eine der zahlreichen mathematischen Zeitschriften für den betreffenden Lehrerstand als Ziel der Arbeit hinstellen, das Gebiet der Elementarmathematik nach Möglichkeit zu erweitern.

Der Verfasser hat dies versucht in seiner „Ingenieurmathematik in elementarer Behandlung“, von der bisher zwei Bände erschienen sind. Der erste behandelt die Schwerpunkte und statischen Momente, die Trägheitsmomente und Centrifugalmomente, und zwar sowohl die

*) Man denke nur an die Trägheits- und Centrifugalmomente für ebene Flächen und für Körper. Ohne die ersteren ist keine Festigkeitslehre, ohne die letzteren keine Mechanik möglich. Der folgende Band soll auch auf diese Gegenstände eingehen.

„Planmomente“, „Achsialmomente“ und „Polarmomente“ und was mit ihnen zusammenhängt. Dabei löst er wichtige Aufgaben der Maschinen- und Bautechnik auf einem Wege, den z. B. die höheren Maschinenbauschulen benutzen können. Der zweite Band bringt eine elementar gehaltene Potentialtheorie, die bis zu den neuesten Forschungen vorzudringen und Lehren von Maxwell, Helmholtz, Kirchhoff und anderen, die auf den verschiedensten Gebieten der Physik liegen, den betreffenden Fachschulen zugänglich zu machen versucht. — Ein dritter Band, die elementare Lehre von den ebenen und räumlichen Kurven, soweit sie für den Ingenieur von Wichtigkeit sind, ist geplant. In 23 jährigem Fachschuldirektorat hat der Verfasser seine Methode im Unterrichte erprobt. In den vorliegenden Elementen der Stereometrie findet der Leser die Fortsetzung der betreffenden Bestrebungen.

Aber es ist zu wünschen, dafs sich die gesamte Lehrerschaft der Mathematik zu dem oben genannten Arbeitsplane zusammenschliefse. Für das neue Jahrhundert liegt mehr als genug des Abeitsstoffes vor, und die Aufgabe würde eine unserer mathematischen Vereinigungen würdige sein.

Der vierte Band der Elemente der Stereometrie soll weiteres Material zu diesen Bestrebungen bringen.

In gleichem Verlage erschienen:

Elemente der Stereometrie

von

Prof. Dr. Gustav Holzmüller.

I. Band: **Die Lehrsätze und Konstruktionen.** Mit 282 Figuren. Preis broschiert M. 6.—, gebunden M. 6.60.

II. Band: **Die Berechnung einfach gestalteter Körper.** Mit 156 Figuren. Preis brosch. M. 10.—, geb. M. 10.80.

IV. (Schluss-) Band ist im Erscheinen begriffen.

Jeder Band ist einzeln zu haben.

Einige Urteile über Band I und II:

Zeitschrift f. d. Realschulwesen: Direktor Holzmüller, durch die langjährige Leitung der höheren Gewerbeschule zu Hagen i. W. aufs gründlichste mit den Bedürfnissen des Lernenden vertraut, hat wirklich für die Kompendienlitteratur ein neues Zeitalter heraufführen helfen, und seine Bücher sollten in der Hand keines jüngeren Mathematikers fehlen. Denn dieser lernt aus ihnen, was Elementarmathematik ist, wie ungemein viele Schätze sie dem bietet, der nicht gleich von einem trockenen Schulleitfaden aus sich der höheren Mathematik zuwendet, sondern sich erst einmal vergewissern will, ob man denn nicht auch ohne Infinitesimalrechnung zu einer tieferen Einsicht in die Dinge, vorab in die Raumgebilde, gelangen kann. Und in dem vorliegenden Falle, in der Stereometrie, kommt noch des Verf. bekanntes Geschick, durch passende Figuren die Schwierigkeiten der Raumvorstellung zu mildern, zu besonderer Geltung . . . Wer die didaktischen Arbeiten Holzmüllers kennt, weifs von vornherein, dass er nichts Alltägliches zu erwarten hat, sondern von dem Verf. auf neuen, wenig oder gar nicht betretenen Wegen geführt werden wird. Diese Erwartung trügt denn auch in keiner Weise. Vor allem nimmt der Autor den Begriff „elementar“, den er ja in seiner Weise auch anerkennt, in einem ganz anderen Sinne, als dies gemeiniglich geschieht; aus der folgenden Übersicht wird dies deutlich genug hervorgehen. Mancher Schulmann älterer Ordnung wird gegen diese Erweiterung des gewöhnlichen

Pensums seine Bedenken haben, von denen sich auch der Berichterstatter nicht ganz frei weiſs; indessen weiſs auch jeder Kenner der Holzmüllerschen Methodik, daſs ihr Wesen eben recht eigentlich darin besteht, Dinge, die sonst einen ziemlich verwickelten Charakter an sich tragen, mit den allereinfachsten Hilfsmitteln zu behandeln und Rechnungen, die man für unvermeidlich halten möchte, durch räumliche Betrachtungen von unmittelbarer Anschaulichkeit zu ersetzen. Diesen Vorzügen wird man auch hier wiederum begegnen. Während in den allermeisten Lehrbüchern der Stereometrie das konstruktive Element nur eine ganz unbedeutende Rolle zu spielen pflegt, weil man die Schüler möglichst rasch zu den Lehrsätzen über die Oberflächen- und Körperberechnung führen will, ist in diesem Bande den Komplanationen und Kubaturen nur wenig Raum gegönnt. Der Lernende soll im Raum heimisch werden, er soll begreifen, daſs man im Gebiete der drei Dimensionen ganz ebenso wie in der Ebene Konstruktion ausführen kann. Diesen Zweck dürfte der Verf. ausgiebigst erreicht haben, und zumal für den Selbstunterricht wird sich derjenige, der über das gewohnte Niveau hinauskommen möchte, dieses Führers mit gröſstem Nutzen bedienen. (Prof. Dr. S. Günther.)

Monatshefte für Mathematik und Physik: Der vorliegende zweite Band der Holzmüllerschen Stereometrie schlieſst sich würdig seinem Vorgänger an . . . Die in groſsem Umfange gegebenen geschichtlichen Mitteilungen erhöhen den Wert des Werkes, das nach dem Erscheinen des dritten Bandes wohl einzig in seiner Art dastehen wird, da die elementare Stereometrie in so umfassender und gründlicher Weise noch nie behandelt wurde.

Pädagogischer Jahresbericht: . . . Ein solches Buch muſs man eben selbst lesen, und ich kann dies jedem Mathematiker, insbesondere jedem Mathematiklehrer einer höheren Schule, nur aufs wärmste anraten.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins: . . . Wir haben schon gelegentlich des Erscheinens des ersten Bandes dieses ausgezeichneten Werkes die Aufmerksamkeit unserer Leser auf dasselbe gelenkt . . . Der hohe Wert des vorliegenden Buches liegt in der Fülle der Anregungen, die es dem Studierenden überall bietet; auch bei der Behandlung des einfachsten Stoffes weiſs der Verf. Ausblicke auf die Anwendungen, dessen das eben Gelehrte fähig ist, zu eröffnen, die zusammen mit der klaren und originellen Behandlungsweise stets das regste Interesse wachhalten. Wir erwarten mit Spannung den Schluſsband.

Herrosé & Ziemsen, Wittenberg.

Elemente der Stereometrie

Von

Prof. Dr. Gustav Holzmüller

in Hagen i. W.

Vierter Teil

Fortsetzung der schwierigeren Untersuchungen

Berechnung und stereometrische Darstellung von statischen, Trägheits- und Centrifugal-Momenten homogener Raumgebilde. Simpsonsche Regel, verallgemeinerte Schichtenformel, gewisse Zuordnungen und konforme Abbildungen im Dienste solcher Bestimmungen. Nachtrag über das Katenoid, seine Krümmungsverhältnisse und sphärische Abbildung und über seinen Zusammenhang mit der Gaufsschen Pseudosphäre und der Minimal-Schraubenregelfläche

Mit 89 Figuren

Leipzig

G. J. Göschensche Verlagshandlung

1902

Alle Rechte
von der Verlagshandlung vorbehalten.

Vorwort.

Der vierte und letzte Band der Stereometrie beginnt mit dem Notwendigsten über gewisse Momente homogener Punktsysteme, besonders über die statischen, die Trägheits- und die Centrifugalmomente. Um dasselbe für homogene kontinuierliche Raumgebilde zu ermöglichen, wird zunächst die Simpsonsche Regel auf den dritten Grad ausgedehnt, und zwar geschieht dies, wie im „Methodischen Lehrbuche“, ohne jeden Gebrauch von Reihen. (Bekanntlich wird diese Ausdehnung trotz ihrer Einfachheit in zahlreichen Lehrbüchern leider noch heute der höheren Mathematik überlassen.) Daran schliefst sich die Entwickelung der sogenannten Summen- oder Schichtenformel in ihrer vollen Allgemeinheit. Dabei werden aber nicht nur die ebenen Querschnitte, sondern auch cylindrische und kugelförmige behandelt, was eine Ausdehnung der Berechnungen auf Raumgebilde ermöglicht, deren elementare Behandlung sonst aus Gründen anscheinender Schwierigkeit unterbleibt. Schon in Band III gelang es, durch eine gewisse Art von Zuordnung die Parabel zu rektifizieren und die Fläche des Drehungsparaboloids zu bestimmen. Die entsprechenden Übungsbeispiele werden hier weitergeführt. Jeder ebenen Kurve werden zwei Flächen derart zugeordnet, dafs die Formel für die Rektifikation der Kurve übereinstimmt mit den Formeln für den Inhalt der Flächen. Kennt man das eine, so kennt man auch das andere. Dafs dabei auch Momente bestimmt, Schwerpunktslagen u. s. w. untersucht werden, ist nach obigem selbsverständlich.

Jetzt folgen stereometrische (und mechanische) Deutungen und Veranschaulichungen der genannten Momente für ebene Flächen und Kurven, wobei sich besonders für die Trägheits-

momente ergiebt, dafs sie entweder zu schönen Sätzen über Körperinhalte und Mantelflächen führen, oder dafs sie selbst aus solchen ohne jede Rechnung leicht bestimmt werden können. Wie nun die statischen und Trägheitsmomente mit den Abschrägungen bezw. mit den Begrenzungen durch die Flächen parabolischer Cylinder und Drehungsparaboloide zusammenhängen, so steht die Fläche des hyperbolischen Paraboloids in entsprechender Beziehung zu den ebenso wichtigen Centrifugalmomenten. Die beiden Trägheitsellipsen von Poinsot und von Clebsch-Culmann und die Lemniskate der Trägheitsmomente, werden dabei in einfacher Weise abgeleitet. Dies giebt Veranlassung, in ganz elementarer Darstellung auf konforme Abbildungen einzugehen, welche es gestatten, von den Körper- oder Flächeninhalten bezw. Kurvenlängen der Originalgebilde auf den Inhalt oder die Momente ihrer Abbildungen zu schliefsen. So ergeben sich die Auflösungen für gewisse Gruppen schwierig erscheinender Aufgaben ohne irgendwelche Rechnung.

Es handelt sich dabei, wie vorher, nicht etwa um die Lösung nur vereinzelter Aufgaben durch nur vereinzelte Kunstgriffe, sondern um anschauliche Methoden von ganz aufserordentlicher Tragweite, die für ganze Gruppen von Gebilden die betreffenden Berechnungen ersparen und auch die Lösung von Aufgaben aus der Theorie des Newtonschen und logarithmischen Potentials ermöglichen. Man lernt gewissermafsen Brücken kennen, welche die verschiedensten Gebiete miteinander verbinden.

Die Bestimmung von Kurvenlängen, von Flächen, körperlichen Inhalten und von Momenten verschiedener Art und Ordnung für vielfach gestaltete Raumgebilde schliefst sich an. Dabei werden vorläufig die mit den Flächen zweiten Grades zusammenhängenden Körper ausgeschlossen. Diesen ist der Übersichtlichkeit halber ein besonderer zweiter Abschnitt gewidmet, in dem neben den vollen Körpern auch die Segmente, Parallelschichten, Sektoren, Zonenpyramiden u. s. w. nach Inhalt, statischen Momenten und Schwerpunktslagen, Trägheitsmoment und Trägheitsabstand, Centrifugalmoment u. s. w. berechnet werden. Die beiden Trägheitsellipsoide kommen ebenfalls zur Behandlung.

Im Schlufswort wird ein Nachtrag über das **Katenoid**, die zugehörige **Gaufssche Pseudosphäre** und die zugehörige **Minimal-Schraubenregelfläche** gebracht. Es gelingt nämlich, auf elementarem Wege zu zeigen, dafs die Evolvente der Kettenlinie eine gewöhnliche Traktrix ist, und dafs ihre Normalen in der Länge mit den zugehörigen Krümmungsradien übereinstimmen, dafs also für das Katenoid das **Gaufssche** Krümmungsmafs leicht zu bestimmen und diese Fläche eine solche von der konstanten mittleren Krümmung Null ist. Um ihre Zugehörigkeit zu den **Delaunayschen** Flächen, für die bekanntlich das letztere allgemein der Fall ist, zu beweisen, wird elementar gezeigt, dafs der Brennpunktsweg für die auf der Geraden rollende Parabel stets eine Kettenlinie ist. Dafs ferner die sphärische Abbildung des Katenoids eine konforme Abbildung ist, ergiebt sich als selbstverständlich und ermöglicht eine Zusammenstellung der zwischen Cylinder, Katenoid und Kugel bestehenden konformen Beziehungen, wobei sich z. B. eine neue geometrische Konstruktion der Merkatorkarte ergiebt.

Die in Band III nachgewiesene Abwickelbarkeit des Katenoids auf die Minimalschraubenfläche giebt Veranlassung, noch einmal auf die Schraubenlinie und ihre Parallelprojektionen einzugehen, die bekanntlich auf Sinoiden*) und cyklische Kurven (gewöhnliche, verlängerte und verkürzte Cykloiden) führen. Dadurch wird zwischen der Kettenlinie, Schraubenlinie, Sinuskurve und Sinoide, den cyklischen Kurven und der Parabel ein Zusammenhang nachgewiesen, der wohl verdient, eingehender untersucht zu werden.

Abgesehen von diesen letzteren Betrachtungen liegt der Schwerpunkt des Buches allerdings in dem Gebiete, welches man in Frankreich seit **Hâton de la Goupillière** als „Géométrie des masses“ bezeichnet. Der Zusammenhang mit dem rein stereometrischen Gebiete und die Fruchtbarkeit der verbindenden Ideen und der zugehörigen Methoden sind aber von derartiger Bedeutung, dafs in unserer auf

---

*) Das Wort sinus ist bekanntlich nur durch mifsverständliche Auffassung eines ohne Vokale geschriebenen arabischen Wortes in die Trigonometrie gelangt. Daher wird es gestattet sein, statt der nicht schön klingenden Bezeichnung „Sinusoide“ die vielfach gebrauchte „Sinoide“ beizubehalten, diese aber auf die aus der Sinuskurve abgeleiteten Kurven zu beschränken.

Anwendungen hindrängenden Zeit eine eingehendere Behandlung dieses Gegenstandes zur Notwendigkeit geworden ist.

Die aus der Mechanik und der mathematischen Physik gewählten Beispiele sind ziemlich zahlreich, noch weit mehr aber findet man in des Verfassers „Ingenieurmathematik in elementarer Behandlung“, von der demnächst der dritte Band (bei B. G. Teubner in Leipzig) erscheinen soll.

Erschöpft ist mit diesem Werke das Gebiet der „Elemente der Stereometrie“ noch nicht, denn eine Reihe von Resultaten der Forschungen von Steiner und Möbius und das aus dem Gebiete der Gleichungen dritten und vierten Grades vom Verfasser bearbeitete Übungsmaterial würden einen ganzen fünften Band anfüllen; aber der mit dem Verlage vereinbarte Umfang ist schon derart überschritten worden, dafs ich mich zum Abschlufs entschliefsen mufste. Vielleicht bietet sich später Gelegenheit, die hier ausgeschlossenen Gebiete zu behandeln.

Blicke ich auf die Zeit zurück, in der die „Elemente der Stereometrie“ bearbeitet wurden, so kann ich nur sagen, dafs das Aufsuchen elementarer Wege, die zu den schönsten Gebieten der neueren Raumgeometrie hinführen, mir den gröfsten Genufs und manche freudige Überraschung hinsichtlich der Tragweite der Elementarmethoden bereitet hat. Wer nur mit der höheren Mathematik zu arbeiten gewohnt ist, hat bisweilen die Überzeugung, die Elementarmethoden wären allzu umständlich. Ein Besprecher der von mir bearbeiteten Methoden, der sich als entschiedenen Freund der höheren Mathematik hinstellt, mufs aber doch in jener Ansicht erschüttert worden sein, denn er spricht in der Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure von der oft geradezu „verblüffenden Einfachheit“, mit der die Resultate gewonnen werden. Ein Professor einer technischen Hochschule hat es nicht verschmäht, die vorgeschlagene stereometrische Veranschaulichung der Trägheitsmomente eingehender zu bearbeiten. Auch ein Lehrbuch der Integralrechnung hat sie unter Nennung der Quelle aufgenommen. Das Amsterdamer Technische Wochenblatt hat einen Teil meiner Darstellungen ins Holländische übertragen. Die Merkatorkarte wird noch jetzt sogar in den nautischen Lehrbüchern elementaren Charakters äufserst stiefmütterlich

behandelt. Herr Professor Latzina von der Universität Buenos Aires, der die beiden ersten Bände meines „Methodischen Lehrbuchs“ ins Spanische übersetzt hat, fügte am Schlufs die hier in Band I und II gegebene elementare Behandlungsweise bei und entnahm den „Elementen der Stereometrie“ auch einige Figuren. Nehme ich dazu die Besprechungen, die einige Hochschullehrer und sonstige Fachgenossen über die beiden ersten Bände geliefert haben, so habe ich Anlafs, mit den bisherigen äufserlichen Erfolgen meiner Arbeit recht zufrieden zu sein.

Die Absicht ist durchaus nicht, die höhere Mathematik für die betreffenden Gebiete überflüssig zu machen, sondern den „höheren Wegen“ elementare Methoden an die Seite zu stellen und damit dem Gegenstande möglichst auch neue Seiten abzugewinnen und dabei besonders mit Hilfe der räumlichen Anschauung zu arbeiten. Ich kann nur den Wunsch aussprechen, das hier Gegebene möchte recht viele Leser anregen, die höheren und feineren Teile der analytischen Geometrie des Raumes zu studieren. — Namentlich für die jetzt im Aufblühen begriffenen höheren Maschinenbauschulen, die nur mit elementaren Hilfsmitteln arbeiten sollen, die aber z. B. aus Gründen der Festigkeitslehre, der Dynamik und der Hydrostatik die Trägheitsmomente nicht entbehren können, sind Methoden der vorgeschlagenen Art nutzbringend zu verwenden. Auch für höher strebende Baugewerkschulen sind sie unentbehrlich, wenn nicht blofs nach Vorschrift unbewiesener Formeln gearbeitet werden soll.

Der grofse Umfang des Werkes erklärt sich nur aus der grofsen Anzahl fertig durchgeführter Beispiele, die eine ganze Sammlung darstellen. Anfragen aller Art aus den Kreisen der praktischen Ingenieure beweisen mir, dafs man an diesen Beispielen nicht interesselos vorübergeht, und es ist für mich eine besondere Genugthuung, dafs Herr Dr. Bohnert, der die Stereometrie für die Schubertsche Sammlung bearbeitet hat, im Vorwort erklärt, für die Auswahl der Beispiele seien ihm die „Elemente der Stereometrie“ vorbildlich gewesen.

Allerdings gehen die Beispiele der letzteren vielfach in Gebiete über, die man bisher vollständig der Hochschule überliefs bezw. überlassen mufste, weil man gewisse einfache Elementarmethoden nicht kannte. Aber darin sollte

doch, nachdem ein Poncelet und Chasles, ein Steiner und Möbius die Grenzen der Elementarmathematik so gewaltig erweitert haben, nur ein Vorzug gefunden werden. Denn auf der Universität lernt der künftige Fachlehrer die Elementarmathematik leider gar nicht oder doch nur in bescheidenem Mafse kennen. Er wird mehr zum Hochschulprofessor vorgebildet, weniger für den Elementarunterricht an höheren Schulen.

Auf besonders ausgesprochene Wünsche hin ist am Schlufs des vierten Bandes ein alphabetisches Sachregister zusammengestellt, welches nicht nur die Orientierung erleichtert, sondern auch zeigt, wie mannigfaltig und umfangreich der verarbeitete Lehrstoff ist.

Möge das Gesamtwerk dazu beitragen, dafs die Kenntnis fruchtbarer Elementarmethoden sich in weiteren Kreisen verbreite und zur Bearbeitung neuer Gebiete anrege, die bisher nur mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung in Angriff genommen werden konnten. Die Fachlehrer aber mögen aus dem reichen Inhalte, besonders aus den Beispielen, dasjenige entnehmen, was sie zur Belebung des Unterrichts für geeignet halten. Die geschichtlichen und litterarischen Bemerkungen aber mögen jeden Leser anregen, auch die Originalwerke zu studieren, natürlich auch solche, die nur mit den Mitteln der höheren Analysis bearbeitet sind. Geschieht dies, dann werden auch andere den Versuch machen, zu diesem oder jenem schönen Gebiete der Raumgeometrie den elementaren Zugang zu eröffnen und auch Methoden zu ersinnen, die frei von umständlichem Rechnungsapparate sind. Aus der Anschauung der Raumgebilde heraus, aus ihrem rein geometrischen Charakter lassen sich bisweilen ohne Hilfe jeder Art von Koordinaten — die, von den natürlichen Koordinaten abgesehen, doch immer etwas künstlich Herangezogenes bleiben — die schönsten Beziehungen in einer Einfachheit entwickeln, die auch manchen geschulten Analytiker überraschen dürfte. Steiner und Möbius leisteten in dieser Hinsicht Gewaltiges. Möchten recht bald ebenbürtige Nachfolger erscheinen, die imstande sind, die Macht der Elementarmathematik in ähnlicher Weise zu verstärken und ihren Herrschaftsbereich zu erweitern!

Hagen i. W., im August 1902.

Dr. G. Holzmüller.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Simpsonsche Regel, Schichtenformel und konforme Abbildung und ihre Anwendungen auf die Berechnung der Längen, Flächen und Inhalte stereometrischer Gebilde und ihrer Momente verschiedener Ordnung.

§§ 1 bis 193.

Zweiter Abschnitt.

Anwendungen der bisherigen Berechnungsmethoden auf die Kegelschnittsflächen zweiten Grades und auf die mit ihnen zusammenhängenden Körper.

§§ 194 bis 261.

Dritter Abschnitt.

Nachtrag über Katenoid, Gaufssche Pseudosphäre und Minimal-Schraubenregelfläche.

Geschichtliche Nachweise

befinden sich an folgenden Stellen: Über Zuordnung von ebenen Kurven und Flächen zum Zweck der Rektifizierung und Flächenbestimmung, § 81. Geschichtliches über Trägheits- und Centrifugalmomente, § 260. Über Delaunaysche Flächen, z. B. Katenoid, über Minimalschraubenflächen, § 273.

Nachweise über die verschiedenen Anwendungen

werden in diesem Bande unterlassen, da fast der ganze Inhalt den Anwendungen gewidmet ist.

Erster Abschnitt.

Simpsonsche Regel, Schichtenformel und konforme Abbildung und ihre Anwendungen auf die Berechnung der Längen, Flächen und Inhalte stereometrischer Gebilde und der Momente verschiedener Ordnung dieser Gebilde.

α) Homogene Punktsysteme und ihre Momente erster Ordnung.

§ 1) Homogene Punktsysteme. Man denke sich jeden Punkt eines räumlichen Punktsystems mit der Masse *1* behaftet, deren Definition z. B. im Sinne der Mechanik geschehen kann, sei es nach dem absoluten oder dem technischen Mafssysteme, was hier gleichgültig ist. Ein solches Punktsystem soll als ein homogenes bezeichnet werden.

§ 2) Statisches Moment des homogenen Punktsystems. Fällt man von jedem Punkte des Systems aus auf eine beliebige Ebene ein Lot e, so nennt man das Produkt $e.1$ aus e und der Masse *1* das statische Moment M des Punktes in Bezug auf diese Ebene. Das gesamte statische Moment des Systems ist dann $M = e_1 + e_2 \ldots + e_n = \sum e$. Wählt man als Bezugsebenen die Koordinatenebenen, so hat man in Bezug auf diese die statischen Momente

$$1)\quad \begin{cases} M_{yz} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum x, \\ M_{zx} = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = \sum y, \\ M_{xy} = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sum z. \end{cases}$$

· § 3) **Schwerpunkt des homogenen Punktsystems.** Die Gesamtmasse des Punktsystems sei gleich $n \cdot 1 = n$. Wo mufs man sich diese vereinigt denken, um in Bezug auf die Koordinatenebene dieselben statischen Momente zu erhalten?

Man hat z. B. zu setzen $n \cdot x_s = \sum x$. Daraus und aus den entsprechenden Gleichungen findet man als Koordinaten des gesuchten Punktes

$$2)\quad \begin{cases} x_s = \frac{1}{n} \sum x = \frac{1}{n} M_{yz}, \\ y_s = \frac{1}{n} \sum y = \frac{1}{n} M_{zx}, \\ z_s = \frac{1}{n} \sum z = \frac{1}{n} M_{xy}. \end{cases}$$

Dies ist also der Punkt mittlerer Entfernung von den Koordinatenebenen oder der Schwerpunkt des Punktsystems. Schon in Band I, Seite 20 bis 22 wurde gezeigt, dafs es sich um den Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene handelt, und dafs man ihn unabhängig von jeder Ebene finden kann mit Hilfe gewisser Teilungen $1:1$, $2:1$, $3:1$, $4:1$ ..., die dort beschrieben sind, wobei die Punkte auch in beliebiger Reihenfolge aufeinander folgen können.

Legt man die Bezugsebene durch den Schwerpunkt selbst, so ist der Schwerpunktsabstand von ihr, also auch der mittlere Abstand von ihr, gleich Null, also ist auch $\sum x = 0$, $\sum y = 0$, $\sum z = 0$, sobald der Koordinatenanfang in den Schwerpunkt gelegt wird.

§ 4) **Verschiebungssatz für statische Momente.** Verschiebt man z. B. die yz-Ebene parallel zu sich selbst um e_1, so wird in Bezug auf die neue Ebene das statische Moment $M_{y_1 z_1} = M_{yz} - n e_1$, wie leicht zu zeigen ist. Ver-

schiebt man die drei Koordinatenebenen um e_1, bezw. e_2, e_3, so erhält man

$$3)\qquad \begin{cases} M_{y_1 z_1} = M_{yz} - ne_1, \\ M_{z_1 x_1} = M_{zx} - ne_2, \\ M_{x_1 y_1} = M_{xy} - ne_3, \end{cases}$$

Der Anfangspunkt ist dann verschoben um

$$e = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2},$$

und zwar ist $e_1 = e\cos\alpha$, $e_2 = e\cos\beta$, $e_3 = e\cos\gamma$, wenn α, β, γ die Winkel sind, welche die Gerade e mit den Koordinatenachsen bildet.

Der in 3) liegende Satz soll heifsen, der **Verschiebungssatz für die statischen Momente.**

§ 5) **Er lautet am einfachsten, wenn die Koordinatenebenen ursprünglich durch den Schwerpunkt gingen;** denn dann sind M_{yz}, M_{zx}, M_{xy} gleich Null, und es wird einfacher in Bezug auf die durch den Punkt e_1, e_2, e_3 gelegten Parallelebenen

$$4)\qquad M_{y_1 z_1} = -ne_1, \; M_{zx} = -ne_2, \; M_{xy} = -ne_3.$$

Daraus folgt $\frac{M_{y_1 z_1}}{n} = -e_1$ u. s. w. und dadurch wird bestätigt, dafs für solche Verschiebungen, wie schon gesagt, **der Schwerpunkt der Punkt mittleren Abstands bleibt.**

§ 6) **Drehungssatz für statische Momente.** Dreht man das Koordinatensystem z. B. um die Z-Achse um einen Winkel α, so geht, wie leicht zu zeigen, jeder Abstand x über in den Abstand

$$\xi = OA + AD = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

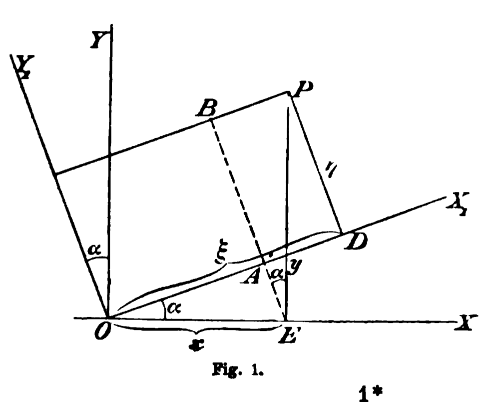


Fig. 1.

jeder Abstand y in

$$\eta = EB - AE = y \cos a - x \sin \alpha,$$

während z unverändert bleibt.

Die neuen Momente würden also

$$M_{\eta z} = \sum \xi = \sum (x \cos \alpha + y \sin \alpha) = \cos \alpha \sum x + \sin \alpha \sum y$$
$$M_{z\xi} = \sum \eta = \sum (y \cos \alpha - x \sin \alpha) = \cos \alpha \sum y - \sin \alpha \sum x$$
$$M_{\xi\eta} = \sum \zeta = \sum z$$

oder

$$5) \quad \begin{cases} M_{\eta z} = \cos \alpha \, M_{yz} + \sin \alpha \, M_{zx}, \\ M_{z\xi} = \cos \alpha \, M_{zx} - \sin \alpha \, M_{yz}, \\ M_{\xi\eta} = M_{xy}. \end{cases}$$

Dieser leicht auf die Drehung um die anderen Achsen auszudehnende Satz soll bezeichnet werden als der Drehungssatz für die statischen Momente des Punktsystems.

Weil diese Momente die Abstände nur in der ersten Potenz enthalten, sollen sie als Momente erster Ordnung bezeichnet werden, weil sie aber auf Ebenen bezogen werden, als Planmomente. Es handelt sich also um Planmomente erster Ordnung.

§ 7) Homogene Massenbelegung von Linien, Flächen und Körpern. Handelt es sich um eine kontinuierliche Punktfolge, d. h. um eine Gerade oder um eine Kurve, so ist diese als homogen zu betrachten, sobald unendlich kleine Teilchen der Linie, die von gleicher Länge sind, gleichviel homogene Punkte, also dieselbe Masse enthalten. Dabei ist es aber bequem, jede Längeneinheit mit der Masse 1 zu belegen, so dafs der Länge l die Masse $l \cdot 1 = l$ entspricht.

Handelt es sich um eine Fläche, so ist es bequem, die Flächeneinheit mit der Masse 1 zu belegen, so dafs der Fläche F die Masse $F \cdot 1 = F$ entspricht.

Handelt es sich um einen Körper, so ist es bequem, die körperliche Raumeinheit mit der Masse 1 zu belegen, so dafs dem Inhalte J die Masse $J \cdot 1 = J$ entspricht.

[Im absoluten Mafssystem ist die zum Quadratcentimeter gehörige Masseneinheit das Gramm. In der technischen Mechanik ist die Masse $m = \frac{p}{g}$, wo p das Gewicht z. B. in Kilogrammen, g die mittlere Freifallbeschleunigung, z. B. 9,81 m bedeutet. Zweckmäfsiger aber ist es, wenn $g = 9{,}81$ m gesetzt ist, das Gewicht in Tonnen zu nehmen, wenn $g = 981$ cm gesetzt ist, das Gewicht in Gewichtsgrammen zu geben.]

Der Begriff des Schwerpunktes bleibt dann derselbe; er ist für das Gebilde der Punkt mittleren Abstandes in Bezug auf jede beliebige Ebene. Das statische Moment bleibt das Produkt aus Schwerpunktsabstand und Gesamtmasse. Bei der vorgeschlagenen Belegungsart ist also z. B. in Bezug auf eine beliebige Ebene für Linien, Flächen und Körper bezw.

6) $$M = e_s l,\quad M = e_s F,\quad M = e_s J.$$

[Diesen Momenten erster Ordnung gegenüber könnte man auch von Momenten von der Ordnung 0 sprechen, in denen also nur x^0, y^0, z^0 vorkommen würden. Da aber $x^0 = 1$, $y^0 = 1$, $z^0 = 1$ ist, so handelt es sich dabei lediglich um die Gesamtmasse, also bei einem Punktsystem um n (Anzahl der Punkte), bei einem Liniensystem um l, bei einem Flächensystem um F, bei einem Körpersystem um J.]

§ 8) Das Axialmoment erster Ordnung. Man denke sich von jedem Punkte des gegebenen Systems aus auf eine beliebige Achse im Raume ein Lot r gefällt. Dann soll für jeden mit der Masse 1 belegten Punkt der Ausdruck $r.1$ sein Moment erster Ordnung in Bezug auf diese Achse heifsen, so dafs es sich um ein Axialmoment erster Ordnung handelt. Das gesamte Axialmoment des Systems ist dann

7) $$M_a = r_1 + r_2 + \ldots r_n = \sum r.$$

Handelt es sich um die drei Koordinatenachsen, so kann man die Momente mit M_x, M_y, M_z bezeichnen.

Eine Drehung des Systems um die Achse ändert das Axialmoment des Systems nicht. In Bezug auf die Z-Achse ist

8) $$M_z = \sum r = \sum \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Durch Parallel-Verschiebung der Achse nach einem Punkte mit den Koordinaten e_1, e_2 und 0 geht das Moment über in

9) $$M' = \sum \sqrt{(x - e_1)^2 + (y - e_2)^2}.$$

Der Ausdruck

10) $$M_{s_1} - M_s = \sum \sqrt{(x - e_1)^2 + (y - e_2)^2} - \sum \sqrt{x^2 + y^2}$$

giebt den Einflufs der Parallelverschiebung an. Der Verschiebungssatz ist aber hier von geringerer Wichtigkeit.

Von etwas gröfserer Wichtigkeit ist der Ausdruck

11) $$r_m = \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n} = \frac{1}{n} \sum r = \frac{1}{n} M_a,$$

der den mittleren Abstand oder mittleren Radius des Punktsystems in Bezug auf die Achse bedeutet.

Bei einer Drehung um die Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ϑ ist

12) $$v_m = r_m \vartheta$$

die mittlere Geschwindigkeit für die Punkte des Systems, denn jeder Punkt hat die Geschwindigkeit $v = r\vartheta$.

Da ferner jeder Punkt die Centrifugalkraft $mr\vartheta^2 = r\vartheta^2$ hat, so handelt es sich bei

13) $$k_m = mr_m\vartheta^2 = r_m\vartheta^2$$

um die mittlere Gröfse der Centrifugalkräfte.

Unter den hierher gehörigen Aufgaben ist folgende von Bedeutung: Vier Punkte mögen ein unregelmäfsiges Tetraeder bilden. Welche Lage mufs eine der Richtung nach gegebene Achse haben, damit das Axialmoment erster Ordnung einen Minimalwert annehme?

Für eine Linie, eine Fläche, einen Körper ist bezw.

14) $$r_m = \frac{M_a}{l}, \quad r_m = \frac{M_a}{F}, \quad r_m = \frac{M_a}{J}.$$

§ 9) Das Polarmoment erster Ordnung. Denkt man sich alle Punkte eines Punktsystems z. B. mit dem Anfangspunkte der Koordinaten (als Pol) verbunden, so giebt der Ausdruck $\varrho \cdot 1 = \varrho$, wobei ϱ die Entfernung bedeutet, das Polarmoment erster Ordnung in Bezug auf den

Nullpunkt. Das gesamte Polarmoment in Bezug auf den Nullpunkt ist also

15) $M_p = \varrho_1 + \varrho_2 + \cdot\cdot \varrho_n = \sum\varrho = \sum\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

der Punkt mittleren Abstandes von diesem Pole

16) $$\varrho_m = \frac{\varrho_1 + \varrho_2 + \cdot\cdot + \varrho_n}{n} = \frac{M_p}{n},$$

Verlegt man den Pol nach dem Punkte mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 so wird das Polarmoment in Bezug auf den neuen Pol

17) $$M'_p = \sum\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

und

18) $$\varrho'_m = \frac{M'_p}{n}$$

wird der Punkt mittleren Abstandes in Bezug auf diesen.

Handelt es sich um Linien, Flächen, Körper, so wird bezw.

19) $$\varrho_m = \frac{M_p}{l}, \quad \varrho_m = \frac{M_p}{F}, \quad \varrho_m = \frac{M_p}{J}.$$

Von Bedeutung ist die Frage: Welches ist der Punkt kleinster Abstandssumme für ein Punktsystem, für eine Linie, für eine Fläche, für einen Körper. Man versuche die Frage für vier Punkte (von derselben Masse) zu lösen, die ein unregelmäfsiges Tetraeder bilden. (Für das Dreieck handelt es sich bekanntlich um den Punkt, für den die drei Abstände unter Winkeln von 120^0 aufeinander folgen, wofür Steiner einen rein geometrischen Beweis gegeben hat.)

Der mittlere Abstand für die Punkte des Kugelkörpers in Bezug auf den Mittelpunkt ergiebt sich als $\frac{3}{4}r$. Für einen Kugelsektor von unendlich kleiner Grundfläche, die als eben betrachtet werden kann, hat nämlich der Schwerpunkt von der Grundfläche den Abstand $\frac{r}{4}$, also von der Spitze den Abstand $\frac{3}{4}r$. Dies gilt auch hier.

Schwieriger ist schon die Aufgabe, den mittleren Abstand für die Punkte des homogenen Würfels oder eines anderen regelmäſsigen Körpers vom Mittelpunkte zu berechnen.

Auch für die Flächen der regelmäſsigen Körper lassen sich solche Fragen aufstellen, ebenso für ihre Kantenkomplexe. Einiges davon kommt noch zur Sprache.

§ 10) Ist das Punktsystem ein ebenes, so hat es in Bezug auf jede Ebene des Raumes ein Planmoment erster Ordnung im obigen Sinne. Dieses ist am einfachsten, wenn die Bezugsebenen der Ebene des Punktsystems parallel ist, denn dann sind alle Abstände e dieselben, es handelt sich also um $M_e = e \, . \, n$. Steht die Bezugsebene senkrecht auf der des Punktsystems, so stimmt das Planmoment überein mit dem Axialmoment in Bezug auf die Schnittlinie der beiden Ebenen, d. h. mit dem statischen Momente des Systems in Bezug auf eine in seiner Ebene liegende Achse. Dies ist ein Sonderfall von dem Axialmomente des Punktsystems in Bezug auf eine beliebige im Raume liegende Achse. Steht diese Achse senkrecht auf der Ebene des Punktsystems, so ist das Axialmoment identisch mit dem Polarmomente des Systems in Bezug auf den Schnittpunkt.

β) Die Momente zweiter Ordnung für homogene Punktsysteme.

§ 11) Die Planmomente zweiter Ordnung in Bezug auf die Koordinatenebenen sind für Punktsysteme, bei denen jeder Punkt mit der Masse *1* belegt gedacht wird, definiert durch folgende Gleichungen:

$$1) \quad \begin{cases} T_{yz} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum x^2, \\ T_{zx} = y_1^2 + y_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum y^2, \\ T_{xy} = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = \sum z^2. \end{cases}$$

In der Mechanik sind sie die Trägheitsmomente in Bezug auf diese Ebenen.

§ 12) Trägheitsmittelpunkt. Wo müſste die Gesamtmasse n konzentriert zu denken sein, damit

ihr Planmoment in Bezug auf jede dieser Ebenen dasselbe sei? Es müfste z. B. sein $n x_m^2 = \sum x^2 = T_{yz}$. Entsprechendes gilt für die anderen Ebenen. Es handelt sich also um den Punkt mit den Koordinaten

$$2)\quad \begin{cases} x_m = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum x^2} = \sqrt{\dfrac{1}{n} T_{yz}}, \\ y_m = \sqrt{\dfrac{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum y^2} = \sqrt{\dfrac{1}{n} T_{zx}}, \\ z_m = \sqrt{\dfrac{z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum z^2} + \sqrt{\dfrac{1}{n} T_{xy}}. \end{cases}$$

Der Punkt heifst der Trägheitsmittelpunkt in Bezug auf die Koordinatenebenen.

Für homogene Linien, Flächen und Körper ist in Bezug auf die yz-Ebene

$$3)\qquad x_m = \sqrt{\frac{T_{yz}}{l}},\quad x_m = \sqrt{\frac{T_{yz}}{F}},\quad x_m = \sqrt{\frac{T_{yz}}{J}}.$$

Ebenso sind die y_m und z_m zu bilden.

§ 283) Verschiebungssatz für die Planmomente zweiter Ordnung. Verschiebt man die YZ-Ebene parallel zu sich selbst um $\pm e$, so wird

$$T' = (x_1 \pm e_1)^2 + (x_2 \pm e_1)^2 + \ldots + (x_n \pm e_1)^2$$
$$= (x_1^2 + x^2 + \ldots + x_n^2) \pm 2 e_1 (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + n e_1^2$$

oder

$$4)\qquad T' = T_{yz} \pm 2 e M_{yz} + n e_1^2.$$

Geht die ursprüngliche Bezugsebene (die YZ-Ebene), durch den Schwerpunkt des Punktsystems, so ist $M_{yz} = 0$. Dann wird in Bezug auf die zweite Bezugsebene

$$5)\qquad T' = T_{yz} + n e_1^2.$$

Daraus folgt: Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Ebene ist kleiner, als das in Bezug auf jede andere parallele Ebene genommene. Der Unterschied ist durch 5) angegeben.

Ferner wird

$$6) \qquad x'_m = \sqrt{\frac{T'}{n}} = \sqrt{\frac{T_{yz}}{n} + e_1^2}\,,$$

ändert man also den Flächenabstand um $\pm e$, so ändert sich nicht, wie beim Schwerpunkte, der Abstand des Trägheitsmittelpunktes um $\pm e$, sondern anders. Folglich:

Der Trägheitsmittelpunkt eines Punktsystems hat keine konstante Lage, die Lage ist vielmehr abhängig von der Lage der Bezugsebene.

Für $e_1 = \infty$ verschwindet in 6) $\frac{T_{yz}}{n}$ gegen e_1^2, dann also wird $x'_m = e_1$, d. h.:

In Bezug auf unendlich weit entfernte Ebenen ist der Trägheitsmittelpunkt eines Gebildes identisch mit dem Schwerpunkte. Je weiter also die Ebenen sich von einem endlichen Gebilde entfernen, um so näher rückt der Trägheitsmittelpunkt dem Schwerpunkte.

§ 14) Auch der Ausdruck

$$7) \qquad x_\sigma = \frac{T_{yz}}{M_{yz}} = \frac{x_1^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$$

tritt in der Mechanik auf, er soll aber hier noch nicht besprochen werden, sondern erst bei den Axial- bezw. Polarmomenten zur Sprache kommen. Auch er wird für die Verschiebung $e = \infty$ der Bezugsebene gleich dem Schwerpunktsabstande. Es ist ein Analogon zu dem Schwingungspunkte beim Pendel und hängt zusammen mit dem Angriffspunkte des seitlichen Wasserdrucks, sobald eine ebene Fläche an Stelle des Punktsystems tritt.

§ 15) Drehungssatz für das Planmoment zweiter Ordnung. Dreht man das Koordinatensystem z. B. um die Z-Achse, und zwar um den Winkel γ, so wird, wie in § 6

$$\xi = x\cos\gamma + y\sin\gamma\,,\quad \eta = y\cos\gamma - x\sin\gamma\,,\quad \zeta = z,$$

also

$$\xi^2 = x^2\cos^2\gamma + y^2\sin^2\gamma + xy\sin 2\gamma\,,$$
$$\eta^2 = y^2\cos^2\gamma + x^2\sin^2\gamma - xy\sin 2\gamma\,,$$
$$\zeta^2 = z^2.$$

Man erhält demnach als Trägheitsmoment für das neue Koordinatensystem

$$T_{\eta\zeta} = \cos^2\gamma \sum x^2 + \sin^2\gamma \sum y^2 + \sin 2\gamma \sum xy,$$
$$T_{\zeta\xi} = \cos^2\gamma \sum y^2 + \sin^2\gamma \sum x^2 - \sin 2\gamma \sum xy,$$
$$T_{\xi\eta} = \sum z^2,$$

oder

$$8)\quad \begin{cases} T_{\eta\zeta} = \cos^2\gamma\, T_{yz} + \sin^2\gamma\, T_{zx} + \sin 2\gamma \sum xy \\ T_{\zeta\xi} = \cos^2\gamma\, T_{zx} + \sin^2\gamma\, T_{yz} - \sin 2\gamma \sum xy \\ T_{\eta\xi} = T_{yx}. \end{cases}$$

Entsprechend ist es mit der Drehung des Koordinatensystems um die beiden anderen Achsen.

Der in 8) liegende Satz soll heifsen der **Drehungssatz für Planmomente zweiter Ordnung.** Er ist für die Statik, Dynamik und Stereometrie von Wichtigkeit.

Der Ausdruck $\sum xy$ werde vorläufig als das **Centrifugalmoment***) (oder Deviationsmoment) C_{xy} in Bezug auf die X- und Y-Achse bezeichnet.

Kennt man die Trägheitsmomente $T_{yz} = \sum x^2$ **und** $T_{zx} = \sum y^2$ **und das Centrifugalmoment** C_{xy}, **so kennt man auch die Trägheitsmomente in Bezug auf das durch Drehung um die** Z-**Achse entstehende Koordinatensystem.** (Vergl. 8.)

§ 16) **Axialmomente zweiter Ordnung. Denkt man sich von jedem Punkte des Punktsystems auf eine beliebige Achse Lote** r **gefällt, so bezeichnet man den Ausdruck**

$$9)\qquad T_a = r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 = \sum r^2$$

als das **axiale Trägheitsmoment des Punktsystems** oder als das **Axialmoment zweiter Ordnung in Bezug auf diese Achse.**

*) Der Grund für diese Benennungen wird später angegeben.

Handelt es sich z. B. um die X-Achse des Koordinatensystems, wobei $r^2 = y^2 + z^2$ ist, so ist

10) $$T_x = (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) + (z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2)$$
$$= T_{zx} + T_{xy}.$$

Jedes Axialmoment zweiter Ordnung ist also gleich der Summe von zwei Planmomenten, deren auf einander senkrechte Ebenen sich in jener Achse schneiden. Durch Drehung des Punktsystems um die Achse wird dieses Trägheitsmoment nicht geändert. (Dies läfst sich auch mittels der Addition der beiden ersten Gleichungen 8) leicht nachweisen.)

Dieser Satz soll als der Additionssatz für Planmomente zweiter Ordnung bezeichnet werden.

§ 17) Man denke sich das Axialmoment für den Fall gebildet, dafs der Anfang des Koordinatensystems der Schwerpunkt ist. Verschiebt man dann die X-Achse parallel zu sich selbst um $e = \sqrt{e_2^2 + e_3^2}$, so wird das neue Axialmoment

$$T_a = (T_{zx} + ne_2^2) + (T_{xy} + ne_3^2) = T_{zx} + T_{xy} + n(e_2^2 + e_3^2)$$

oder

11) $$T_a = T_x + ne^2.$$

Der Verschiebungssatz lautet also hier ebenso, wie bei den Planmomenten. Der Beweis wird ebenso geführt, wie bei der Verschiebung der Planmomente.

§ 18) Trägheitsmoment in Bezug auf eine in beliebiger Richtung durch den Koordinatenanfang gehenden Achse. Die Achse OA bilde mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen X, Y, Z die Winkel α, β, γ. Von einem beliebigen Raumpunkte x, y, z aus fälle man auf sie ein Lot $PQ = r_1$. Der Radius $OP = \varrho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, dann bildet er mit der neuen Achse einen Winkel ξ, der sich nach Band II § 32 bestimmt aus

$$\cos\xi = \cos\alpha \cos\alpha_1 + \cos\beta \cos\beta_1 + \cos\gamma \cos\gamma_1.$$

Demnach ist $r_1^2 = OP^2 - OQ^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (\varrho \cos\xi)^2$
$= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (\varrho \cos\alpha_1 \cos\alpha + \varrho \cos\beta_1 \cos\beta + \varrho \cos\gamma_1 \cos\gamma)^2$,
oder, da $\varrho \cos\alpha_1 = x_1$, $\varrho \cos\beta_1 = y_1$, $\varrho \cos\gamma_1 = z_1$ ist,

$$12)\quad r_1^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma)^2$$
$$= x_1^2 (1 - \cos^2\alpha) + y_1^2 (1 - \cos^2\beta) + z_1^2 (1 - \cos^2\gamma)$$
$$- 2x_1 y_1 \cos\alpha \cos\beta - 2y_1 z_1 \cos\beta \cos\gamma - 2z_1 x_1 \cos\gamma \cos\alpha,$$

oder

$$r_1^2 = x_1^2 \sin^2\alpha + y_1^2 \sin^2\beta + z_1^2 \sin^2\gamma$$
$$- 2x_1 y_1 \cos\alpha \cos\beta - 2y_1 z_1 \cos\beta \cos\gamma - 2z_1 x_1 \cos\gamma \cos\alpha.$$

Bildet man diesen Ausdruck für alle Massenpunkte des Punktsystems, so wird

$$13)\quad \sum r^2 = \sin^2\alpha \sum x^2 + \sin^2\beta \sum y^2 + \sin^2\gamma \sum z^2$$
$$- 2 \cos\alpha \cos\beta \sum xy - 2 \cos\beta \cos\gamma \sum yz - 2 \cos\gamma \cos\alpha \sum zx.$$

Das neue Trägheitsmoment ist also damit bestimmt.

Eine andere Formel erhält man aus 12), wenn man die erste Klammer mit $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$ multipliziert, wodurch nichts geändert wird, da dieser Faktor gleich *1* ist. Dann wird nach Weghebung der gleichen Posten:

$$r_1^2 = \cos^2\alpha\, (y_1^2 + z_1^2) + \cos^2\beta\, (z_1^2 + x_1^2) + \cos^2\gamma\, (x_1^2 + y_1^2)$$
$$- 2\, x_1 y_1 \cos\alpha \cos\beta - 2\, y_1 z_1 \cos\beta \cos\gamma - 2\, z_1 x_1 \cos\gamma \cos\alpha.$$

Für alle Massenpunkte der Punktschar erhält man

$$14)\quad \sum r^2 =$$
$$\cos^2\alpha \sum (y^2 + z^2) + \cos^2\beta \sum (z^2 + x^2) + \cos^2\gamma \sum (x^2 + y^2)$$
$$- 2 \cos\alpha \cos\beta \sum xy - 2 \cos\beta \cos\gamma \sum yz - 2 \cos\gamma \cos\alpha \sum zx$$

oder

$$15)\quad T_A = \cos^2\alpha\, T_x + \cos^2\beta\, T_y + \cos^2\gamma\, T_z$$
$$- 2 \cos\alpha \cos\beta\, C_{xy} - 2 \cos\beta \cos\gamma\, C_{yz} - 2 \cos\gamma \cos\alpha\, C_{zx}.$$

Kennt man also die Trägheitsmomente und die Centrifugalmomente eines Punktsystems in Bezug auf die Hauptachsen, so kann man das Trägheitsmoment auf jede durch den Koordinatenanfang

gehende Achse leicht berechnen; mit Hilfe des Verschiebungssatzes also für jede beliebige Ebene.

Diesen Satz kann man als den Drehungssatz für Axialmomente bezeichnen. Er kommt am Schlusse des Abschnittes noch einmal zur Sprache. Vorgeschrittene Leser können schon an dieser Stelle das dort behandelte Poinsotsche Centralellipsoid ableiten.

§ 19) Der mittlere Trägheitsradius für Axialmomente zweiter Ordnung ist in entsprechendem Sinne, wie vorher,

16) $$r_m = \sqrt{\frac{T_a}{n}},$$

für Linien, Flächen, Körper also bezw.

17) $$r_m = \sqrt{\frac{T_a}{l}}, \quad r_m = \sqrt{\frac{T_a}{F}}, \quad r_m = \sqrt{\frac{T_a}{J}}.$$

§ 20) Schwingungspunkt P eines homogenen Punktsystems in Bezug auf eine beliebige Achse. Man denke sich vom Schwerpunkt S auf die gewählte Achse das Lot $SA = e$ gefällt. Dann bezeichnet man A als Aufhängepunkt, AS als Schwerlinie. Auf dieser bestimme man einen Punkt P so, dafs

14) $$AP = l_\sigma = \frac{T_a}{M}$$

ist. Hier soll T_a das Trägheitsmoment des Punktsystems in Bezug auf die Achse sein, M das statische Moment der in S vereinigt gedachten Masse in Bezug auf die Achse, also $M = ne$, was identisch ist mit dem statischen Momente des Punktsystems in Bezug auf die durch A gelegte Normalebene zu der Schwerlinie SA. Den so bestimmten Punkt P bezeichnet man als den Schwingungspunkt des Systems in Bezug auf die Achse, l_σ als die entsprechende reduzierte Pendellänge. Ist T das Trägheitsmoment in Bezug auf die parallel durch den Schwerpunkt gelegte Achse, so hat man auch die Gleichung

15) $$l_\sigma = \frac{T + ne^2}{ne}.$$

(Dafs es sich um die reduzierte Pendellänge handelt, wird in der Mechanik elementar gezeigt.)

§ 21) Vertauschung von Schwingungs- und Aufhängepunkt (Reversionspendel).

Vertauscht man A und P, so wird jetzt die reduzierte Pendellänge

$$l_\sigma' = \frac{T_a'}{M'} = \frac{T + n(e - l_\sigma)^2}{n(e - l_\sigma)} = \frac{T + n\left(e - \frac{T + ne^2}{ne}\right)^2}{n\left(e - \frac{T + ne^2}{ne}\right)}$$

$$= \frac{T + n\frac{T^2}{n^2e^2}}{-n\frac{T}{ne}} = \frac{1 + \frac{T^2}{ne^2}}{-\frac{1}{e}}$$

oder

16) $$l_\sigma' = -\frac{T + ne^2}{ne} = -l_\sigma.$$

Vertauscht man also Aufhänge- und Schwingungspunkt, so bleibt die reduzierte Pendellänge dieselbe.

Die Wichtigkeit dieses Satzes für die Pendellehre der Mechanik und die Lehre vom freien Stofse ist bekannt. Besonders für ebene Punktsysteme, deren Ebene durch die Schwingungsachse geht oder senkrecht auf dieser steht, ergeben sich einfache Übungsbeispiele.

§ 22) Das Polarmoment zweiter Ordnung eines Punktsystems in Bezug auf einen beliebigen Pol. Sind die ϱ die Abstände vom Pol, so handelt es sich um

17) $$T_p = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \ldots + \varrho_n^2 = \sum \varrho^2.$$

Ist der Pol zugleich Anfangspunkt der Koordinaten, so ist

18) $$T_p = \sum(x^2 + y^2 + z^2) = T_{yz} + T_{zx} + T_{xy}$$
$$= \frac{1}{2}(T_x + T_y + T_z).$$

Folglich gilt der Satz:

Das Polarmoment zweiter Ordnung in Bezug auf einen Punkt ist gleich der Summe dreier Planmomente zweiter Ordnung, deren Bezugsebenen durch den Punkt gehen und zu einander normal sind, oder auch gleich der halben Summe dreier Axialmomente zweiter Ordnung, deren Achsen durch den Punkt gehen und aufeinander senkrecht stehen.

Liegt der Anfangspunkt der Koordinaten im Schwerpunkte und verschiebt man ihn um $e = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}$, so erhält man in derselben Weise, wie oben

19) $$T_p' = T_p + n e^2.$$

Für den Schwerpunkt hat man also das kleinste der Polarmomente zweiter Ordnung.

§ 23) Der Radius mittleren Abstandsquadrates in Bezug auf einen beliebigen Punkt bestimmt sich als

20) $$\varrho_m = \sqrt{\frac{T_p}{n}},$$

für Linien, Flächen und Körper, also bezw. durch

21) $$\varrho_m = \sqrt{\frac{T_p}{l}}, \quad \varrho_m = \sqrt{\frac{T_p}{F}}, \quad \varrho_m = \sqrt{\frac{T_p}{J}}.$$

Für den Fall des ebenen Punktsystems führe der Leser selbst die Betrachtungen aus, die oben hinsichtlich des Schwerpunktes und der statischen Momente ausgeführt wurden.

§ 24) Um solche Untersuchungen soll es sich im laufenden Abschnitte besonders handeln. Jedoch sollen auch Momente dritter und höherer Ordnung als Planmomente, Axialmomente und Polarmomente eingeführt werden, und zwar soll bei der p^{ten} Ordnung die Zahl p einen beliebigen reellen Wert annehmen können, so dafs es sich auch um negative, um gebrochene, um irrationale Ordnungen handeln kann. Auch die entsprechenden Centrifugalmomente sind näher zu untersuchen.

Die Bedeutung der Resultate liegt, wie schon angedeutet, in der Mechanik, wie schon der Schwerpunkt, die

statischen Momente, die Punkte mittlerer Geschwindigkeit und mittlerer Gröfse der Centrifugalkraft zeigten, ebenso die Centrifugalmomente und die Trägheitsmomente. Mit diesen hängt zusammen die kinetische Energie $E = m\frac{v^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2}$ bewegter Massen, die Beschleunigung der Drehung und Fortbewegung von Massen, die unter Achsenlagerung von schiefen Ebenen herabrollen oder mit Hilfe der Abwickelung von einem Faden sich senken oder durch irgend welche Triebkraft auf der Ebene rollend vorwärts getrieben werden. Insbesondere sei auch der Theorie des Schwungrades in Verbindung mit der Kurbelbewegung gedacht. Sodann geht die Schwingungsformel $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ des mathematischen Pendels über in $t = \pi\sqrt{\frac{T_a}{gM}}$, weil $l_a = \frac{T_a}{M}$ die reduzierte Pendellänge war. Schon oben war der Theorie des Reversionspendels gedacht. Damit hängt zusammen die Theorie des excentrischen Stofses und der freien Drehungsachse des gestofsenen Körpers im Anfange der Bewegung, die Lehre vom ballistischen Pendel und der schwingenden Hammerwerke, die Lehre vom Stofsmittelpunkte u. s. w.

Die Lehre von den Schwerpunkten und Trägheitsmomenten ebener Flächen ist von Wichtigkeit für die Theorie der Biegungsfestigkeit, der Strebfestigkeit und der Drehungsfestigkeit entsprechender Querschnitte und endlich auch für die Lehre vom seitlichen Wasserdruck.

Bisweilen werden diese Lehren als barycentrische Methoden bezeichnet. Dieser Name ist aber zu eng, und deshalb ist es besser, von einer Lehre von den Massenmomenten oder überhaupt von einer Geometrie der Massen zu reden. Denn auch die Lehre vom Newtonschen Potential, vom logarithmischen Potential, von der Gravitation, vom Magnetismus und der statischen Elektrizität, die Lehre von den stationären Strömungen der Wärme, der Elektrizität, der Flüssigkeiten finden hier ihre Förderung, wie noch andere Lehren der mathematischen Physik.

Wie aber schon die Guldinschen Regeln, die Betrachtrachtungen über abgeschrägte Körper, die Untersuchungen über Drehungsgebilde und Schraubenflächen zeigten, hat auch die Stereometrie von den angedeuteten Betrachtungen weiteren Ausbau zu erwarten. In erster Linie wird es sich dabei um die Inhalte von Säulen und ihrer Mantelflächen handeln, die bei beliebiger Grundfläche durch parabolische Cylinder von beliebig hoher Ordnung oder durch Drehungsparaboloide von beliebig hoher Ordnung oder durch Flächen abgeschnitten werden, die durch Affinität mit den letzteren zusammenhängen. Auch Flächenbetrachtungen sonstiger Art und Rektifikationen von Kurven kommen dabei zur Geltung.

Mit solchen elementaren Untersuchungen beschäftigt sich schon die Ingenieurmathematik des Verfassers in mehr technischer Hinsicht. Auch hier sollen technische Beispiele herangezogen werden, besonders aber wird die stereometrische Ausbeutung hervorgehoben werden. Diese Bemerkungen mögen über die Absichten des vorliegenden Abschnitts aufklären. Geschichtliches soll später mitgeteilt werden.

γ) Ausdehnung der Schichtenformel und der Simpsonschen Regel auf Körper, deren Querschnittsformel vom dritten Grade ist, mit Hilfe der Momenten- und Schwerpunktslehre.

§ 25) Um die Simpsonsche Regel, die für eine grofse Reihe von Körpern schon im zweiten Bande in der Form

$$J = \frac{h}{6}(U + O + 4M)$$

als richtig nachgewiesen war, bei den nachfolgenden Übungen benutzen können, soll sie hier von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachtet werden und dabei zu weitergehender Geltung gelangen.

Figur 2 stelle einen Rechteckskörper $ABCD$ vor, dessen Tiefe $= 1$ sei, so dafs sein Inhalt $J = a \,.\, h \,.\, 1 = ah$ ist. Man berechne das statische Moment der Querschnittsfläche EF in Bezug auf die Grundfläche. Es ist

$$M = a \,.\, 1 \,.\, y = ay,$$

wo y die Höhe AE bedeutet. Man denke sich unter Zugrundelegung der Längeneinheit eine Gerade von der Länge $l = ay$ gezeichnet und nach Art der Methode von Cavalieri in derselben Höhe an eine Gerade $A_1 D_1$ (z. B. an eine Senkrechte) angetragen. Dies geschehe an jeder Stelle. Dadurch entsteht ein Dreieckskörper $A_1 C_1 D_1$ von der Tiefe

Fig. 2.

1 und vom Inhalt $J_1 = (ah.1)\frac{h}{2} = \frac{ah^2}{2}$. Dieser veranschaulicht das statische Moment des ersten Körpers in Bezug auf die Grundfläche. Sein Inhalt hätte sich auch mit Hilfe des Schwerpunktes S als $(ah \,.\, 1)\frac{h}{2}$ ergeben.

§ 26) Jetzt bilde man für jeden Querschnitt $E_1 F_1$ des neuen Körpers das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche. Man findet $E_1 F_1 \,.\, y = (ay)y = ay^2$. Für jedes y denke man sich eine Gerade von der Länge $l = ay^2$ konstruiert und in derselben Höhe an die Gerade $A_2 D_2$ angesetzt. Macht man dies überall,

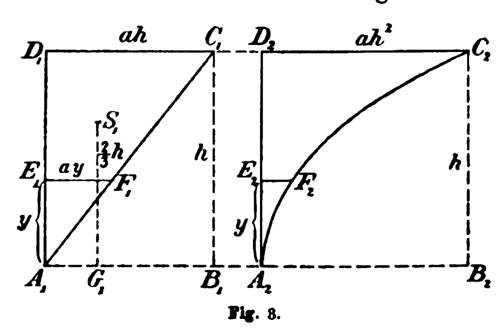


Fig. 3.

so entsteht ein parabolisch begrenzter Cylinder von der Tiefe 1 und von einem Inhalte, der nach Band II Seite 311 der dritte Teil des zugehörigen Rechteckskörpers $A_2 B_2 C_2 D_2$ ist, so dafs

$$J_2 = \frac{1}{3}(ah^2 \,.\, 1)\,h = \frac{ah^3}{3}$$

ist. Dieser Körper stellt zugleich das statische Moment des Dreieckskörpers in Bezug auf die Grundfläche dar. Man hätte daher den Inhalt auch mit Hilfe des Schwerpunktes S_1 und seine Höhe $S_1 G_1$ finden können. Die letztere ist nämlich $\frac{2}{3} h$, das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche also $\left(\frac{2}{3} h\right)\left(a \frac{h^2}{2} . 1\right) = \frac{a h^3}{3}$.

[Damit ist zugleich das **Trägheitsmoment des ersten Rechteckskörpers** in Bezug auf die Grundfläche gefunden, denn jedes seiner Raumelemente ist mit y^2 multipliziert worden. Sieht man dabei von der Tiefe 1 des Körpers ab, so hat man in $\frac{ah^3}{3}$ zugleich das **axiale Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf seine Grundlinie** gefunden. Verlegt man die horizontale Achse nach dem Schwerpunkte hin, so wird das Moment nach dem Verschiebungssatze um $n\left(\frac{h}{2}\right)^2$ verkleinert, wo n die Summe der Punkte angiebt. Da aber beim Rechteck alle Punkte (Flächenelemente) den Flächeninhalt darstellen, so handelt es sich um eine Verkleinerung vom Betrage $(ah)\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{ah^3}{4}$. Nun ist $\frac{ah^3}{3} - \frac{ah^3}{4} = \frac{ah^3}{12}$. Dieses also ist **das Trägheitsmoment des Rechtecks** $ABCD$ **in Bezug auf seine horizontale Schwerpunktsachse.**]

§ 27) In Figur 4 ist für jeden Querschnitt E_2F_2 oder ay^2 des parabolischen Cylinders das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche gleich $(ay^2)y = ay^3$. Denkt man sich in den entsprechenden Höhen die zugehörigen Geraden von der Länge ay^3 an A_3D_3 angetragen, so entsteht bei der angenommenen Tiefe 1 ein Körper, der von einer Kurve begrenzt wird, die als **Parabel dritter Ordnung** bezeichnet werden soll und der das statische Moment des parabolischen Körpers zweiter Ordnung in Bezug auf die Grundfläche darstellt. Nach Band I liegt aber der Schwerpunkt des letzteren in gleicher Höhe mit dem der dort gezeichneten

Pyramide, d. h. in der Höhe $\frac{3}{4}h$. Folglich ist das statische Moment gleich $\left(\frac{3}{4}h\right)\left(\frac{ah^3}{3}\right)=\frac{ah^4}{4}$. Der Inhalt des zuletzt gezeichneten Körpers ist also der vierte Teil von dem des zugehörigen Rechteckskörpers. Darin liegt der erste Fortschritt gegen die früheren Untersuchungen.

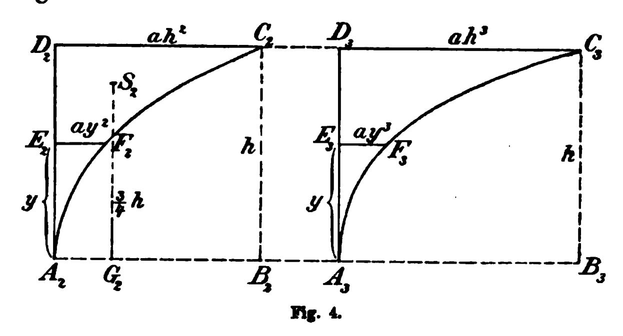


Fig. 4.

§ 28) [Damit ist zugleich das Trägheitsmoment des Dreieckskörpers $A_1B_1C_1$ in Bezug auf die Grundfläche gefunden, denn jedes seiner Raumelemente ist mit y^2 multipliziert worden. Sieht man von der Tiefe *1* ab, so hat man in $\frac{ah^4}{4}$ das axiale Trägheitsmoment des Dreiecks in Bezug auf die gezeichnete Grundachse. Will man es für die horizontale Schwerpunktsachse haben, so hat man zu verkleinern um $n\left(\frac{2h}{3}\right)^2$, wo n die Summe der Punkte bedeutet. Diese entspricht aber beim Dreieck der Fläche $\frac{ah^2}{2}$, die Verkleinerung hat also den Betrag $\frac{ah^2}{2}\left(\frac{2h}{3}\right)^2=\frac{2ah^4}{9}$.

Nun ist

$$\frac{ah^4}{4}-\frac{2ah^4}{9}=\frac{ah^4}{36}.$$

Bezeichnet man aber die Grundlinie ah des Dreiecks, wie es in der Regel geschieht, mit b, so ist das Träg-

heitsmoment des Dreiecks in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gelegte Parallele zur Grundlinie durch

$$T = \frac{b h^3}{36}$$

gegeben.

Zugleich ist das Moment dritter Ordnung des Rechteckskörpers $ABCD$ in Bezug auf die Grundfläche gefunden, und so erkennt man, dafs man mit Momenten höherer Ordnung fortfahren kann, so weit man will. Dies soll aber erst später geschehen, wo gewisse Reihen in die Betrachtung eintreten.]

§ 29) Da die behandelten Momente nur abhängig sind von der Entfernung der obersten Grenzfläche von der Grundfläche, so bleiben sie ungeändert bei beliebigen Verschiebungen und Drehungen in den entsprechenden Parallelebenen zur Grundfläche. Man kann also zunächst jeden Querschnitt beliebig in seiner Horizontalebene verschieben und drehen. Zweitens kann man ihn zu einer beliebigen ebenen Fläche desselben Inhalts umgestalten, ohne dafs die behandelten Momente sich ändern. Der Rechteckskörper kann also z. B. umgestaltet werden in ein schräges Parallelflach desselben Querschnitts, oder in ein beliebiges n-seitiges Prisma desselben horizontalen Querschnitts, oder in einen senkrechten oder schrägen Cylinder, wobei die Grundfläche ein Kreis, eine Ellipse u. s. w. sein kann, wenn nur der Flächeninhalt des Horizontalschnittes derselbe bleibt. Die Gestalt der Querschnitte darf sich sogar von unten nach oben kontinuierlich oder diskontinuierlich ändern, dabei darf sich jeder beliebig in seiner Ebene drehen. (Vergl. Figur 120 des ersten Bandes.) Alle diese Körper sollen, weil der Querschnitt die konstante Fläche $q = a$ oder $q = ay^0$ hat, als Körper von der Ordnung Null bezeichnet werden.

Entsprechendes gilt vom Querschnitt des Dreieckskörpers, der von der Form $q = ay$ ist. Die hierher gehörigen Körper sollen als Körper von der Ordnung *1* bezeichnet werden.

Entsprechend führt der parabolisch bewegte Körper mit dem Querschnitt $q = ay^2$ zu Körpern von der Ordnung *2*,

und der von der kubischen Parabel begrenzte zu Körpern von der Ordnung *3*.

§ 30) Denkt man sich jetzt die am einfachsten gestalteten Körper (von der Tiefe *1*) dieser vier Ordnungen zu einem zusammengelegt, so erhält man nach Obigem folgendes.

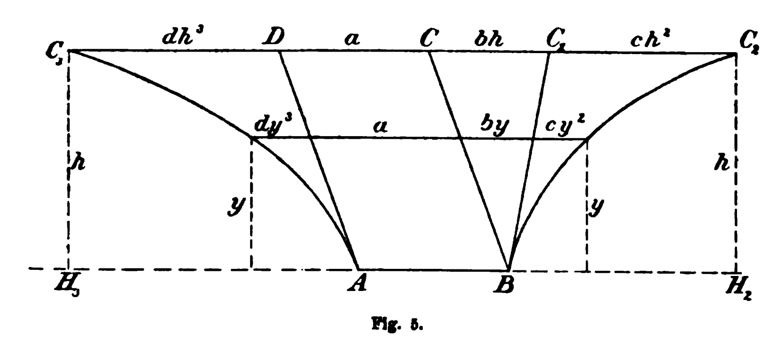


Fig. 5.

Ist der Querschnitt in jeder Höhe y von der Form $q = a + by + cy^2 + dy^3$, so ist der Inhalt durch folgenden Ausdruck gegeben:

1) $$J = ah + b\frac{h^2}{2} + c\frac{h^3}{3} + \frac{dh^4}{4}.$$

Denkt man sich nur die drei ersten Körper zusammengelegt, ist also der Querschnitt von der Form $q = a + by + cy^2$, so ist das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche von der Form

2) $$M = \frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4}.$$

Denkt man sich nur die beiden ersten Körper zusammengesetzt, ist also der Querschnitt von der Form $q = a + by$, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundfläche von der Form

3) $$T = \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^4}{4}.$$

Für den ersten Körper allein ist das Planmoment dritter Ordnung von der Form

$$4)\qquad M_3 = \frac{ah^4}{4}.$$

Da diese Formeln gewissermaſsen durch Berechnung unendlich dünner Horizontalschichten und ihre Summierung entstanden sind, werden sie vielfach als Summenformeln bezeichnet, zweckmäſsiger aber dürfte, besonders für die Verallgemeinerungen, der Name Schichtenformel sein, die Methode der Berechnung kann man als die Methode der unendlich dünnen Schichten bezeichnen. Wichtig ist die Bemerkung, daſs die untersuchten Momente bei allen Cavalierischen Umgestaltungen der besprochenen Art **invariant** sind.

§ 31) Hierher gehörige Körper sind die Prismen und Cylinder, die Kegel und Kegelstumpfe, die Pyramiden und Pyramidenstumpfe, die sämtlichen Prismatoide und was nach Band II mit ihnen zusammenhängt, also Kugel, Kugelschicht, Kugelkalotte, Ellipsoid, Ellipsoidschicht, Ellipsoidkalotte, Schicht des einfachen Hyperboloids, Schicht und Kalotte des zweifachen Hyperboloids, Schicht und Kalotte des Paraboloids, Schicht des vom hyperbolischen Paraboloid begrenzten Halbtetraeders, und zwar sind bei den genannten von Flächen zweiten Grades begrenzten Körpern nicht nur die Drehungskörper, sondern auch die allgemeinsten Körper dieser Art gemeint, also die dreiachsigen.

Daſs diese sämtlich hierher gehören, wird sich auch im nächsten Abschnitt zeigen, in dem die Simpsonsche Regel nur als eine andere Schreibweise der Schichtenformel 1) auftreten wird. Ihre Geltung für die genannten Körper war aber schon in Band II nachgewiesen. Ferner gehören hierher sämtliche Körper des Heinzeschen Systems (vergl. Band II), denen sich aber noch beliebig viele andere Gestalten beifügen lassen, die von Heinze übersehen sind.

Man denke sich z. B. einen Körper, dessen Querschnitte inhaltsgleiche Rechtecke sind, derart z. B., daſs die der

X-Achse parallelen Seiten durch die Gleichung $x = ky^p$, die der Z-Achse parallelen durch die Gleichung $z = k_1 y^{-p}$ bestimmt sind, so daſs der Querschnitt $q = kk_1 y^p y^{-p} = kk_1$ ist, dann hat man einen Körper von der Ordnung Null. Die Mittellinie der Reckteсke kann dabei eine Gerade sein.

Sind die einen Rechtecksseiten durch $x = ky^{p+1}$, die anderen durch $z = k_1 y^{-p}$ bestimmt, so hat man die Querschnittsformel

$$q = kk_1 y^{p+1} . y^{-p} = kk_1 y,$$

also einen Körper von der Ordnung 1. Ebenso ist es mit

$$q = ky^{p+2} . k_1 y^{-p} = kk_1 y^2,$$
$$q = ky^{p+3} . k_1 y^{-p} = kk_1 y^3.$$

Alle diese Formen gehören den hier behandelten Körpern an. Statt der Rechtecksflächen kann man aber z. B. auch die den Rechtecken einbeschriebenen Hauptellipsen nehmen, auch kann man statt der Rechtecke schiefwinklige Parallelogramme nehmen u. s. w. Da hier p wegfällt, kann es jeden beliebigen reellen Wert annehmen. Darin liegt eine ganz aufserordentliche Erweiterung des Geltungsbereichs.

§ 32) Ferner gehören hierher zahlreiche Drehungskörper. Für die vom Profile

$$x = \sqrt{a + by + cy^2 + dy^3}$$

ist der Querschnitt

$$q = \pi x^2 = \pi (a + by + cy^2 + dy^3).$$

Den Profilen $x = k\sqrt{y}$ (Parabel), $y = k\sqrt{y^3} = ky^{\frac{3}{2}}$ (semikubische Parabel), $x = a\sqrt{y} + b\sqrt{y^3}$, entsprechen der Reihe nach die Querschnitte

$$q = \pi k^2 y, \quad q = \pi k^2 y^3, \quad q = \pi [a^2 y + 2aby^2 + b^2 y^3],$$

die ebenfalls hierher gehören.

§ 33) Sonstige abgeleitete Körper. Prismen und Drehungskörper lassen sich, wie schon gesagt, durch Cavalierische Verschiebung und Drehung beliebig umwandeln, ohne aus dem obigen Bereiche herauszutreten. Dies kann ganz willkürlich, aber auch gesetzmäfsig geschehen.

Man kann z. B. die geradlinige Mittellinie in eine Schraubenlinie verwandeln und dabei zugleich einen von Schraubenflächen begrenzten Körper erhalten. Die Mittellinie des senkrechten Kreiskegels oder der Pyramide kann man in eine Kugelloxodrome verwandeln und so loxodromische Gewinde erhalten. Die Mittellinie des Drehungshyperboloids kann man in eine Schraubenlinie, in eine hyperboloidische Loxodrome u. s. w. verwandeln. Kurz, jeder Drehungskörper kann in mannigfacher Weise umgewandelt werden, ebenso die durch die Querschnittsgleichungen

$$q = ky^p \,.\, k_1 y^{-p} = kk_1\,, \qquad q = ky^{p+1} \,.\, k_1 y^{-p} = kk_1 y\,,$$
$$q = ky^{p+2} \,.\, k_1 y^{-p} = kk_1 y^2, \quad q = ky^{p+3} \,.\, k_1 y^{-p} = kk_1 y^3$$

charakterisierenden Körper rechtwinkligen Querschnittes und die ihnen verwandten.

Die Zahl der so zu behandelnden Körperformen ist also als unendlich grofs zu betrachten. Für alle läfst sich der Inhalt, für die im Querschnitte bis zum zweiten Grade reichenden das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche, für die im Querschnitt bis zum ersten Grade reichenden auch das Trägheitsmoment für die Grundfläche berechnen. Aus dem statischen Momente und dem Inhalte ergiebt sich die Schwerpunktshöhe durch die Gleichung $h_s = \frac{M}{J}$ aus dem Trägheitsmomente und dem Inhalte die Höhe des Trägheitsmittelpunktes oder der Trägheitsabstand durch die Formel $y_m = \sqrt{\frac{T}{J}}$.

Auch die letztgenannten Formeln sind invariant für die betreffenden Umgestaltungen.

§ 34) Der Zusammenhang mit der Simpsonschen Regel liegt nun für die Inhaltsformeln in folgendem:

1) Für Querschnitte (vom Grade Null) $q = a$ giebt die Simpsonsche Regel

$$\frac{h}{6}(U + O + 4M) = \frac{h}{6}(a + a + 4a) = ah$$

den richtigen Inhalt.

2) Dasselbe gilt für Querschnitte (vom Grade 1) $q = by$. Die Regel führt nämlich auf

$$\frac{h}{6}(U + O + 4M) = \frac{h}{6}\left(o + bh + 4\frac{bh}{2}\right) = \frac{bh^2}{2},$$

denn dies ist ebenso der richtige Inhalt.

3) Dasselbe gilt vom Querschnitte (vom Grade 2) $q = cy^2$, denn es wird

$$\frac{h}{6}(U + O + 4M) = \frac{h}{6}\left[o + ch^2 + 4c\left(\frac{h}{6}\right)^2\right] = \frac{ch^3}{3} = J.$$

4) Dasselbe vom Querschnitte (vom Grade 3) $q = dy^3$, da

$$\frac{h}{6}(U + O + 4M) = \frac{h}{6}\left[o + dh^3 + 4d\left(\frac{h}{2}\right)^3\right] = \frac{dh^4}{4}.$$

ebenfalls der richtige Inhalt ist.

5) Legt man nun diese vier Querschnitte zusammen, ist also

$$q = a + bh + ch^2 + dh^3,$$

so giebt nach dem Cavalierischen Prinzip auch hier

$$\frac{h}{6}[U + O + 4M] = ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$$

den richtigen Inhalt. Häufig ist aber die Schichtenformel der Simpsonschen vorzuziehen, besonders da, wo es sich bei der Querschnittsformel nur um ein Glied oder um zwei Glieder, bei der Simpsonschen Regel aber nur um alle drei Querschnitte handelt.

§ 35) Aber auch für die statischen Momentformeln ist die Simpsonsche Regel für Querschnitte bis zum zweiten Grade brauchbar. Bezeichnet man also das Moment für den untersten, obersten und mittleren Querschnitt mit M_u, M_0 und M_m, so giebt dann

$$\frac{h}{6}[M_u + M_0 + 4M_m]$$

das richtige statische Moment in Bezug auf die Grundfläche.

Ist endlich der Querschnitt höchstens vom ersten Grade, so ist auch

$$\frac{h}{6}[T_u + T_0 + 4\,T_m]$$

das richtige Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Grundfläche. Die Beweise liegen in den obigen Betrachtungen und brauchen nicht besonders wiederholt zu werden. Auch Schwerpunktshöhen und die Höhen der Mittelpunkte der Planmomente höherer Ordnung können so bestimmt werden.

Es sei bemerkt, dafs es gelungen ist, bis zu diesem Punkte jede Benutzung unendlicher Reihen zu vermeiden. Solche sollen erst jetzt herangezogen werden, um eine wichtige Verallgemeinerung zu ermöglichen, obwohl die meisten der zu besprechenden Beispiele nur auf die bisherigen Untersuchungen begründet werden sollen.

δ) Ausdehnung der Schichtenformeln auf Parabeln p^{ter} Ordnung und auf die entsprechenden Körper und ihre Momente.

§ 36) In einigen Lehrbüchern der Elementarmathematik wird bewiesen, dafs für ganzes positives p und für $n = \infty$

$$1)\qquad \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

ist. Andere weisen nach, dafs diese Formel auch für gebrochene und irrationale p gilt, auch für negative $p > -1$. (Die Beweise findet man z. B. in Band III des methodischen Lehrbuchs des Verfassers und im Teil I seiner Ingenieurmathematik. Auch in Schloemilchs algebraischer Analysis wird die Formel elementar bewiesen.)

Ist $x = ky^p$ eine Parabel p^{ter} Ordnung $(p > -1)$, so läfst sich der Inhalt nach obiger Formel leicht berechnen. Teilt man die Höhe AD (in Figur 6) in n gleiche Teile $\frac{h}{n}$, so haben die in der Figur angedeuteten Rechtecke der Reihe nach den Inhalt

$$\frac{h}{n}\cdot k\left(\frac{h}{n}\right)^p,\quad \frac{h}{n}\cdot k\left(\frac{2h}{n}\right)^p,\quad \frac{h}{n}k\left(\frac{3h}{n}\right)^p,\ldots,\frac{h}{n}k\left(\frac{nh}{n}\right)^p,$$

die Inhaltssumme für sämtliche Rechtecke ist also

$$F = k\,h^{p+1}\frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}.$$

Macht man n unendlich grofs, so fallen erstens die störenden Treppenräume weg (jeder ist unendlich klein zweiter Ordnung, die Anzahl nur erster Ordnung), zweitens nimmt der Bruch den in 1) dargestellten Wert an. Es wird also die Fläche ACD

$$2)\qquad F = k\frac{h^{p+1}}{p+1},$$

d. h. die Parabel p^{ter} Ordnung schneidet vom Rechteck $ABCD$ den $(p+1)^{ten}$ Teil ab.

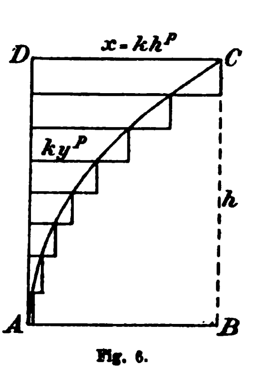


Fig. 6.

Das statische Moment und das Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundfläche, die Schwerpunktshöhe und der Trägheitsabstand werden ebenso

$$3)\qquad M = k\frac{h^{p+2}}{p+2},$$

$$4)\qquad T = k\frac{h^{p+3}}{p+3},$$

$$5)\qquad h_s = \frac{p+1}{p+2}\,h,$$

$$6)\qquad y_t = \sqrt{\frac{p+1}{p+3}\cdot h^2} = h\sqrt{\frac{p+1}{p+3}}.$$

Unsere Betrachtung soll sich nur auf den ersten Quadranten beziehen. Die übrigen bieten nichts Neues und ihre Behandlung kann dem Leser überlassen bleiben.

§ 37) Daraus folgt im Sinne der obigen Betrachtungen folgender für $p > -1$ (bezw. für $p > -2$ und $p > -3$) auch auf beliebige reelle p ausdehnbare Satz:

Ist der Querschnitt q eines Körpers zu berechnen nach der Formel

$$1)\qquad q = a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots + ky^p,$$

so ist sein Inhalt bis zur Höhe h gegeben durch

$$2)\qquad J = ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \ldots + \frac{kh^{p+1}}{p+1},$$

sein statisches Moment in Bezug auf die Grundfläche durch

$$3)\qquad M = \frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4} + \ldots + \frac{kh^{p+2}}{p+2},$$

sein Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe Fläche durch

$$4)\qquad T = \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^4}{4} + \frac{ch^5}{5} + \ldots + \frac{kh^{p+3}}{p+3},$$

und ebenso sind die höheren Momente leicht zu berechnen.

Die Schwerpunktshöhe ergiebt sich durch

$$5)\qquad h_s = \frac{M}{J} = \frac{\frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \ldots + \frac{kh^{p+2}}{p+2}}{\frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \ldots + \frac{kh^{p+1}}{p+1}},$$

was sich noch durch h kürzen läfst, ohne dadurch übersichtlicher zu werden.

Der Mittelpunkt des Planmoments zweiter Ordnung hat die Höhenlage

$$6)\qquad h_t = \sqrt{\frac{T}{J}} = \sqrt{\frac{\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^4}{4} + \ldots + \frac{kh^{p+3}}{p+3}}{\frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \ldots + \frac{kh^{p+1}}{p+1}}},$$

§ 38) [Daſs die Simpsonsche Regel hier nicht mehr brauchbar ist, ergiebt sich aus folgendem: Für $p=4$, d. h. für $x=ey^4$ würde sie geben

$$\frac{h}{6}[U+O+4M]=\frac{h}{6}\left[e\,.\,o^4+eh^4+4e\left(\frac{h}{2}\right)^4\right]=\frac{5eh^5}{24},$$

während es heiſsen muſste $\frac{5}{25}eh^5=\frac{eh^5}{5}$; für $p=5$ giebt sie

$$\frac{h}{6}\left[f\,.\,o^5+f\,.\,h^5+4f\left(\frac{h}{2}\right)^5\right]=\frac{9}{48}fh^6,$$

während es heiſsen müſste $\frac{8}{48}fh^6=f\frac{h^6}{6}$ u. s. w. Sie kann daher weiterhin nicht einmal als Annäherungsformel benutzt werden. Der Fehlerfaktor $\frac{1}{6}\left[\frac{p-5}{p+1}+\frac{1}{2^{p-2}}\right]$ wächst mit zunehmendem p schlieſslich auf $\frac{1}{6}$ an.]

§ 39) **Form der Parabeln p^{ter} Ordnung im ersten Quadranten.** a) Ist $p>0$, so steigen die Parabeln $x=ky^p$ im ersten Quadranten aufwärts. Die von der Ordnung $p=2$ und $p=\frac{1}{2}$ sind gewöhnliche Parabeln, die von der Ordnung $p=3$ und $p=\frac{1}{3}$ sind kubische Parabeln. Zwischen 1 und 2 und zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ liegen die Parabeln mit $p=\frac{3}{2}$ und $p=\frac{2}{3}$, welche semikubische Parabeln sind, u. s. w.

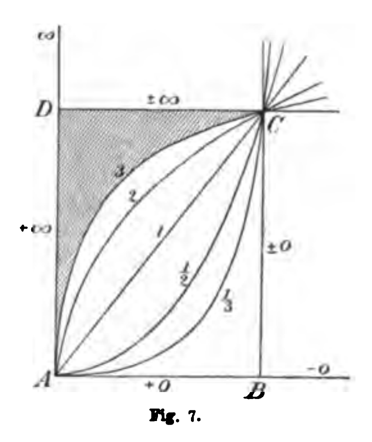


Fig. 7.

Ist $p>1$, so ist die Parabel nach unten konkav, ist $0<p<1$, so ist die Parabel nach unten konvex. Die

Diagonale ist von der Form $x = k \cdot y^1$. [Ist $k = 1$, so hat die Gerade die Neigung 45^0, und dann sind innerhalb des Quadrates die Parabeln paarweise symmetrisch gegen die Diagonale.] Jede der in das Rechteck einbeschriebenen Parabeln schneidet von diesem den $(p+1)^{\text{ten}}$ Teil ab.

Demnach ist die Fläche

$$1)\qquad \overset{y_1}{\underset{0}{F}} = \frac{k\,y_1^{p+1}}{p+1}.$$

Der zwischen den Horizontalen in der Höhe y_1 und y_2 liegende Teil der schraffierten Fläche (bezw. der Inhalt des Körpers von Tiefe 1) ist

$$2)\qquad \overset{y_2}{\underset{y_1}{F}} = \frac{k\,y_2^{p+1}}{p+1} - \frac{k\,y_1^{p+1}}{p+1} = \frac{k}{p+1}\left(y_2^{p+1} - y_1^{p+1}\right).$$

Entsprechend ist das statische Moment in Bezug auf die Grundlinie AB

$$3)\qquad \overset{y_2}{\underset{y_1}{M}} = \frac{k}{p+2}\left(y_2^{p+2} - y_1^{p+2}\right),$$

das Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe Grundfläche

$$4)\qquad \overset{y_2}{\underset{y_1}{T}} = \frac{k}{p+3}\left(y_2^{p+3} - y_1^{p+3}\right).$$

Endlich ist die Schwerpunktshöhe für diese Horizontalstreifen

$$5)\qquad h_s = \frac{\overset{y_2}{\underset{y_1}{M}}}{\overset{y_2}{\underset{y_1}{F}}} = \frac{p+1}{p+2}\,\frac{y_2^{p+2} - y_1^{p+2}}{y_2^{p+1} - y_1^{p+1}},$$

der Trägheitsabstand

$$6)\qquad h_t = \sqrt{\frac{\overset{y_2}{\underset{y_1}{T}}}{\overset{y_2}{\underset{y_1}{F}}}} = \sqrt{\frac{p+1}{p+3}\cdot\frac{y_2^{p+3} - y_1^{p+3}}{y_2^{p+1} - y_1^{p+1}}}.$$

§ 40) Liegt p zwischen 0 und -1, so senken sich die Parabeln höherer Ordnung $x = ky^p$ im ersten Quadranten. Für die Fläche $\overset{y_1}{\underset{0}{F}}$ bleibt die Formel

$$\overset{y_1}{\underset{0}{F}} = \frac{ky^{p+1}}{p+1}$$

bestehen, aber die schraffierte Fläche umfaſst das Rechteck und den nach rechts bis ins Unendliche reichenden schraffierten

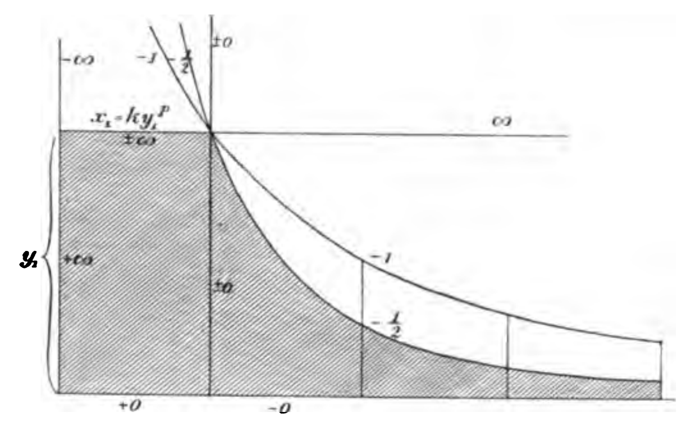


Fig. 8.

Bereich. Der Inhalt ist trotzdem endlich. Ebenso gelten die Formeln für $\overset{y_2}{\underset{y_1}{M}}$, $\overset{y_2}{\underset{y_1}{T}}$, für diesen Bereich.

(Für die Gravitationskurve $x = ky^{-\frac{1}{2}}$ ist z. B.

$$\overset{y_1}{\underset{0}{F}} = \frac{ky^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{ky^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2ky^{\frac{1}{2}},$$

d. h. das Doppelte des gezeichneten Rechtecks. Aus $y = \frac{k^2}{x^2}$ erkennt man den Zusammenhang mit dem Newton-

schen Gesetz. Es ist zweckmäfsiger, von dieser Formel auszugehen.)

§ 41) Für den Grenzfall $p = -1$ handelt es sich um die gleichseitige Hyperbel $x = ky^{-1}$. Für diesen Fall hört die Gültigkeit der Formel für $n = \infty$

$$\frac{1^p + 2^p + \ldots n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

auf. (Auch gilt diese nicht mehr für $p < -1$, denn links würde dabei positives, rechts negatives stehen.) Für diesen Fall ist, wie schon mehrfach gezeigt wurde,

$$\overset{y_2}{\underset{y_1}{F}} = (ky_1^{-1}) \cdot y_1 \, {}^e lg \frac{y_2}{y_1} = k \, {}^e lg \frac{y_2}{y_1},$$

also ist $\overset{y_2}{\underset{1}{F}} = k \, {}^e lg \, y_2$, dagegen würde $\overset{y_2}{\underset{0}{F}}$ unendlich grofs werden. Ebenso ist $\overset{\infty}{\underset{y_2}{F}}$ unendlich grofs.

Die Formeln

$$\overset{y_1}{\underset{0}{M}} = \frac{k}{p+2} y_1^{p+2} = \frac{k}{1} y_1 = ky$$

und

$$\overset{y_1}{\underset{0}{T}} = \frac{k}{p+2} y_1^{p+3} = \frac{k}{2} y^2$$

bleiben hier noch in Geltung. (Die Formel für M gilt sogar etwas weiter, für $p > -2$, die Formel für T gilt für $p > -3$.)

§ 42) Für $p < -1$ verlaufen die sich senkenden Kurven in dem Raume zwischen der Parabel von der Ordnung -1 und der durch C gelegten Horizontalen. Dabei ist jetzt der über CD liegende bis ins Unendliche sich ertreckende Bereich durch

$$\overset{\infty}{\underset{y_1}{F}} = -k \frac{y^{p+1}}{p+1}$$

berechnet. Da hier $p + 1$ negativ ist, mufste vor k ein negatives Zeichen gesetzt werden, damit Positives entstand. Ebenso ist für die von y_1 bis y_2 reichende Fläche jetzt

$$\overset{y_2}{\underset{y_1}{F}} = -\frac{k}{p+1}\left[y_2^{p+1} - y_1^{p+1}\right];$$

Ist $p < -2$, so ist

$$\overset{y_2}{\underset{y_1}{M}} = -\frac{k}{p+2}\left[y_2^{p+2} - y_1^{p+2}\right], \quad \overset{\infty}{\underset{y_1}{M}} = -k\frac{y_1^{p+2}}{p+2}.$$

Ist $p < -3$, so folgt

$$\overset{y_2}{\underset{y_1}{T}} = -\frac{k}{p+3}\left[y_2^{p+3} - y_1^{p+3}\right], \quad \overset{\infty}{\underset{y_1}{T}} = -k\frac{y_1^{p+3}}{p+3}.$$

Die elementaren Beweise für diese planimetrischen Dinge sind z. B. in dem methodischen Lehrbuche Band III und der Ingenieurmathematik Band I des Verfassers gegeben.

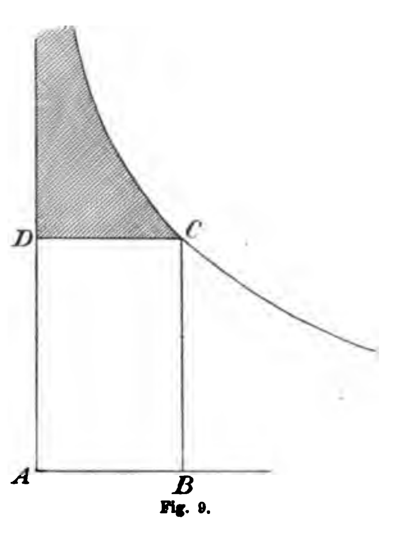


Fig. 9.

Der Ausdehnung der Formeln auf höhere Momente steht nichts im Wege. Das Nähere wird sich durch die Beispiele ergeben. — Damit sind auch die Körper p^{ter} Ordnung für jedes reelle p in dieser Hinsicht erledigt, sowohl für positives als auch für negatives, für ganzes und gebrochenes, d. h. für rationales, aber, wie eine leichte Grenzbetrachtung zeigt, auch für irrationales p. Auf die Berechnung der Seitenflächen ist aber diese Methode nicht ohne Weiteres anwendbar.

[Dafs es sich hier um die Umgehung von Integrationen von der Form $\int_{y_2}^{y_1} (a + by^{p_1} + cy^{p_2} + \ldots + ky^{p_k})\, dy$ handelt, bezw. um Beweise für die betreffenden Integralformeln, ist selbstverständlich.]

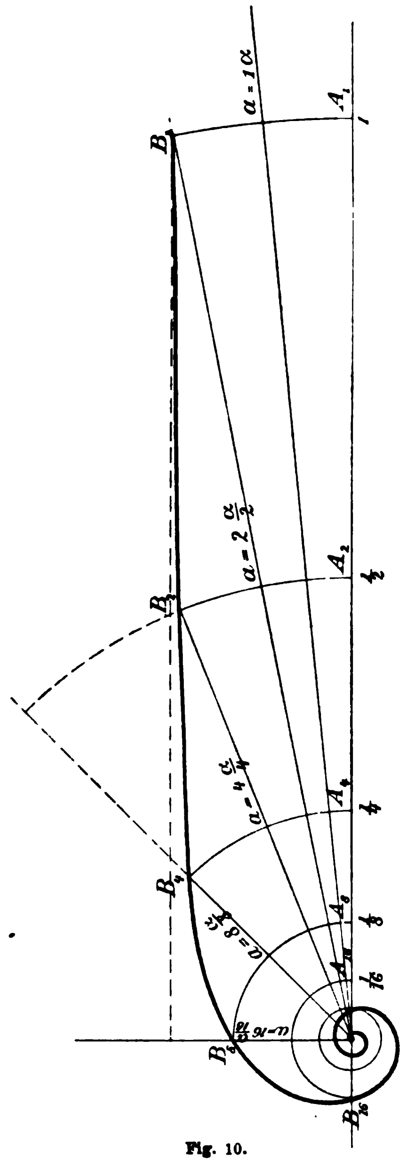


Fig. 10.

ε) Ausdehnung der Schichtenformel auf kreisförmige Schichten und ihre Anwendung auf die Polarmomente der Polarparabeln höherer Ordnung.

§ 43) Während bei den Parabeln höherer Ordnung die Flächen mit Hilfe horizontaler Geraden behandelt wurden, geschieht dies bei den hier zu besprechenden Kurven mit Hilfe konzentrischer Kreisbogen. Der einfachste Fall ist der der Formel $q = br^1$ entsprechende, der Ordnung wegen soll aber mit dem Falle $q = \hat{a}$ begonnen werden.

Man denke sich mit den Radien $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$ u. s. w. um einen Pol P Kreisbogen von gleicher Länge $\hat{a}$ geschlagen, die bei einer Geraden PA_1 beginnen. Ist der erste Centriwinkel gleich α, so werden die folgenden gleich 2α, 3α, 4α, 5α, u. s. w. Die Endpunkte bilden eine Kurve, die als Polarparabel (oder Spiralparabel) von der Ordnung Null bezeichnet werde. Durch Einschaltung

zahlreicher Bogen und durch Fortsetzung nach aufsen und innen kann sie mit beliebiger Genauigkeit konstruiert werden. Jeder schmale Parallelstreif, besser konzentrische Streif, ist von der Fläche $\frac{1}{n} \cdot \hat{a}$, wenn $\frac{1}{n}$ seine sehr kleine Breite ist. Folglich ist die Fläche von $r = 0$ bis $r = r_1$

$$\overset{r_1}{\underset{0}{F}} = a r_1 ,$$

von $r = r_1$ bis $r = r_2$ dagegen

$$\overset{r_2}{\underset{r_1}{F}} = a (r_2 - r_1).$$

In der Figur 10 sind die Centriwinkel 2π, π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{16}$, $\frac{\pi}{32}$, ... benutzt.

§ 44) Um die **Polarparabel** von der Ordnung 1 zu erhalten, schlage man mit den Radien 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ...

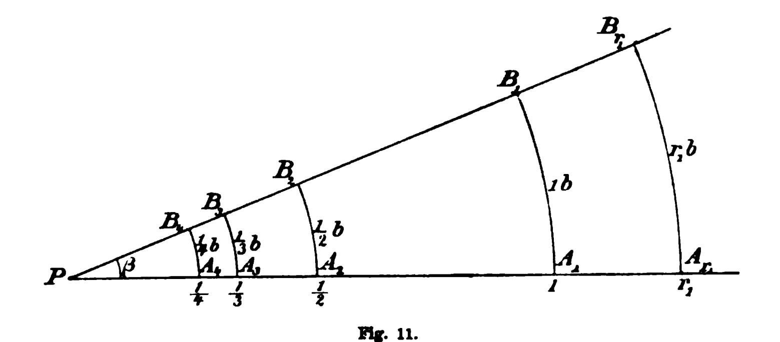


Fig. 11.

Kreisbogen von der Länge b, $b\frac{1}{2}$, $b\frac{1}{3}$, $b\frac{1}{4}$, ... so dafs zum Radius r_1 der Bogen $b r_1$ gehört. Dann gehört zu allen Bogen derselbe Centriwinkel $\beta = b$. Es handelt sich also

um die gerade Linie PB, als Polarparabel von der Ordnung *1*. Die Fläche von *0* bis r_1 wird.

$$\overset{r_1}{\underset{0}{F}} = \frac{b r_1^2}{2}, \text{ allgemeiner } \overset{r_2}{\underset{r_1}{F}} = \frac{b}{2}(r_2^2 - r_1^2).$$

(Für den ganzen Kreis ist $b = 2\pi$.)

§ 45) Bei der Polarparabel mit Kreisquerschnitt $q = cr^2$ schlage man mit den Radien $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ Bogen von der Gröfse

$$c, c\left(\frac{1}{2}\right)^2, c\left(\frac{1}{3}\right)^2, c\left(\frac{1}{4}\right)^2, \ldots$$

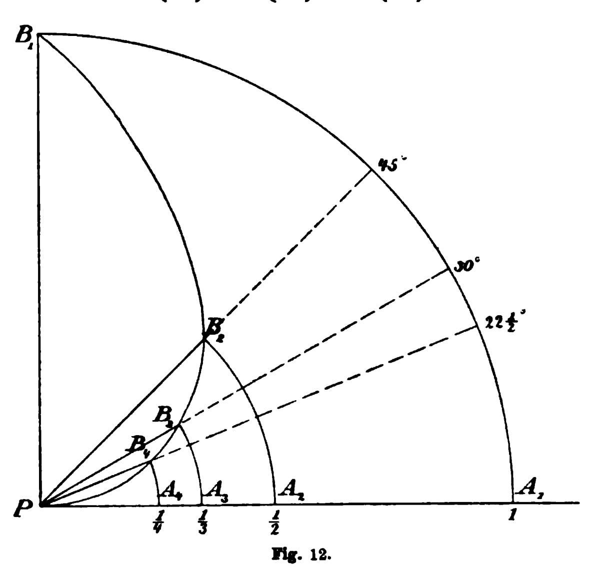


Fig. 12.

Dies giebt die Polarparabel von der Ordnung *2*, die auch als Archimedische Spirale bekannt ist. Auch sie kann bis $r = 0$ und bis $r = \infty$ fortgesetzt werden. Die Centriwinkel der Kreisbogen sind hier $\gamma = c, \frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{3}, \frac{\gamma}{4}$ u. s. w. Für die Fläche erhält man nach der Schichtenformel

$$\overset{r_1}{\underset{0}{F}} = c\frac{r_1^3}{3}, \overset{r_2}{\underset{r_1}{F}} = \frac{c}{3}(r_2^3 - r_1^3).$$

§ 46) So kann man fortfahren. Bis zur Ordnung *3* hat man Reihenbetrachtungen nicht nötig. Bis dahin kann man auch die Simpsonsche Formel anwenden. Dabei ist

$$\overset{r_2}{\underset{r_1}{F}} = \frac{r_2 - r_1}{6}\left[q_u + q_0 + 4q_m\right],$$

wobei z. B. beim dritten Grade

$$q_u = d r_1^3,\ q_0 = d r_2^3,\ q_m = d\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)^3$$

ist.

§ 47) Demnach lassen sich auch die Spiral- oder Polarparabeln gemischter Ordnung vom Querschnitt

$$q = a + br + cr^2 + dr^3$$

nach der Formel

$$\overset{r_1}{\underset{0}{F}} = ar_1 + b\frac{r_1^2}{2} + c\frac{r_1^3}{3} + d\frac{r_1^4}{4}$$

bezw.

$$\overset{r_2}{\underset{r_1}{F}} = \left(ar_2 + b\frac{r_2^2}{2} + c\frac{r_2^3}{3} + d\frac{r_2^4}{4}\right) - \left(ar_1 + b\frac{r_1^2}{2} + c\frac{r_1^3}{3} + d\frac{r_1^4}{4}\right)$$

berechnen, oder auch nach der obigen Simpsonschen Formel.

§ 48) Mit Hilfe der bei der Schichtenformel angewandten Reihen ist aber auch für jedes $p > -1$ die Fläche der Polarparabel p^{ter} Ordnung, d. h. vom Querschnitt $q = kr^p$ zu berechnen als

$$\overset{r_1}{\underset{0}{F}} = k\frac{r^{p+1}}{p+1},\ \overset{r_2}{\underset{r_1}{F}} = \frac{k}{p+1}\left(r_2^{p+1} - r_1^{p+1}\right).$$

§ 49) Für den Grenzfall $p = -1$ ist der Querschnitt von der Form

$$q = kr^{-1},$$

die Fläche von $r = 1$ aus gerechnet wird

$$\overset{r_1}{\underset{1}{F}} = k\,{}^e lg\, r_1,$$

von r_1 bis r_2 gerechnet

$$\overset{k}{\underset{r_1}{F}} = k^2 lg\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Dagegen würde $\overset{r_1}{\underset{0}{F}} = \infty$ werden.

§ 50) Für $p < -1$ gelten die Formeln

$$\overset{\infty}{\underset{r_1}{F}} = -k\frac{r_1^{p+1}}{p+1}, \quad \overset{r_2}{\underset{r_1}{F}} = -\frac{k}{p+1}\left[r_2^{p+1} - r_1^{p+1}\right].$$

Für $p > 0$ sind die Polarparabeln steigende, d. h. q wächst mit r_1.

Für $p = 0$ sind die Polarparabeln weder steigend noch fallend, d. h. q ist konstant.

Für $p < 0$ sind die Polarparabeln fallende, d. h. q nimmt ab, wenn r wächst.

§ 51) Die Polarmomente für die Polarparabel p^{ter} Ordnung sind der Reihe nach

$$\text{für } p > -2, \quad M_p = k\frac{r_1^{p+2}}{p+2},$$

$$\text{für } p > -3, \quad T_p = k\frac{r_1^{p+3}}{p+3},$$

u. s. w. Was bei $p = -2$ für M_p, bei $p = -3$ für T_p eintritt, stelle man ebenso fest, wie bei den gewöhnlichen Parabeln n^{ter} Ordnung, ebenso was für $p < -2$ bei M_p, für $p < -3$ bei T_p geschieht. Die Analogie ist eine vollkommene.

§ 52) Für die Spirale $q = kr^p$ ist der zu r_1 gehörige Kreisbogen $kr_1^p = r_1\vartheta$, und daraus folgt allgemein

$$\vartheta = k\frac{r^p}{r} = kr^{p-1}, \quad \text{es ist also } r = \sqrt[p-1]{\frac{\vartheta}{k}} = \left(\frac{\vartheta}{k}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Der Querschnitt $q = kr^p$ ist also, durch ϑ ausgedrückt

$$q = k\left(\frac{\vartheta}{k}\right)^{\frac{p}{p-1}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{p-1}}}\,\vartheta^{\frac{p}{p-1}} = k^{\frac{-1}{p-1}}\vartheta^{\frac{p}{p-1}} = k_1\,\vartheta^{\frac{p}{p-1}}.$$

Jede Polarparabel $q = kr^p$ läfst sich also auch betrachten als eine Polarparabel $q = k_1 \vartheta^{\frac{p}{p-1}}$, so dafs z. B.

$$\overset{\vartheta}{\underset{0}{F}} = k_1 \frac{\vartheta^{\frac{p}{p-1}+1}}{\frac{p}{p-1}+1} = k_1 \frac{\vartheta^{\frac{2p-1}{p-1}}}{\frac{2p+1}{p-1}}.$$

ist. Setzt man $\frac{p}{p-1} = p_1$, so ist die Berechnung ebenso bequem, wie vorher. Man kann aber von den Formeln mit ϑ ganz absehen.

§ 53) Ist der kreisförmige Querschnitt durch

1) $$q = a + br + cr^2 + dr^3 + \ldots + kr^p$$

gegeben, so ist die Fläche der Polarparabel gemischter Ordnung

2) $$\overset{r}{\underset{0}{F}} = a\frac{r}{1} + b\frac{r^2}{2} + c\frac{r^3}{3} + d\frac{r^4}{4} + \ldots + k\frac{r^{p+1}}{p+1},$$

das Polarmoment erster Ordnung in Bezug auf P ist

3) $$\overset{r}{\underset{0}{M_p}} = a\frac{r^2}{2} + b\frac{r^3}{3} + c\frac{r^4}{4} + \ldots + k\frac{r^{p+2}}{p+2},$$

das polare Trägheitsmoment in Bezug auf P wird

4) $$\overset{r}{\underset{0}{T_p}} = a\frac{r^3}{3} + b\frac{r^4}{4} + c\frac{r^5}{5} + \ldots + k\frac{r^{p+3}}{p+3}.$$

Hier bedeutet ferner

5) $$r_s = \frac{\overset{r}{\underset{0}{M_p}}}{\overset{r}{\underset{0}{F}}}$$

den mittleren Abstand der Flächenpunkte vom Punkte P,

6) $$r_t = \sqrt{\frac{\overset{r}{\underset{0}{T_p}}}{\overset{r}{\underset{0}{F}}}}$$

den mittleren Trägheitsradius in Bezug auf P,

7) $$r_\sigma = \frac{\overset{r}{\underset{0}{T_p}}}{\overset{r}{\underset{0}{M_p}}}$$

den Abstand des Schwingungspunktes von P, sobald P Aufhängepunkt der in ihrer Ebene pendelnden Fläche ist.

§ 54) Die Einführung der obigen konzentrischen Schichten ist nicht ganz so wichtig, wie die der Parallelschichten, aber es

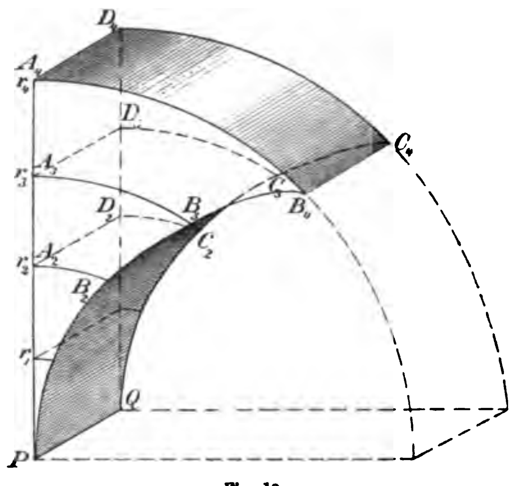


Fig. 18.

lassen sich doch sehr viele Probleme dadurch der elementaren Lösung zugänglich machen, die auch praktischen Wert haben. Stereometrische Inhaltsberechnungen u. dergl. sind damit zunächst nur für Körper von der Tiefe *1* gegeben. Wie

aber bei den Parabeln p^{ter} Ordnung die Drehung, Verschiebung und Umformung der Querschnitte in den Parallelschichten den Inhalt und die untersuchten Momente nicht beeinflussen, können auch hier innerhalb der Kreiscylinderflächen Drehungen, Verschiebungen und Umformungen stattfinden, die auf Inhalt und Polarmomente einflufslos bleiben, sobald nur die Flächeninhalte nicht geändert werden.

Dadurch lassen sich unzählige neue Gebilde für die Stereometrie herstellen, die der einfachsten Behandlung fähig sind. Von praktischem Werte aber scheint dies im allgemeinen nicht zu sein.

Selbstverständlich sind bei den Drehungen und Verschiebungen die cylindrischen Schichten als biegsam aufzufassen, Dehnungen aber dürfen nicht stattfinden.

Angenommen, in Figur 13) sei $ABCD$ cylindrisch, also in die Ebene abgewickelt ein Rechteck, so läfst sich in dieses die sogenannte Hauptellipse einzeichnen, deren Inhalt sich zu dem des Rechtecks verhält wie $\pi : 4$. Macht man dies in allen unendlich dünnen cylindrischen Schichten, so entsteht ein neuer Körper, dessen Inhalt $\frac{\pi}{4}$ des gezeichneten ist, dessen Polarmoment erster Ordnung in Bezug auf die Achse PQ ebenfalls $\frac{\pi}{4}$ vom Polarmoment erster Ordnung des ursprünglichen Körpers ist, dessen Trägheitsmoment in Bezug auf PQ ebenfalls $\frac{\pi}{4}$ vom Trägheitsmoment des ersten Körpers ist, u. s. w.

Man versuche sich z. B. auch den Körper vorzustellen, der entsteht, wenn jedes der cylindrischen Rechtecke in der zugehörigen cylindrischen Fläche um einen Winkel gedreht wird, der z. B. proportional dem Radius r ist. Dann würde man das Analogon für ein gewisses Schraubengewinde erhalten. J, M_p und T_p würden für den neuen Körper unverändert die alten Werte haben.

In diesem Sinne läfst sich allerdings mit Hilfe der cylindrischen konzentrischen Schichten dieselbe Mannig-

faltigkeit erreichen, wie mit den parallelen Schichten der Parabeln höherer Ordnung.

Davon aber kann hier abgesehen werden.

η) Die Momente der aus Parabeln und Polarparabeln höherer Ordnung entstehenden Drehungskörper.

§ 55) Die in Figur 14) dargestellte Parabel p^{ter} Ordnung $x = k y^p$ drehe sich um die Achse PQ. Der dadurch entstehende Körper kann als Paraboloid p^{ter} Ordnung bezeichnet werden, gehört aber hinsichtlich der Querschnittsformel

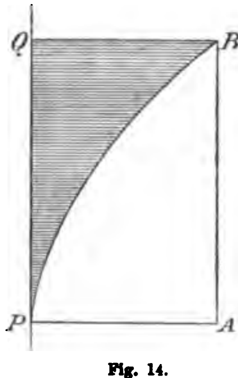


Fig. 14.

$$q = 2\pi \frac{x^2}{2} \pi x^2 = \pi k^2 y^{2p}$$

zu den Körpern von der Ordnung $2p$, was hier festgehalten werden mufs. [Die Drehung um PA giebt, da $y = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{p}}$ ist, das Paraboloid $\left(\frac{1}{p}\right)^{ter}$ Ordnung, welches aber unter denen der obigen Paraboloide sich bereits befindet, so dafs man nichts Neues hat.]

Das Polarmoment erster Ordnung der Kreisfläche mit Radius $x = k y^p$ ist für den Mittelpunkt von der Form

$$2\pi \frac{x^3}{3} = \frac{2}{3} \pi k^3 y^{3p},$$

das Polarmoment zweiter Ordnung (polares Trägheitsmoment) ist

$$2\pi \frac{x^4}{4} = \frac{\pi x^4}{2} = \frac{\pi}{2} k^4 y^{4p}.$$

Das Moment erster Ordnung der Kreisfläche in Bezug auf die Grundfläche PA ist

$$(\pi x^2) y = \pi k^2 y^{2p+1},$$

das Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe Ebene ist

$$(\pi x^2) y^2 = \pi k^2 y^{2p+2}.$$

§ 56) Mit Hilfe der Schichtenformel erhält man daraus für den von $y = 0$ bis $y = y_1$ gerechneten Körper folgendes:

1) $$\overset{y_1}{\underset{0}{J}} = \pi k^2 \frac{y_1^{2p+1}}{2p+1}$$

ist für $2p + 1 > 0$ der Inhalt des Körpers.

2) $$\overset{y_1}{\underset{0}{M_a}} = \frac{2\pi}{3} k^3 \frac{y_1^{3p+1}}{3p+1}$$

ist für $3p + 1 > 0$ das Moment erster Ordnung des Körpers in Bezug auf die Achse PQ.

3) $$\overset{y_1}{\underset{0}{T_a}} = \frac{\pi}{2} k^4 \cdot \frac{y_1^{4p+1}}{4p+1}$$

ist für $4p + 1 > 0$ das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Achse PQ.

4) $$\overset{y_1}{\underset{0}{M}} = \pi k^2 \frac{y_1^{2p+2}}{2p+2}$$

ist für $2p + 2 > 0$ das statische Moment des Körpers in Bezug auf die Grundebene PA.

5) $$\overset{y_1}{\underset{0}{T}} = \pi k^2 \frac{y_1^{2p+3}}{2p+3}$$

ist für $2p + 3 > 0$ das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Grundebene PA.

§ 57) Daraus folgt Schwerpunktshöhe des Körpers

$$h_s = \frac{\overset{y_1}{\underset{0}{M}}}{\overset{y_1}{\underset{0}{J}}} = \frac{2p+1}{2p+2} y_1,$$

mittlerer Trägheitsabstand

$$h_m = \sqrt{\frac{\overset{y_1}{\underset{0}{T}}}{\overset{y_1}{\underset{0}{J}}}} = \sqrt{\frac{2p+1}{2p+3} y_1^2} = y_1 \sqrt{\frac{2p+1}{2p+3}}.$$

Mittlerer Abstand der Körperpunkte von der Achse PQ

$$r'_m = \frac{\overset{y_1}{\underset{0}{M_a}}}{\overset{y_1}{\underset{0}{J}}} = \frac{2}{3} k \frac{2p+1}{3p+1} y_1^p = \frac{2}{3} \frac{2p+1}{3p+1} x_1.$$

Mittlerer Trägheitsabstand des Körpers in Bezug auf die Achse PQ

$$r''_m = \frac{\overset{y_1}{\underset{0}{T_a}}}{\overset{y_1}{\underset{0}{J}}} = \frac{1}{2} k^2 \frac{2p+1}{4p+1} y^{2p} = \frac{1}{2} \frac{2p+1}{4p+1} x_1^2.$$

Diese vier Formeln gelten für die Fälle, wo der Nenner gröfser als Null ist.

§ 57) Der Leser lege sich selbst zurecht, was in den angedeuteten Grenzfällen geschieht, die auf den natürlichen Logarithmus führen, und was endlich in den Fällen festzusetzen ist, für die p noch kleiner ist. Man hat nur nach den früher gegebenen Methoden zu verfahren.

Ebenso versuche man die Formeln für den Fall aufzustellen, dafs es sich um Parabeln gemischter Ordnung handelt, z. B. um

$$x = a + by + cy^2 + \ldots + ky^p.$$

Die Anwendbarkeit der Simpsonschen Regel ist dieselbe wie vorher.

§ 59) Nach diesen Methoden kann man auch Drehungskörper behandeln, die durch Polarparabeln höherer Ordnung PA begrenzt sind, wobei an Stelle der geradlinigen Parallelschichten des Hauptschnittes die von konzentrischen Kreisen gebildeten treten, die in § 54 behandelt wurden. Bei der Umdrehung um die gewählte Achse PQ gehen die Kreisschichten in Kugelschichten über, so dafs an Stelle der cylindrischen Schichten der Figur 12) jetzt Kugelkalotten entstehen. (Hierher gehört als besonderer Fall der Kugelsektor, bei dem PA eine gerade Linie ist.) Man kann nicht nur neben dem Inhalte die

Momente in Bezug auf die Achse PQ berechnen, sondern auch in Bezug auf den Punkt P und auf jede der durch P gelegten Normalen zu PQ. Ist die Umdrehung um PQ eine unvollständige, so kann man mit den Kugelschichten gewisse Cavalierische Verschiebungen auf den entsprechenden Kugelflächen vornehmen, ohne daſs in Bezug auf die Achse PQ sich die Momente ändern. Solche Verschiebungen sind auch möglich, ohne daſs sich irgend etwas in Bezug auf eine der zu PQ senkrechten durch P gehenden Achsen ändert.

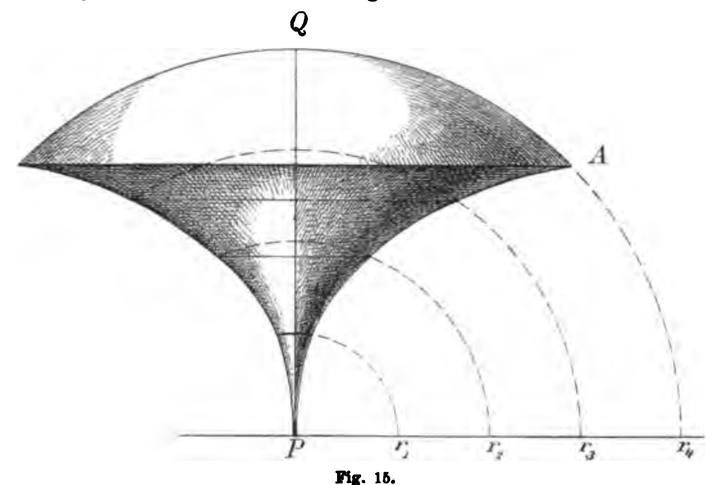


Fig. 15.

Diese Möglichkeiten werden nur angedeutet, die Tragweite der Methode festzulegen, denn von besonderer Bedeutung sind die so entstehenden Gebilde nicht. Dabei kann es sich um sphärische Dreiecke, Vielecke, überhaupt um sphärische Flächen handeln.

Eine wichtigere Ausdehnung der Schichtenformel soll aber im folgenden Abschnitt besprochen werden.

ϑ) Ausdehnung der Schichtenformel auf die Berechnung der Länge und der Momente für ebene Kurven und der Fläche und der Momente für die mit jenen zusammenhängenden Oberflächen.

§ 60) Die hier einzuschlagende Methode ist schon bei der Flächenberechnung für das Drehungsparaboloid an-

gewandt worden. Sie soll zunächst für die Parabel p^{ter} Ordnung erläutert werden, die durch die Gleichung

$$x = y^p$$

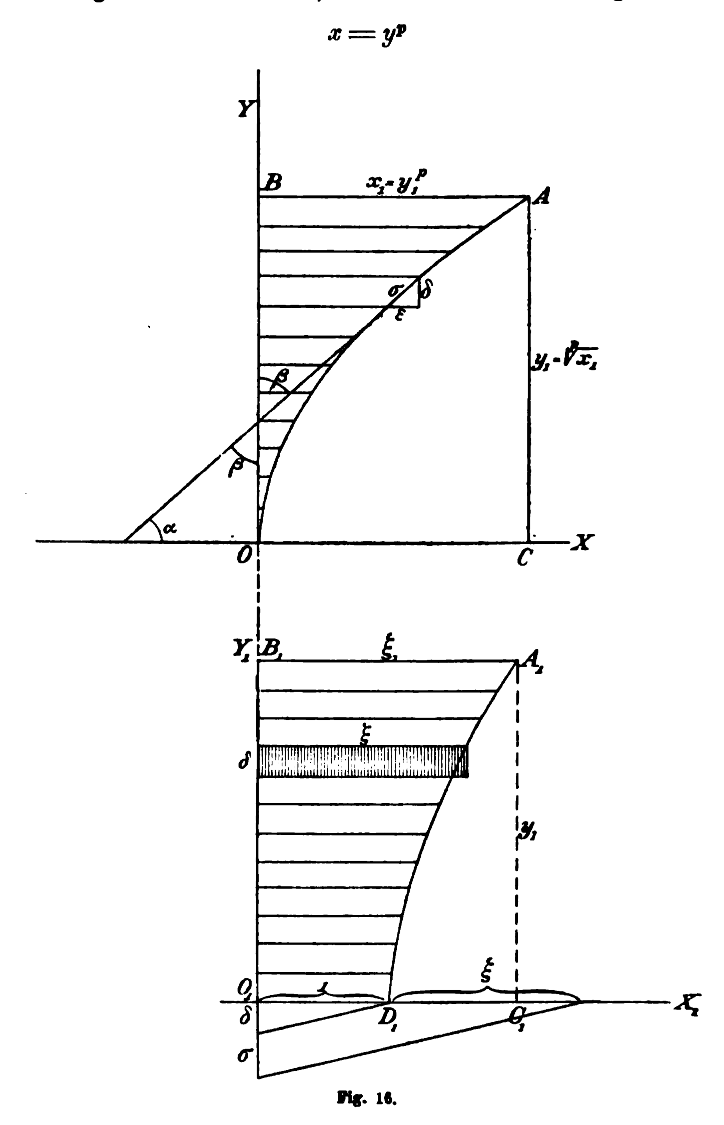


Fig. 16.

gegeben sei, wobei p zunächst eine ganze positive Zahl sein soll. Man denke sich, um das die Abstände y betreffende zu behandeln, die Achse der Y bis zur Höhe $OB = y_1$ in n gleiche Teile $\delta = \frac{y_1}{n}$ eingeteilt und durch die Teilpunkte horizontalen Parallele gelegt, durch welche die Kurve OA in kleine fast geradlinige Teilchen σ zerlegt wird, die von einander verschieden sind. Kennt man die Neigung β der Kurventangente in irgend einem Punkte P gegen die positive Richtung der Y-Achse, so ist dort auch $\frac{\sigma}{\delta} = \frac{1}{\cos\beta}$ bekannt. Selbstverständlich ist $\sum \sigma = s$ die Länge des Bogens OA (für die Grenze $n = \infty$).

Man denke sich nun auf der XY-Ebene in den Kurvenpunkten Lote von der Länge 1 errichtet; was eine zur Kurve gehörige cylindrische Fläche giebt. Dann hat jeder Streifen f dieser Fläche den Inhalt $\sigma . 1 = \sigma$. Dieses kleine „Rechteck" ist gleich einem andern von der Grundlinie $\delta = \frac{y_1}{n}$. Ist dessen Höhe gleich ξ, so bestimmt sie sich aus $\xi\delta = \sigma . 1$ als $\xi = \frac{\sigma . 1}{\delta} = \frac{\sigma}{\delta}$. Dieses ξ denke man sich mittels der Proportion $\xi : 1 = \sigma : \delta$ konstruiert, und in der entsprechenden Höhe y als Horizontale an die Y-Achse angetragen. Über dem entsprechenden δ hat man dann ein kleines Rechteck vom Inhalte $\delta\xi$ zu konstruieren, dessen Inhalt also mit dem des in gleicher Höhe liegenden cylindrischen Streifens um so genauer übereinstimmt, je kleiner $\delta = \frac{y_1}{n}$ genommen ist.

Denkt man sich dies an allen Stellen durchgeführt, so erhält man eine neue Kurve, deren von 0 bis y_1 gerechnete Fläche durch die Gleichung

$$\overset{y_1}{\underset{0}{F}} = \sum \delta . \xi = \sum \sigma . 1 \text{ oder } \overset{y_1}{\underset{0}{F}} = \delta \sum \xi = \sum \sigma$$

gegeben ist. Der **Flächeninhalt der neuen Kurve wird also durch dieselbe Zahl bezw. Formel dargestellt, wie die Bogenlänge der gegebenen Kurve.**

Damit ist der ersten Kurve eine von einer zweiten begrenzte Fläche zugeordnet, deren Berechnung mit der Kurve innig zusammenhängt.

§ 61) Die Gleichung der neuen Kurve ist zunächst nur in der Form $\xi = \frac{\sigma}{\delta} = \frac{n}{y_1} . \sigma = \frac{1}{\cos\beta}$ gegeben. Es fragt sich, ob $\frac{\sigma}{\delta}$ durch y in geschlossener Form ausgedrückt werden kann. Dies kann folgendermafsen geschehen. In dem kleinen Dreiecke bei P ist, wenn man die zugehörigen Koordinaten mit y und y_2 bezw. mit x und x_2 bezeichnet (wobei $x = y^p$, $x_2 = y_2^p$ ist),

$$\tan\beta = \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{x_2 - x}{y_2 - y} = \frac{y_2^p - y^p}{y_2 - y}.$$

Da p als ganze positive Zahl angenommen ist, geht die Division auf, und man erhält

$$\tan\beta = y_2^{p-1} + y_2^{p-2} . y + y_2^{p-3} . y^2 + \ldots + y_2 y^{p-2} + y^{p-1}.$$

Ist nun $\delta = \frac{y_1}{n}$ unendlich klein, so kann der ebenfalls unendlich klein werdende Unterschied $y_2 - y$ gegen die endlichen Längen y_2 und y vernachlässigt werden, d. h. man hat für die Grenze $y_2 = y$ zu setzen und erhält für die Parabel $x = y^p$

1) $$\frac{\varepsilon}{\delta} = \tan\beta = p y^{p-1}.$$

Nun war aber $\frac{\delta}{\sigma} = \cos\beta$, und da $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\beta}}$ ist, so folgt

$$\frac{\sigma}{\delta} = \frac{1}{\cos\beta} = \sqrt{1 + \tan^2\beta} = \sqrt{1 + (p y^{p-1})^2}.$$

Die Gleichung der neuen Kurve ist also

2) $$\xi = \sqrt{1 + (p y^{p-1})^2}.$$

Also: Zu jeder Parabel höherer Ordnung von der Gleichung $x = y^p$ (p ganz und positiv) gehört eine Kurve von der Gleichung $\xi = \sqrt{1 + (p y^{p-1})^2}$, deren Fläche von 0 bis y_1 gerechnet durch dieselbe Formel oder Zahl ausgedrückt wird, wie die Länge der ersten Kurve von der Höhe $y = 0$ bis $y = y_1$.

Kennt man also die Länge der ersten Kurve, so kennt man auch die Fläche der zweiten, kennt man umgekehrt die Fläche der zweiten, so kennt man die Länge der ersten. Die Aufgaben der Rektifikation und der Quadratur lassen sich also auf dieselbe Aufgabe zurückführen.

Handelt es sich um die Gleichung

$$x = k y^p,$$

so wird $\tan\beta = k \dfrac{y_2^p - y^p}{y_2 - y}$, und für die Grenze $y_2 = y$

$$\tan\beta = k p y^{p-1},$$

also

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + (k p y^{p-1})^2}}.$$

Die Gleichung der zugeordneten Kurve wird also

$$\xi = \sqrt{1 + (k p y^{p-1})^2}.$$

§ 62) Die Fläche, die durch Drehung der parabolischen Kurve OA um die X-Achse entsteht, ist durch dieselbe Formel auszudrücken, wie der Inhalt des durch Drehung der schraffierten Fläche der zweiten Kurve entstehenden Drehungskörpers. Nach Guldin ist daher der Schwerpunkt der parabolischen Kurve ebenso weit von der X-Achse entfernt, wie der der Fläche der zweiten Kurve. Dazu vergleiche man Band III §§ 90 bis 93, wo der Fall $p = 2$ behandelt wurde. Auch die verschiedenen Momente der Kurve in Bezug auf die X-Achse und die ihrer besprochenen Drehungsfläche stimmen mit denen der Fläche formal überein.

§ 63) Die Berechnungen von Kurvenlängen mit Hilfe der Schichtenformel sind im allgemeinen so umständlich, dafs die Aufgaben besser der höheren Mathematik überlassen

bleiben. Die Schwierigkeiten liegen darin, dafs hier der Ausdruck

$$\xi = \sqrt{1 + (py^{p-1})^2} = [1 + (py^{p-1})^2]^{\frac{1}{2}}$$

im allgemeinen für den Konvergenzbereich in binomischer Reihe zu entwickeln ist. Dies führt auf

$$3) \qquad \xi = 1 + \frac{1}{2 \,.\, 1}(py^{p-1})^2 - \frac{1}{2^2 \,.\, 1 \,.\, 2}(py^{p-1})^4$$
$$+ \frac{1 \,.\, 3}{2^3 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3}(py^{p-1})^6 - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2^4 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}(py^{p-1})^8 + \ldots$$

Die Fläche der zweiten Kurve wird also nach der Schichtenformel (innerhalb des Konvergenzbereichs)

$$4) \quad \overset{y_1}{\underset{0}{F}} = y_1 + \frac{1}{2 \,.\, 1} p^2 \frac{y_1^{2p-1}}{2p-1} - \frac{1}{2^2 \,.\, 1 \,.\, 2} p^4 \frac{y_1^{4p-3}}{4p-3}$$
$$+ \frac{1 \,.\, 3}{2^3 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3} p^6 \frac{y_1^{6p-5}}{6p-5} - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2^4 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} p^8 \frac{y_1^{8p-7}}{8p-7} + \ldots$$

Durch dieselbe Formel wird die Länge $\overset{y_1}{\underset{0}{s}}$ der parabolischen Kurve ausgedrückt. Die Summierung solcher Reihen ist das Umständliche bei der Sache.

§ 64) Für den Sonderfall $p = 2$ wird

$$\xi = 1 + \frac{1}{2 \,.\, 1}(2y)^2 - \frac{1}{2^2 \,.\, 1 \,.\, 2}(2y)^4$$
$$+ \frac{1 \,.\, 3}{2^3 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3}(2y)^6 - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2^4 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}(2y)^8 + \ldots$$

Die Fläche der zweiten Kurve wird also dargestellt durch die Reihe

$$\overset{y_1}{\underset{0}{F}} = y_1 + \frac{1}{2 \,.\, 1} 2^2 \frac{y_1^3}{3} - \frac{1}{2^2 \,.\, 1 \,.\, 2} 2^4 \frac{y_1^5}{5}$$
$$+ \frac{1 \,.\, 3}{2^3 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3} 2^6 \frac{y_1^7}{7} - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2^4 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} 2^8 \frac{y_1^9}{9} + \ldots$$

Und diese Reihe mufs für den Konvergenzbereich gleich

$$\frac{1}{2}\left[y_1\sqrt{1+4y_1^2}+\frac{1}{2}\,{}^e lg(\sqrt{1+4y_1^2}+2y_1)\right]$$

sein, wozu Band III §§ 90 bis 93 verglichen werde.

Dasselbe Resultat gilt für die Länge der Parabel $x=y^2$ oder $y=x^{\frac{1}{2}}$. In der Schlufsformel kann natürlich y_1 durch das zugehörige x_1 ersetzt werden.

§ 65) Durch Drehung um die X-Achse entsteht aus der Fläche der zweiten Kurve ein Drehungskörper, dessen cylindrische Schichten von der Gröfse

5) $$q=2\pi y\xi=2\pi y\sqrt{1+(py^{p-1})^2}$$

oder

$$q=2\pi y\left[1+\frac{1}{2}(py^{p-1})^2-\frac{1}{2^2.1.2}(py^{p-1})^4+\frac{1.3}{2^3.1.2.3}(py^{p-1})^6-\ldots\right]$$

oder

$$q=2\pi\left[y+\frac{1}{2}p^2y^{2p-1}-\frac{1}{2^2.1.2}p^4\cdot y^{4p-3}+\frac{1.3}{2^3.1.2.3}p^6y^{6p-5}-\ldots\right]$$

sind. Nach der Schichtenformel für Drehungsgebilde wird also der Inhalt

6) $$\overset{y_1}{\underset{0}{J}}=2\pi\left[\frac{y_1^2}{2}+\frac{1}{2}p^2\frac{y_1^{2p}}{2p}-\frac{1}{2^2.1.2}p^4\frac{y_1^{4p-2}}{4p-2}+\frac{1.3}{2^3.1.2.3}p^6\frac{y_1^{6p-4}}{6p-4}-\ldots\right].$$

Durch dieselbe Reihe wird die Fläche des Drehungskörpers der Parabel $x=y^p$ dargestellt.

§ 66) Für den Sonderfall $p=2$ wird daraus

$$\overset{y_1}{\underset{0}{J}}=2\pi\left[\frac{y_1^2}{2}+\frac{1}{2}2^2\frac{y_1^4}{4}-\frac{1}{2^2.1.2}2^4\frac{y_1^6}{6}+\frac{1.3}{2^3.1.2.3}2^6\frac{y_1^8}{8}-\ldots\right].$$

Nach Band III §§ 90 bis 93 wird aber der Inhalt auch dargestellt durch

$$\overset{y_1}{\underset{0}{J}} = \frac{\pi}{6}\left[\sqrt{1+4y_1^2}^{\,3} - 1\right].$$

In binomischer Reihe entwickelt giebt dies in der That

$$\frac{\pi}{6}\left[1+\frac{3}{2}(2y_1)^2+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2}(2y_1)^4-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{1.2.3}(2y_1)^6 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1.3}{2^3.1.2.3.4}(2y_1)^8 - \dots - 1\right],$$

oder da 1 sich weghebt und dann 3.2^2 herausgesetzt werden kann,

$$2\pi\left[\frac{y_1^2}{2}+\frac{2^2}{2}\frac{y_1^4}{4}-\frac{2^4}{2^2.1.2}\frac{y_1^6}{6}+\frac{1.3}{2^3.1.2.3}\frac{y_1^8}{8}-\dots\right]$$

und dies stimmt wirklich mit der obigen Reihe überein.

Durch die Reihe war nicht nur der Inhalt des zweiten Drehungskörpers, sondern auch die Fläche des Paraboloids dargestellt.

§ 67) Die Schwerpunktshöhe y_s für die Parabel höherer Ordnung $x = y^p$ und für die ihr zugeordnete **Fläche ist nun nach Guldin**

7) $$y_s = \frac{\overset{y_1}{\underset{0}{J}}}{2\pi \overset{y_1}{\underset{1}{F}}}$$

wo rechts für J und F die Reihensummen einzusetzen sind. Für den Fall $p = 2$ ist der Wert von y_s schon in Bd. III §§ 90 bis 93 dargestellt worden.

§ 68) **Es steht nun nichts im Wege, auch die** höheren Momente in Bezug auf die X-Achse **durch Reihen darzustellen, denn man hätte nur die Reihen für ξ mit $y^2, y^3, y^4, \dots$ zu multiplizieren und dann die Schichtenformel anzuwenden. Dabei zeigt sich, dafs die Multiplikation mit geraden Potenzen von y auf schwieriger zu summierende Reihen führt, die mit ungeraden Potenzen auf leichter zu**

summierende. Aber für allgemeines p häufen sich die Schwierigkeiten. Deshalb soll als Beispiel nur der Fall $p = 2$ behandelt werden.

Der entsprechende Drehungskörper der Fläche der zweiten Kurve kann behandelt werden als Unterschied eines Cylinders und eines Drehungshyperboloids, ebenso das Trägheitsmoment in Bezug auf die X-Achse als Unterschied zweier Trägheitsmomente. Im Abstande ξ giebt das entsprechende y der Hyperbel einen Kreis mit dem Trägheitsmomente $\frac{\pi y^4}{2}$, oder, da jetzt $\xi = \sqrt{1 + 4y^2}$ und daher $y = \sqrt{\frac{\xi^2}{4} - \frac{1}{4}}$ ist, mit dem Trägheitsmomente

$$q_\xi = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\xi^2}{4} - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{32}\left[\xi^4 - 2\xi^2 + 1\right].$$

Durch die Schichtenformel erhält man

$$\overset{\xi_1}{\underset{1}{T_1}} = \frac{\pi}{32}\left[\frac{\xi_1^5}{5} - \frac{2\xi_1^3}{3} + \xi_1\right] - \frac{\pi}{32}\left[\frac{1^5}{5} - \frac{2 \cdot 1^3}{3} + 1\right]$$

$$= \frac{\pi}{480}\left[3\xi_1^5 - 10\xi_1^3 + 15\xi_1\right] - \frac{\pi}{480} \cdot 8.$$

Dies ist abzuziehen vom Momente des Cylinders, d. h. von

$$\frac{\pi y_1^4}{2}\xi_1 = \frac{\pi}{32}\xi\left(\xi_1^4 - 2\xi_1^2 + 1\right) = \frac{\pi}{480}\left[15\xi_1^5 - 30\xi_1^3 + 15\xi_1\right].$$

Das Trägheitsmoment der zugeordneten Fläche in Bezug auf die X-Achse ist also

$$8) \qquad \overset{\xi_1}{\underset{0}{T}} = \frac{\pi}{480}\left[12\xi_1^5 - 20\xi_1^3 + 8\right].$$

oder

$$8^*) \qquad \overset{y_1}{T} = \frac{\pi}{480}\left[12\sqrt{1 + 4y_1^2}^{\,5} - 20\sqrt{1 + 4y_1^2}^{\,3} + 8\right].$$

Letzteres ist zugleich das Trägheitsmoment der Fläche des Drehungsparaboloids $x = y^2$ in Bezug

auf die Drehungsachse X, welches jetzt auch geschrieben werden kann

$$9) \quad \overset{y_1}{\underset{0}{T}} = \frac{\pi}{480}\left[12\sqrt{1+2x_1}^{\,5} - 20\sqrt{1+2x_1}^{\,3} + 8\right].$$

§ 69) Die entsprechende Reihenberechnung würde gegeben haben

cylindrische Schicht des Drehungskörpers $= 2\pi y\sqrt{1+(2y)^2} = 2\pi y\xi$,

Trägheitsmoment der Schicht $= 2\pi y^3\xi$ oder

$$10) \quad q = 2\pi y^3\left[1 + \frac{1}{2.1}(2y)^2 - \frac{1}{2^2.1.2}(2y)^4 + \frac{1.3}{2^3.1.2.3}(2y)^6 - \frac{1.3.5}{2^4.1.2.3.4}(2y^8) + \ldots\right]$$

oder

$$q = 2\pi\left[y^3 + \frac{1}{2.1}2^2.y^5 - \frac{1}{2^2.1.2}2^4y^7 + \frac{1.3}{2^3.1.2.3}2^6.y^9 - \frac{1.3.5}{2^4.1.2.3.4}2^8y^{11} + \ldots\right].$$

Die Schichtenmethode giebt also

$$11) \quad \overset{y_1}{\underset{0}{T}} = 2\pi\left[\frac{y^4}{4} + \frac{1}{2.1}.2^2\frac{y^6}{6} - \frac{1}{2^2.1.2}2^4\frac{y^8}{8} + \frac{1.3}{2^3.1.2.3}2^6\frac{y^{10}}{10} - \frac{1.3.5}{2^4.1.2.3.4}2^8\frac{y^{12}}{12} + \ldots\right].$$

Die Summe dieser Reihe mufs also nach 8*) sein

$$\overset{y_1}{\underset{0}{T}} = \frac{\pi}{480}\left[12\sqrt{1+4y_1^2}^{\,5} - 20\sqrt{1+y_1^2}^{\,3} + 8\right],$$

was allerdings mit elementaren Hilfsmitteln der Arithmetik (ohne vorherige Kenntnis des Resultates) schwer zu zeigen sein würde, von 8*) aus aber durch Reihenentwickelung bestätigt werden kann.

Diesem Beispiel lassen sich noch andere anschliefsen. Dem Leser sei es überlassen, durch Halbierung die zu-

gehörigen Planmomente festzustellen und auch die durch Umdrehung der parabolischen Kurve in Bezug auf die Y-Achse entstehende Fläche und ihre Momente zu untersuchen, wobei es sich um Schichten $q = 2\pi x \frac{\sigma}{\delta} = 2\pi y^2 \xi$, $q = 2\pi y^3 \xi$, $q = 2\pi y^4 \xi$ u. s. w. handelt, die auch sonstige Bedeutung haben.

§ 70) Noch eine zweite Fläche läfst sich der parabolischen Kurve $x = y^p$ oder $y = x^{\frac{1}{p}}$, wie sie jetzt geschrieben werden soll, zuordnen. Für den Fall $p = 2$ wurde schon darauf aufmerksam gemacht.

Während vorher $\tan \beta$ mafsgebend für die Neigung der Tangente war, handelt es sich jetzt um

$$\tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta} = \frac{1}{p\, y^{p-1}} = \frac{1}{p\, x^{\frac{p-1}{p}}} = \frac{1}{p\, x^{1-\frac{1}{p}}} = \frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1}. ^{*)}$$

Demnach wird jetzt

$$11)\quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1}\right)^2}} = \frac{\delta'}{\sigma},$$

wobei $\delta' = \frac{x_1}{n}$ ist.

Jetzt denke man sich an den entsprechenden Stellen der X-Achse Lote

$$\eta = \frac{\sigma}{\delta'} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1}\right)^2}$$

---

*) Setzt man $\frac{1}{p} = q$, so erhält man für die Tangentenneigung α der Parabel $y = x^q$ die Formel $\tan \alpha = q\, x^{q-1}$, so dafs diese Formel auch für gebrochene Exponenten q von der Form $\frac{1}{p}$ nachgewiesen ist. Sie kann aber auch für beliebige reelle q bewiesen werden, wie die algebraische Analysis am Ausdruck $\frac{y_2^q - y^q}{y_2 - y}$ elementar zeigt.

errichtet, die also eine Fläche von der Gleichung

$$\eta = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{p} x^{\frac{1}{p} - 1}\right)^2} \tag{12}$$

geben, dann ist die Fläche der neuen Kurve (zwischen dieser und der X-Achse) von 0 bis x_1 gleich der schon in Reihenform berechneten Länge der Parabel höherer Ordnung $y = x^{\frac{1}{p}}$ von 0 bis x_1, multipliziert mit 1.

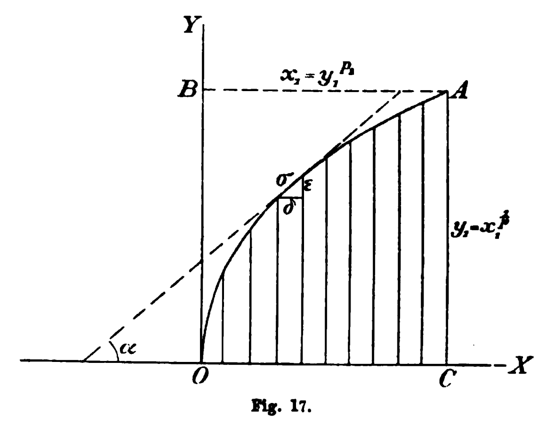


Fig. 17.

Für $p = 2$ war die Kurve bereits untersucht und der Flächeninhalt berechnet worden. (Bd. III § 94.)

Kennt man den Abstand x_s des Parabelschwerpunktes von der Y-Achse, so hat man zugleich den der Fläche.

Hatte die Kurve die Gleichung

$$x = k y^p \quad \text{oder} \quad y = \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{x^{\frac{1}{p}}}{k^{\frac{1}{p}}},$$

so wird

$$\tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta} = \frac{1}{k p y^{p-1}} = \frac{1}{kp\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{p}-1}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1}.$$

Die zugeordnete Kurve also wird

$$\eta = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{k^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{1}{p} x^{\frac{1}{p} - 1}\right)^2}.$$

§ 71) Ist die Gleichung einer Kurve ganz allgemein $x = f(y)$ oder $y = f_1(x)$, und kennt man für jede Höhe y oder für jede Abscisse x die Neigungswinkel β, ausgedrückt durch y bezw. ausgedrückt durch x, so kann man der Kurve ebenfalls zwei Flächen zuordnen, mit denen entsprechend zu verfahren ist, wie vorher. Die Gleichung der einen Grenzkurve ist der Ausdruck für $\xi = \frac{1}{\cos\beta}$, die der andern der Ausdruck für $\mathrm{q} = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Jeder beliebigen Kurve lassen sich also zwei solche Flächen zuordnen. Kann man die letzteren nach der Methode der Schichtenformel behandeln, so gelten die Resultate auch für die Kurve.

Die hier behandelte Methode für Kurven hat also denselben Geltungsbereich, wie die Schichtenformel, auch für den Fall unendlicher Reihen, die allerdings konvergent sein müssen.

§ 72) Will man über den Konvergenzbereich der Reihen hinausgehen, so wandle man die Kurvengleichung dadurch um, dafs man z. B. die Grenzlinie der Konvergenz (sei sie $x = a$ oder $y = b$) zur Achse eines neuen Koordinatensystems macht. Die Entwickelung des neuen Ausdrucks des der neuen Gleichung $x = f_1(y)$ bezw. $y = f_1(x)$ entsprechenden ξ oder η in Reihenform giebt dann einen neuen Konvergenzbereich. Die neue Reihe heifst die Fortsetzung der Funktion über die erste Konvergenzgrenze hinaus.

§ 73) Die Umkehrung der Methode macht konstruktiv keine Schwierigkeit. Geht man z. B. bei gegebener Fläche $\xi = f(y)$ von der Einteilung der y Achse in kleine Teile $\delta = \frac{y_1}{n}$ aus, so verwandle man jedes Rechteck $\delta\,\xi$ in ein Rechteck $\sigma . 1$. Die einzelnen σ trage man dann aufeinander folgend (von einem beliebigen Punkte der ent-

sprechenden Ordinate ausgehend) so in die Streifen ein, dafs ein zusammenhängender Kurvenzug entsteht. Man kann z. B. wie in Figur 15 mit dem Punkte O beginnen. Dagegen ist die Berechnung im allgemeinen nicht ganz leicht.

§ 74) Beispiel der Geraden $\frac{y}{x} = \tan\alpha = a = \frac{1}{\cot\beta}$.

Aus $\tan\alpha = a$ folgt $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, aus $\tan\beta = \frac{1}{a}$ folgt $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}}$.

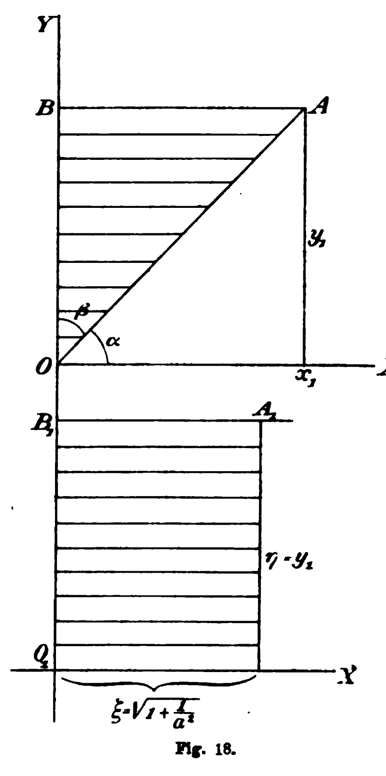


Fig. 18.

Die beiden zugeordneten Flächen sind also begrenzt durch die geraden Linien

$$\xi = \sqrt{1+\frac{1}{a^2}}$$

und

$$\eta = \sqrt{1+a^2},$$

so dafs es sich für die Strecke von o bis y_1 um das Rechteck

$$y_1\sqrt{1+\frac{1}{a^2}},$$

für die Strecke von o bis x_1 um das Rechteck

$$x_1\sqrt{1+a^2}$$

handelt. Diese Inhalte stimmen mit der entsprechenden Länge der Geraden überein.

Für das erste dieser Rechtecke ist das Moment erster, zweiter, dritter u. s. w. Ordnung in Bezug auf die X-Achse beziehungsweise

$$\frac{y_1^2}{2}\sqrt{1+\frac{1}{a^2}},\quad \frac{y_1^3}{3}\sqrt{1+\frac{1}{a^2}},\quad \frac{y_1^4}{4}\sqrt{1+\frac{1}{a^2}},\ldots$$

Der Schwerpunkt des Rechtecks liegt in der Höhe $\frac{y_1}{2}$, der mittlere Trägheitsabstand ist $\sqrt{\frac{y_1^2}{3}} = \frac{y_1}{\sqrt{3}}$, der Schwingungspunkt in Bezug auf die X-Achse hat die Höhe $\frac{2}{3} y_1$. Alle diese Werte gelten auch von der Geraden OA in Bezug auf die X-Achse. Für den durch Drehung um die Achse X auf dem Rechteck entstehenden Kreiscylinder ist der Inhalt gleich $\frac{2\pi y_1^2}{2}\sqrt{1+\frac{1}{a^2}} = \pi y_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{a^2}}$, das Moment erster Ordnung in Bezug auf diese Achse gleich $\frac{2\pi y_1^3}{3}\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}$, das Trägheitsmoment in Bezug auf diese Achse $\frac{2\pi y_1^4}{4}\sqrt{1+\frac{1}{a^2}} = \frac{\pi y_1^4}{2}\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}$, das Planmoment zweiter Ordnung in Bezug auf einen Hauptschnitt durch die X-Achse gleich $\frac{\pi y_1^4}{4}\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}$. Dieselben Ausdrücke gelten für die Fläche des aus der Geraden durch Drehung um die X-Achse entstehenden Kegels in Bezug auf die X-Achse.

Die entsprechende Behandlung des anderen Rechtecks in Bezug auf die Y-Achse wird ebenso durchgeführt, bezieht sich auf die andere Kegelfläche, bietet aber sonst nichts Neues.

§ 75) Beispiel der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$ und der zugeordneten Flächen. Die Betrachtung soll auf den ersten Quadranten beschränkt werden, das Wort Kreislinie soll also stets den Viertelkreis bedeuten. Für jeden Punkt der Kreislinie ist $\tan\alpha = -\tan\gamma = -\frac{x}{y}$, also

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}} = \frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}} = \frac{y}{1} = \sqrt{1-x^2}.$$

Die Gleichung der Grenzkurve für die zweite zugehörige Fläche ist also

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\eta} = \sqrt{1 - x^2}.$$

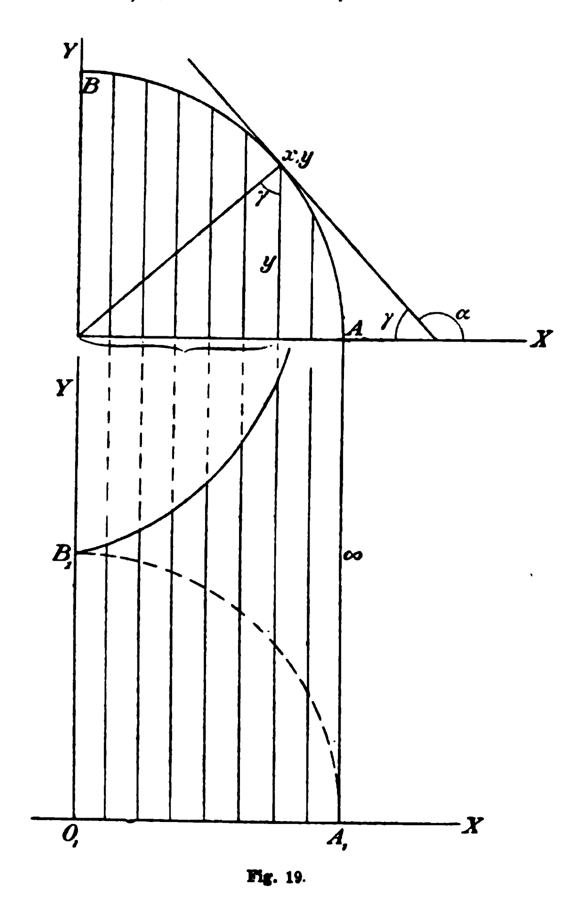


Fig. 19.

Aus der zweiten Schreibart erkennt man, dafs die Ordinaten der neuen Kurve die Reciproken der Ordinaten des Kreises sind, also mittels der Proportion $y : 1 = 1 : \eta$ leicht konstruiert werden können.

[Für die erste zugeordnete Fläche ergiebt sich aus $\tan\beta = -\frac{y}{x}$ ebenso $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} = \frac{x}{1} = \sqrt{1-y^2}$, als Grenzkurve ebenso $\xi = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, was nichts Neues giebt.]

Für die Kreislinie (im ersten Quadranten) kennt man die Länge $\underset{x=0}{\overset{x=r}{l}} = \frac{\pi}{2} r = \frac{\pi}{2}$, den Schwerpunktsabstand von der Y-Achse $x_s = \frac{2r}{\pi} = \frac{2}{\pi}$, das statische Moment in Bezug auf die Y-Achse $M_y = x_s l = \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\pi r}{2} = r^2 = 1$. Da ferner der Kreisquadrant in Bezug auf O das polare Trägheitsmoment $\frac{\pi}{2} r \cdot r^2 = \frac{\pi}{2} r^3 = \frac{\pi}{2}$ hat, so ist das axiale in Bezug auf die Y-Achse $T_y = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi}{4}$. Der mittlere Trägheitsabstand des Quadranten der Kreislinie von der Y-Achse ist also

$$x_m = \sqrt{\frac{T_y}{l}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi r^3}{4}}{\frac{\pi}{2}}} = r\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Der entsprechende Schwingungsmittelpunkt hat den Abstand

$$x_\sigma = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\frac{\pi r^3}{4}}{r^2} = \frac{\pi r}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Die Drehung um die Y-Achse giebt eine Halbkugelfläche, die im Vergleich mit einem umbeschriebenen Cylinder mit horizontalem Grundkreis zu betrachten ist. [Jede Kugelzone $DEFG$ ist dabei gleichflächig mit der entsprechenden

Hätte es sich um den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ gehandelt, so hätte man erhalten

$$\cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}.$$

Die Gleichung der Kurve wäre also geworden $\eta = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}$ und dies mufs von $x = 0$ bis $x = r$ auf die Fläche $\frac{\pi}{2} r$ führen, weil dies der Länge der Kreislinie entspricht. Alo mufs

$$\frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{1} + \frac{1}{2.1}\,\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^3}{3} + \frac{1.3}{2^2.1.2}\,\frac{\left(\frac{x}{r}\right)^5}{5} + \ldots = r \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$$

sein.]

§ 76) Nun lassen sich aber auch Bogen der Kreislinie mit beliebigem Centriwinkel behandeln. So ist z. B. das polare Trägheitsmoment eines Kreisbogens mit dem Centriwinkel $2\gamma^0$ in Bezug auf den Mittelpunkt O ($r = 1$ als Radius vorausgesetzt)

$$T_p = 2 . \hat{\gamma} . 1^2 = 2\pi \frac{\gamma^0}{180^0} . 1^2,$$

also, wenn die X-Achse Symmetrieachse des Bogens ist,

$$T_y - \hat{\gamma} . 1^2 = \pi \frac{\gamma^0}{180^0} . 1^2.$$

Die Bogenlänge $2\pi \frac{\gamma^0}{180^0}$, der Schwerpunktsabstand x_σ, das statische Moment M_y u. s. w. ist ebenfalls nach den früheren Untersuchungen bekannt. Alles also gilt für das „Segment“ $P_1 Q_1$ $(+\infty)$ $(-\infty)$ der zugeordneten Fläche.

Da ferner die durch Drehung des Kreisbogens um die Y-Achse entstehende Zone bezüglich der Momente u. s. w. keine Schwierigkeiten macht, so ist das entsprechende für

den Drehungskörper des Segments der zugeordneten Fläche ebenfalls leicht zu erledigen.

Setzt man aber

$$OD = x, \quad DQ = y,$$

so ist

$$\hat{\gamma} = \arcsin y = \arccos x$$

$$= \operatorname{arctan} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Reihen-Entwickelungen geben also auf geometrischem Wege Summen, die mit den genannten Funktionen zusammenhängen. Vergleiche Band III Seite 160 des methodischen Lehrbuchs des Verfassers, wo die Reihen für π, $\arcsin y$ und $\arccos y$ in dieser Weise geometrisch abgeleitet werden.

Das vorliegende Beispiel ist also ein besonders instruktives, da es auch für die Reihenlehre auf bequeme Weise wichtige Resultate giebt.*)

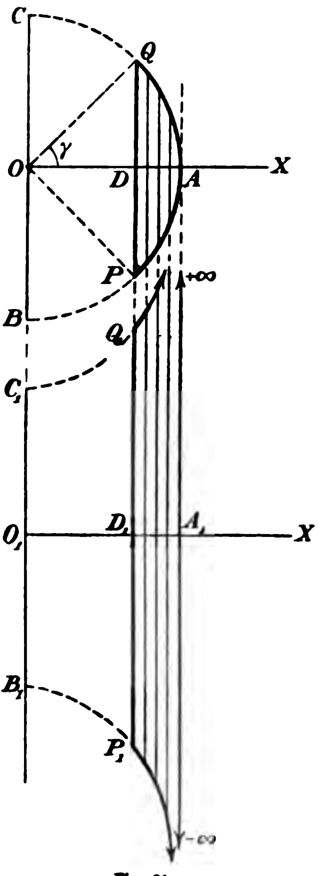


Fig. 21.

§ 77) Beispiel der Kettenlinie $x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ oder $y = lg(x + \sqrt{x^2 - 1})$ und der beiden ihr zugeordneten Flächen.

*) Analytisch betrachtet handelt es sich bei dieser Methode häufiger um die Integration irrationaler Funktionen mit Quadratwurzeln aus Ausdrücken zweiten und, wie sich zeigen wird, auch höheren Grades.

Nach § 122 hat die Tangente dieser Kettenlinie (im Punkte $x_1\, y_1$) gegen die Y-Achse eine Neigung β, die sich durch

$$\cos\beta = \frac{1}{x_1} = \frac{2}{e^{y_1} + e^{-y_1}}$$

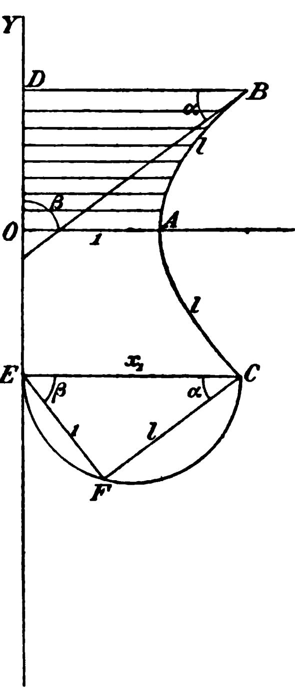


Fig. 22.

bestimmt. Die Gleichung der Grenzlinie für die zugeordnete Fläche ist also

$$\xi = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2},$$

d. h. die Kettenlinie selbst. Demnach mufs die Formel für die Länge AB der Kettenlinie mit der für die Fläche $OABD$ übereinstimmen. In der That war im § 125 des dritten Bandes gezeigt,*) dafs

$$\overset{y_1}{\underset{0}{l}} = \sqrt{x_1^2 - 1} = \frac{e^{y_1} - e^{-y_1}}{2}$$

und ebenso

$$\overset{y}{\underset{0}{F}} = \sqrt{x_1^2 - 1} = \frac{e^{y_1} - e^{-y_1}}{2}$$

ist. Der Schwerpunktsabstand y_s für Fläche und Kurve müssen also ebenfalls übereinstimmen. Dort war gezeigt, dafs für die Fläche

$$y_s = \frac{y_1\left(e^{y_1} - e^{-y_1}\right) - \left(e^{y_1} + e^{-y_1}\right) + 2}{e^{y_1} - e^{-y_1}}.$$

*) Die x und y der dortigen Formeln müssen mit einander vertauscht werden.

ist. Dies gilt also zugleich für die Kurve, wie dort bereits angedeutet war. Demnach ist auch die Formel $2\pi y_s F$ für die durch Umdrehung der Fläche $OABD$ um die X-Achse entstehenden Körper übereinstimmend mit der Mantelfläche $2\pi y_s . l$ des durch Umdrehung der Kettenlinie um die X-Achse entstehenden Gebildes.

Für die Grenzlinie der zweiten zugeordneten Kurve folgt aus

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{1}{x_1^2}} = \frac{1}{x_1}\sqrt{x_1^2-1}$$

die Gleichung

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Die Fläche für die neue Kurve, von $x=1$ bis $x=x_1$ gerechnet, ist ebenfalls gleich $\sqrt{x_1^2-1}$, was der Kurvenlänge $AB=\sqrt{x_1^2-1}$ entspricht. Der Schwerpunktsabstand der neuen Fläche ist gleich dem der Kettenlinie, der als

$$x_s = \frac{x_1\sqrt{x_1^2-1}+lg\,(x_1+\sqrt{x_1^2-1})}{2\sqrt{x_1^2-1}}$$

bestimmt worden war. Die Umdrehungsfläche der Kettenlinie, das Katenoid, giebt zugleich die Formel für den Umdrehungskörper der Fläche (um die Y-Achse). Auch jene Mantelfläche war dort als

$$\overset{+y}{\underset{-y}{M}} = \frac{\pi}{2}\left[e^{2y}-e^{-2y}+4y\right]$$

bestimmt worden.

Entwickelt man $\eta=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ und $\overset{x}{\underset{0}{F}}=\sqrt{x^2-1}$ als binomische Reihen, und wendet man auf diese die Methode der Schichten an, so geben die gefundenen Resultate die Summierung der neuen Reihen. Auch die Reihen für

$$x=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}=1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^6}{1.2.3.4.6}+\ldots$$

und

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \dots$$

lassen hier einfache Verwendungen zu.

Die weitere Ausführung des Gegenstandes sei dem Leser überlassen. In ähnlicher Weise führt bei der logarithmischen Linie $x = e^y$ die Methode auf $\xi = \sqrt{1 + e^{2y}}$ und $\eta = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$.

§ 78) Beispiel der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$. Für den Punkt x_1, y_1 der Kurve ist

$$\tan\alpha = -\tan\gamma = \frac{y_1}{x_1},$$

also

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2}} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}}} = \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^4 + 1}},$$

die eine zugeordnete Kurve erhält also die Gleichung

$$\eta = \frac{1}{x_1^2}\sqrt{1 + x_1^4}.$$

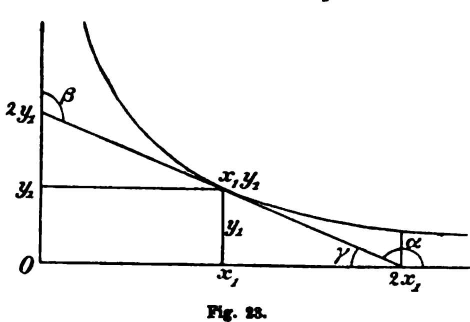


Fig. 23.

Die andere zugeordnete Kurve giebt nichts Neues. Man versuche auf Grund der für diese Hyperbel bekannten Resultate solche für die zugeordneten Flächen abzuleiten. (Die Reihenentwickelung und die Anwendung der Schichtenmethode führt auf neue Reihen, die in der Analysis auf die Theorie der elliptischen Integrale hinausläuft. Deshalb wird hier auf ausführliche Besprechung verzichtet.

§ 79) Beispiel der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Die Gleichung der Tangente wird, wie leicht zu zeigen ist,

$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1 \text{ oder } y = \frac{x_1 b^2}{y_1 a^2} x - \frac{b^2}{y_1},$$

so dafs

$$\tan \alpha = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},$$

allgemein also

$$\cos \alpha = \frac{a\sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2(a^2 + b^2) - a^4}},$$

die Gleichung der einen zugeordneten Kurve also

$$\eta^2 = \frac{x^2(a^2 + b^2) - a^4}{a^2(x^2 - a^2)}$$

wird. Jetzt ist η in binomischer Reihe zu entwickeln u. s. w.

§ 80) Für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ wird die Tangentengleichung ebenso $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$, oder $y = \frac{b^2}{y_1} - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x$, also $\tan \alpha = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$, allgemein also

$$\cos \alpha - \frac{a\sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{a^4 + x^2(b^2 - a^2)}},$$

so dafs die Gleichung der zugeordneten Kurve wird

$$\eta^2 = \frac{x^2(b^2 - a^2) + a^4}{a^2(x^2 - a^2)}.$$

Wiederum ist η in binomscher Reihe zu entwickeln.

Die Lösung der drei letzten Aufgaben gehört der höheren Mathematik an, da sie auf elliptische Integrale führt.

§ 81) Bemerkungen. Die hier behandelte Methode scheint zuerst von Huygens angedeutet zu sein. Wenigstens hat dieser die Rektifizierung der Parabel mit der Quadrierung einer Hyperbel in Verbindung gebracht. Bekanntlich ver-

hielt er sich ablehnend gegen die ihm von Leibniz brieflich mitgeteilten Methoden der Differential- und Integralrechnung. Aber gerade hier hätte sich ihm der Gedanke aufdrängen sollen, dafs die Notwendigkeit gewisser Reihensummierungen, die geschlossen nicht durchgeführt werden konnten, auf einen Ausbau der Analysis hindrängen mufste. Gerade der Umstand, dafs die gewonnenen Ausdrücke mehrfacher Deutung fähig waren, erstens als Kurve, zweitens als Fläche, dafs sie auch für die Mechanik nutzbringend gedeutet werden konnten, hätte ihn zur Überzeugung darüber bringen sollen, dafs die Sprache der Analysis die allgemeinere war. Dafs ferner die hier stets auftretende Neigung der Tangente und die Schlufskoordinate der Kurve nichts anderes waren, als Deutungen des Differentialquotienten, konnte ihm ebenfalls nicht verborgen bleiben. Jener Briefwechsel spielte sich allerdings in den letzten Lebensjahren des grofsen Holländers ab. Vielleicht würde er bei längerer Lebensdauer die Fortschritte der neuen Sprache der höheren Analysis verfolgt und den Versuch gemacht haben, der Differentialrechnung eine wirkliche Differentialgeometrie im oben besprochenen Sinne gegenüberzustellen, die auf die Zeichensprache der ersteren verzichtet, etwa so, wie es bei der algebraischen Analysis der Fall ist. Die letztere wurde allerdings erst durch Euler zu einiger Vollkommenheit gebracht, der erstens die Reihenlehre und zweitens die Behandlung des Imaginären ganz aufserordentlich förderte und die Periodizität und Vieldeutigkeit der Exponentialfunktion bezw. des Logarithmus erkannte, und damit die Theorie der doppeltperiodischen Funktionen und der doppelt vieldeutigen Integrale ermöglichte. Huygens würde also sehr bald auf damals unüberwindliche Schwierigkeiten gestofsen sein.

Eine Anzahl von Reihensummierungen, die vor der allgemeinen Einführung der Differential- und Integralrechnung ausgeführt wurden, verdankt man übrigens, wie es scheint, nicht arithmetischen, sondern geometrischen Methoden. Man fand z. B. gewisse Flächeninhalte, leitete daraus geometrisch andere ab, drehte oder verschob auch das Koordinatensystem. So erhielt man Reihen von anderer Gestalt, deren Summe man schon vorher kannte. Die Angelegenheit ist also immerhin von historischem Interesse.

Die höhere Analysis hat im vergangenen Jahrhundert

eine grofse Zahl der vorliegenden Schwierigkeiten überwunden und die Geometrie der Ebene, des dreidimensionalen Raumes und der n-dimensionalen Räume, ebenso die Mechanik der letzteren dadurch in ungeahnter Weise gefördert. Der Geometrie ist es bisher nicht gelungen, es ihr gleich zu thun, obwohl z. B. Steiner und Lie bedeutende Vorstöfse in Gebiete gemacht haben, die von der Analysis noch nicht in Angriff genommen waren. Ob es der Geometrie möglich sein wird, die Analysis wieder einzuholen, läfst sich schwer entscheiden. Die Unmöglichkeit ist sicher bisher noch nicht nachgewiesen worden.

ι) Stereometrische und mechanische Veranschaulichung der statischen Momente, der Trägheitsmomente und der Centrifugalmomente und der Polarmomente für ebene Flächen und ebene Kurven nebst Anwendungen.

§ 82) In der Ebene des Rechtecks $ABCD$ sei eine beliebige Fläche F gegeben. Über dieser denke man sich einen senkrechten Cylinder, der durch eine unter 45^0 geneigte und

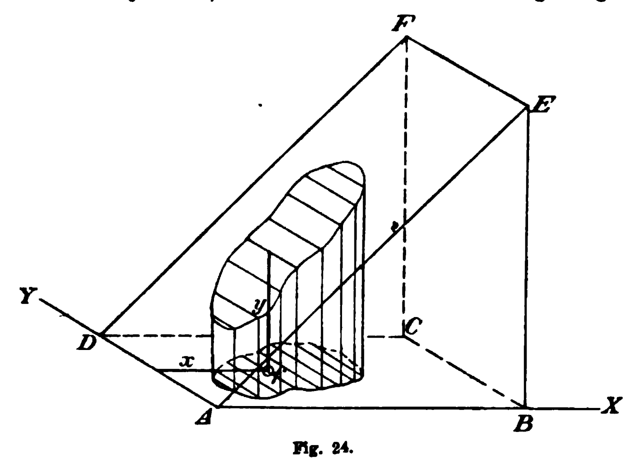


Fig. 24.

durch AB gehende Ebene abgeschrägt wird. An dem so gestalteten Cylinder lassen sich die oben genannten Momente bequem veranschaulichen und deuten.

Über jedem kleinen Flächenteilchen f steht nämlich ein Cylinder von einer Höhe x, die wegen des Winkels 45^0

gleich dem Abstande des Flächenteilchens von der Achse AB ist. Folglich ist der Inhalt des kleinen Cylinders $f.x$ zugleich das statische Moment seiner Grundfläche in Bezug auf die Achse AD. Dies gilt auch von der Summe aller Cylinder und Flächenteilchen. Folglich:

Der Inhalt des abgeschrägten Cylinders ist gleich dem statischen Momente seiner Grundfläche in Bezug auf die Achse AD.

Nach Band II, § 111 ist aber der Inhalt des abgeschrägten Cylinders $J = F . h_s = F . x_s$, wo $h_s = x_s$ die Höhe des Cylinders über dem Schwerpunkte der Fläche ist. Bezeichnet man also das statische Moment der Fläche F in Bezug auf die Achse AD (Y-Achse) mit M_y, so ist

$$M_y = J = F x_s,$$

der Schwerpunktsabstand der Fläche also

$$x_s = \frac{J}{F} = \frac{M_y}{F}.$$

Ebenso ist für die Achse AB der Schwerpunktsabstand zu berechnen aus der Formel

$$M_x = J_1 = F . y_s,$$

als

$$y_s = \frac{J_1}{F} = \frac{M_x}{F},$$

dabei ist J_1 der Inhalt des von AB aus in entsprechender Weise abgeschrägten Cylinders, $M_x = J_1$ das statische Moment der Fläche in Bezug auf die X-Achse AB.

Geht die Achse AD durch die Fläche F, so ist der untere Teil des Cylinders als negativ aufzufassen. Geht AD durch den Flächenschwerpunkt, so werden Moment und Cylinderinhalt gleich Null.

§ 83) Das statische Moment des abgeschrägten Cylinders in Bezug auf die Achse AD ist gleich dem Trägheitsmomente der Grundfläche in Bezug auf dieselbe Achse.

Jede kleine Säule hat nämlich den Inhalt fx, ihr statisches Moment in Bezug auf die Y-Achse ist also gleich

$f \cdot x \cdot x = f x^2$, d. h. gleich dem Trägheitsmoment des Flächenteilchens f in Bezug auf die Achse AD. Dehnt man dies über die Summe der Flächenteilchen aus, so hat man den behaupteten Satz.

Wird die Fläche von AD geschnitten, so ist für den unteren Teil des Cylinders zwar jeder Inhalt fx als negativ aufzufassen, aber auch jeder Abstand x, so dafs jedes fx^2 positiv bleibt.

Der abgeschrägte Cylinder hat einen Schwerpunkt. Die durch diesen gelegte Senkrechte soll die Schwerpunktsachse heifsen. Ist x_σ deren Abstand von AD, so ist $x_\sigma J = T_y$, wenn das Trägheitsmoment der Fläche F in Bezug auf die Y-Achse AD mit T_y bezeichnet wird, denn $x_\sigma J$ ist das statische Moment des Cylinders. Daraus folgt als Abstand der Schwerpunktsachse des abgeschrägten Cylinders von der Schnittlinie der Schrägfläche und der Grundfläche

$$x_\sigma = \frac{T_y}{J} = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\text{Trägheitsmoment,}}{\text{statisches Moment.}}$$

In dem Abstande x_σ liegen die Punkte, welche für die um die Y-Achse schwingende (pendelnde) Fläche F als Schwingungspunkte zu betrachten sind.

[Ebenso findet man $y'_\sigma = \frac{T_x}{J} = \frac{T_x}{M_x}$ als Abstand der Schwingungspunkte derselben Fläche in Bezug auf AB, wenn man sich den Cylinder durch die durch AB gehende Schrägfläche von 45^0 Neigung abgeschrägt denkt.]

§ 84) Für die Schwerpunktsachse des ersten abgeschrägten Cylinders war oben der eine Abstand x_σ bestimmt worden. Um sie vollständig zu bestimmen, braucht man noch den Abstand der Achse von einer beliebig liegenden X-Achse, z. B. von AB. Bezeichnet man diesen Abstand mit y_σ, so ist er zu bestimmen aus

$$y_\sigma J = M'_x.$$

Demnach ist

$$y_\sigma = \frac{M'_x}{J} = \frac{M'_x}{M_y},$$

wo eben M'_x das statische Moment des Cylinders auf die X-Achse ist. Nun hat aber jede kleine Säule den Inhalt fx und von der X-Achse einen Abstand y. Das Moment der Säule ist also gleich $(fx)\,y = fxy$ und daher $M'_x = \Sigma fxy$ d. h. gleich dem Centrifugalmoment der Fläche in Bezug auf beide Achsen, welches mit C_{xy} zu bezeichnen ist.

Der Abstand der Schwerpunktsachse des abgeschrägten Cylinders der Figur 24 ist also

$$y_\sigma = \frac{C_{xy}}{M_y} = \frac{\text{Centrifugalmoment}_{xy}}{\text{statisches Moment}_y},$$

wobei x und y die Achsen bedeuten, auf welche die Momente zu beziehen sind.

Der Schwerpunkt des Cylinders liegt also auf der durch x_σ und y_σ bestimmten Achse, und zwar in halber Höhe der letzteren.

Letzteres ist der Fall, weil jedes der Säulchen seinen Schwerpunkt in einer Ebene hat, welche die Höhen sämtlicher kleinen Säulchen halbiert.

Für manche Fälle ist y_σ leicht zu bestimmen, dann kann man die Formel benutzen, das Centrifugalmoment$_{xy}$ zu bestimmen durch die Gleichung

$$\text{Centrifugalmoment}_{xy} = y_\sigma \,.\, \text{stat. Moment}_y$$

oder

$$C_{xy} = y_\sigma \cdot M_y.$$

Handelt es sich z. B. um das Rechteck $ABCD$ der Figur 24 mit den Seiten x und y, so hat der Dachkörper den Inhalt $J = xy \,.\, \frac{x}{2} = \frac{x^2 y}{2}$, seine Schwerpunktsachse aber hat von der X-Achse den Abstand $y_\sigma = \frac{y}{2}$. Das statische Moment der Fläche ist $M_y = \frac{x^2 y}{2}$, also ist

$$C_{xy} = \frac{x^2 y}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{x^2 y^2}{4}.$$

Bemerkung. Nach Cavalieri gilt die Bestimmung der Schwerpunktsachse des abgeschrägten Cylinders oder Prismas auch dann,

wenn der Neigungswinkel der Abschrägungsfläche ein anderer als 45^0 ist, denn die Verlängerung aller Höhen in demselben Verhältnis ändert die Lage der Schwerpunktsachse nicht.

Damit ist für das Centrifugalmoment einer ebenen Fläche in Bezug auf zwei auf einander senkrechte Achsen ihrer Ebene erstens eine bequeme mechanische Deutung, zweitens ein wichtiges Anwendungsbeispiel gefunden.

Diesem läfst sich sofort ein zweites anschliefsen.

§ 85) Aufgabe. Wo liegt der Schwerpunkt für den Sektor eines Guldinschen Drehungskörpers von beliebigem Profil?

Auflösung. Man denke sich die obige Fläche F um $A_1 D_1$ drehend und so den Guldinschen Körper erzeugend. Figur 25 stellt dies für dessen Hälfte im Aufrifs und Grundrifs dar. Im Aufrifs erkennt man, dafs jeder kleine Sektor $P Q Q_1 P_1$ als abgeschrägter Cylinder betrachtet werden

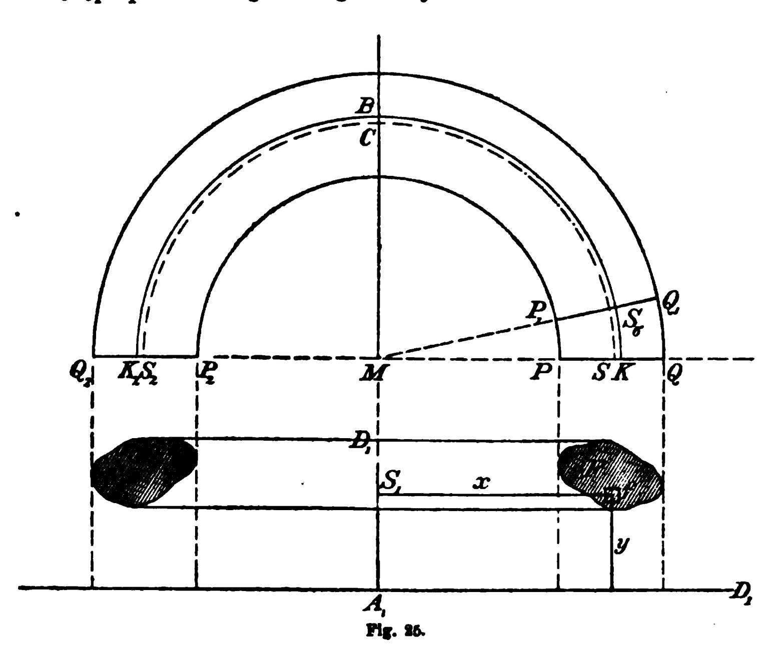


Fig. 25.

kann, dessen Schwerpunkt S_σ auf einer „Achse" liegt, die von M die Entfernung $r_\sigma = \frac{T_y}{M_y}$ hat, wo die beiden Momente die der Profilfläche in Bezug auf die durch M dargestellte Achse AD sind. Folglich:

Die Schwerpunkte der kleinen Sektoren eines Guldinschen Drehungskörpers liegen auf einem Kreise KBK_2 vom Radius $r_\sigma = \frac{T_y}{M_y}$.

(Sie liegen also nicht auf dem Guldinschen Kreise SCS_2, wie in einigen Lehrbüchern irrtümlich angenommen wird.) Dadurch ist zunächst für die Schwerpunktslage nur ein Cylinder bestimmt.

Im Grundrifs ist jetzt der Abstand der Ebene dieser Schwerpunkte von einer willkürlich gewählten Ebene $A_1 D_1$ zu suchen. Jedes Flächenteilchen f bildet einen Ring vom Inhalte $2\pi f x$, wenn x sein Abstand von der Drehungsachse ist. Das statische Moment dieses Ringes in Bezug auf die Ebene AD ist also gegeben durch $2\pi f x y$, wenn der Abstand mit y bezeichnet wird. Für den ganzen Körper bestimmt sich also der Schwerpunktsabstand y_σ mit Hilfe der Formel $y_\sigma . J = M$ als

$$y_\sigma = \frac{M}{J} = \frac{2\pi \sum f x y}{2\pi M_y} = \frac{C_{xy}}{M_y}.$$

Folglich: Der Schwerpunkt eines Guldinschen Drehungskörpers hat von einer beliebig gewählten Parallelebene (zu den Drehungsebenen seiner Punkte) den Abstand

$$y_\sigma = \frac{C_{xy}}{M_y} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}},$$

wobei die Momente die der gedrehten Fläche (des Profils) in Bezug auf die Drehungsachse und den Schnitt der Fläche mit der gewählten Ebene bezogen sind.

[Im allgemeinen liegt der Schwerpunkt also nicht in der Ebene des durch die Bewegung des Flächenschwerpunktes entstehenden Guldinschen Drehungskreises SCS_2. Auf

Seite 71 der Ingenieurmathematik des Verfassers wird gezeigt, dafs, wenn die rotierende Fläche eine zur Drehungsachse parallele Symmetrieachse besitzt, ein Ausgleich derart stattfindet, dafs der Schwerpunkt in die Ebene des Guldinschen Drehungskreises fällt.]

Damit ist für die Lage des Schwerpunktes eine Kreislinie auf dem oben gefundenen Cylinder bestimmt. Der Schwerpunkt des Körpers ist nun identisch mit dem des Bogens der so bestimmten Kreislinie.

Für den Halbkreis z. B. hat er von der Drehungsachse den Abstand $e = \frac{2 r_\sigma}{\pi}$. Für den allgemeinen Sektor ist der Abstand

$$e = \frac{r_\sigma h}{\hat{s}} - \frac{h}{\hat{\alpha}} = \frac{2 r_\sigma \sin \frac{\alpha}{2}}{\hat{\alpha}}.$$

Hier bedeutet h die Sehne des Kreisbogens, $\hat{s}$ seine Länge, $\hat{\alpha}$ den zum Centriwinkel α gehörigen Bogen des Einheitskreises.

Damit ist die Aufgabe vollständig gelöst.

§ 86) Aus der Gleichung $C_{xy} = \sum fxy = \sum fyx$ geht hervor, dafs man x und y vertauschen kann, ohne dafs das Centrifugalmoment sich ändert. Denkt man sich also den über F stehenden Cylinder durch eine Schrägfläche, die unter 45^0 Neigung durch AB geht, abgeschrägt, so hat der neue Cylinder in Bezug auf AD dasselbe statische Moment, wie der alte in Bezug auf AB. Demnach ist

$$C_{xy} = y_\sigma M_y = x'_\sigma M_x.$$

Für den ersten hatte die Schwerpunktsachse die Abstände

$$x_\sigma = \frac{T_y}{M_y},\ y_\sigma = \frac{C_{xy}}{M_y},\ \text{für den zweiten}\ x'_\sigma = \frac{C_{xy}}{M_x},\ y'_\sigma = \frac{T_x}{M_x}.$$

§ 87) Entsprechendes für die Umrandung der Fläche F. Man hat nur nötig, von der Umrandung

u der Fläche kleine Bogenelemente s zu betrachten (statt der früheren f), um folgende Sätze zu erhalten:

Die Mantelfläche des unter 45^0 abgeschrägten Cylinders ist gleich dem statischen Momente M_y seiner Grundlinie in Bezug auf die Abschrägungsachse AD. Der Schwerpunktsabstand der Grundlinie von AD ist bestimmt durch $x_s = \frac{M_y}{u}$. Das statische Moment der Mantelfläche in Bezug auf AD ist gleich dem Trägheitsmomente T_y der Grundlinie in Bezug auf AD, das statische Moment derselben Mantelfläche in Bezug auf AB ist gleich dem Centrifugalmomente C_{xy} der Grundlinie für die beiden Achsen. Die Schwerpunktsachse des abgeschrägten Cylindermantels hat von beiden Achsen die Entfernungen $x_\sigma = \frac{T_y}{M_y}$, $y_\sigma = \frac{C_{xy}}{M_y}$.

Für den zweiten Cylindermantel stelle man die Formeln selbst auf.

Alle Bemerkungen über die Schwingungspunkte, reduzierten Pendellängen, über die freien Drehungsachsen, über den Trägheitsradius u. s. w. bleiben bestehen.

Auch die Aufgabe über den Schwerpunkt der Guldinschen Drehungsfläche ist in derselben Weise, wie vorher, zu lösen.

§ 88) Deutung des Namens Centrifugalmoment an einer Centrifugal-Betrachtung.

Man denke sich eine homogene Fläche F, die sich um eine Achse AD dreht. Ist ϑ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, so erhält jedes Teilchen f eine Centrifugalkraft $fx\vartheta^2$. Die gesamte Centrifugalkraft ist also gleich

$$\vartheta^2 \sum f x = \vartheta^2 M_y,$$

d. h. ebenso grofs, als ob die Masse im Schwerpunkte vereinigt wäre. Der Angriffspunkt der Centrifugalkraft ist aber nicht etwa der Schwerpunkt der Fläche, sondern ein anderer. Die an gleichen Flächenteilchen

wirkenden Kräfte sind nämlich proportional den Abständen von der Drehungsachse, ebenso, wie die Höhe des oben betrachteten Cylinders. Die Schwerpunktsachse des letzteren, bezw. ihr Fuſspunkt giebt den Angriffspunkt an. Dieser ist also, wenn eine beliebige Grundebene AB angenommen wird, gegeben durch die Abstände

$$x_\sigma = \frac{T_y}{M_y}, \; y_\sigma = \frac{C_{xy}}{M_y}.$$

Angenommen, die Achse AD wäre bei A in einer Vertiefung aufgestellt, so würde das Centrifugalmoment, welches sie umstürzen will, von der Gröſse

$$\vartheta \sum f x \,.\, y = \vartheta^2 C_{xy}$$

sein. Dieses Moment ist also proportional dem oben behandelten Centrifugalmoment. Da es sich um ein Bestreben handelt, aus der Kreisbahn abzuweichen, so trägt das Moment auch den Namen Deviationsmoment. — An den Centrifugalkräften untersucht man am bequemsten, ob Gleichgewicht herrscht, oder ob z. B. Kräftepaare auftreten, deren Moment eben das Centrifugalmoment ist.

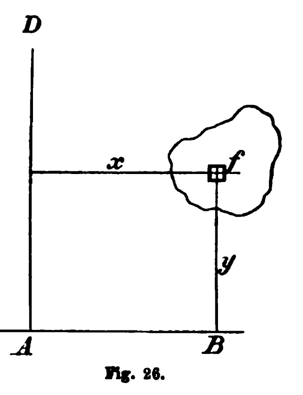


Fig. 26.

§ 89) Eine andere Veranschaulichung des axialen Trägheitsmomentes ebener Umrandungen. Man denke sich wiederum eine Grundebene $ABCD$ und in ihr eine Fläche F, deren Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse AD untersucht werden soll. Zur Veranschaulichung denke man sich über der Fläche einen Cylinder stehend, und zwar über jedem Flächenteilchen einen solchen von der Höhe x^2, wobei x der Abstand von AD sein soll. Der Cylinder wird dann abgeschrägt durch eine parabolisch-cylindrische Fläche, die durch die Gleichung $z = x^2$ dargestellt wird.

Der Inhalt des parabolisch begrenzten Cylinders ist gleich dem Trägheitsmomente T_y

seiner Grundfläche in Bezug auf die Achse AD; seine Mantelfläche ist gleich dem entsprechenden Trägheitsmomente ihrer Grundlinie. Die mittlere Höhe des Cylinders ergiebt sich aus $h_t F = J = T_y$ als $h_t = \frac{T_y}{F}$ und befindet sich im Abstande $x_m = \sqrt{h_t} = \sqrt{\frac{T_y}{F}}$. Entsprechendes gilt für den Mantel, für den $h'_t = \frac{T'_y}{u}$ ist.

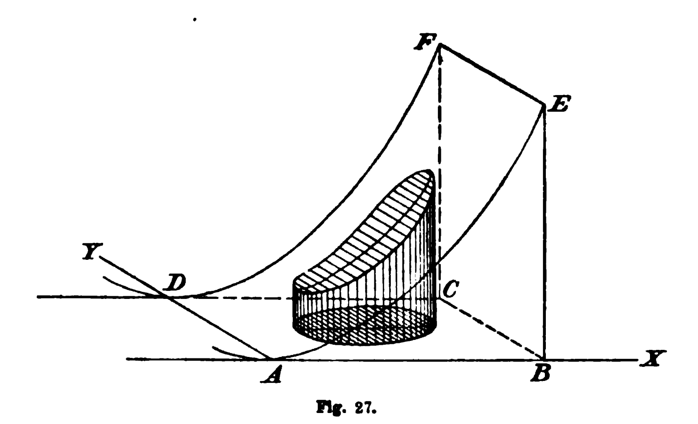


Fig. 27.

Das statische Moment dieses Körpers in Bezug auf AD und AB würde auf die Momente höherer Ordnung $\sum f x^3$ und $\sum f x^2 y$ führen, die ebenso, wie die früher besprochenen untersucht werden können.

§ 90) Stereometrische Veranschaulichung des Centrifugalmoments für ebene Flächen und ihre Umrandungen.

Man denke sich ein horizontales Quadrat $ABCD$ von der Seite 1 und über CD ein senkrecht stehendes Dreieck DCE von der Seite $CE = 1$ errichtet. Dann verbinde man B mit E, so dafs ein windschiefes Viereck $ABED$ entsteht, durch welches ein hyperbolisches Paraboloid bestimmt wird. Die beiden Scharen von Geraden dieser Fläche erhält

man, indem man die gegenüberliegenden Seiten in eine gleiche Anzahl kleiner Teile einteilt und die entsprechenden Teilpunkte mit einander verbindet. Es fragt sich nun, wie grofs das Lot z in einem Punkte G (oder Flächenteilchen f) der Grundfläche ist, der die Abstände $FG = x$ und $JG = y$ haben möge. Man lege durch G eine senkrechte Ebene parallel zu AD, was ein Dreieck JKL giebt. In diesem ist $KL = x$, aber GH bestimmt sich aus $y : 1 = z : x$, so dafs

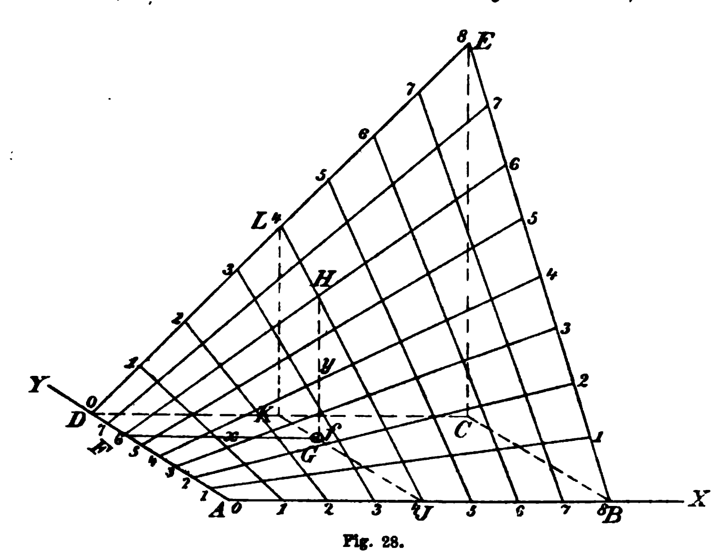


Fig. 28.

$z = xy$ ist.*) (Gleichung eines hyperbolischen Paraboloids.) Denkt man sich die Fläche durch die Geraden bis ins Unendliche fortgesetzt, so ergiebt sich für eine ebene Fläche F, die in die Grundebene gelegt ist, dafs der über ihr stehende Cylinder durch das hyperbolische Paraboloid so begrenzt wird, dafs sein Inhalt gleich $\sum fxy$, sein Mantel gleich $\sum sxy$ ist. Durch Cylinder und Mantel sind also die Centrifugalmomente der Grundfläche F und ihrer Umrandung in Bezug auf die Achsen AB und AD dargestellt.

*) In der Figur ist GH irrtümlich mit y bezeichnet. Es mufs heifsen z.

Handelt es sich um ein Rechteck mit den Seiten x_1 und y_1, so ist die Linie $D'E'$ natürlich nicht mehr unter 45^0 geneigt, ebensowenig die Gerade B_1E_1. Das Centrifugalmoment des Rechtecks bestimmt sich dann folgendermaſsen: Die Höhe KL wird im Verhältnis von $1:y_1$ vergröſsert, also wird $K_1L_1 = x \cdot y_1$, das Dreieck JK_1L_1 also gleich $xy_1 \cdot \frac{y_1}{2} = \frac{xy_1^2}{2}$. Dies ist der Querschnitt über JK in der Entfernung x, man hat also die Querschnittsformel

$$q_x = \frac{y_1^2}{2} \cdot x,$$

nach der Schichtenformel ist demnach der Inhalt des Körpers von $x = 0$ bis x von der Gröſse

$$\overset{x}{\underset{0}{J}} = \frac{y_1^2}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2 y_1^2}{4}.$$

Also von 0 bis x_1 ist $J = \frac{x^2 y_1^2}{4}$. Dies war in der That das Centrifugalmoment des Rechtecks mit den Seiten x_1 und y_1 in Bezug auf zwei zusammenstoſsende Seiten. Vgl. § 84.

§ 91) Stereometrische Veranschaulichung und verschiedene Deutungen des Polarmomentes erster Ordnung für ebene Flächen und ihre Umrandungen.

Man denke sich einen Kreiskegel, dessen Leitlinien die Neigung 45^0 haben, mit der Spitze P auf horizontaler Ebene stehend, so daſs seine Achse senkrecht ist. Errichtet man dann in einem beliebigen Punkte auf der Grundebene ein Lot, welches bis zur Kegelfläche reicht, so erhält dieses die Länge $z = r$, wo z der Abstand des Punktes von P ist. [$z = r$ ist also die Gleichung

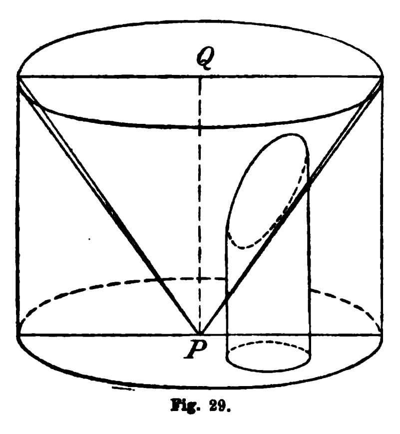


Fig. 29.

des Kegels, den man sich nach oben bis ins Unendliche verlängert zu denken hat. Über jedem kleinen Flächenteilchen f der Grundebene denke man sich wie früher durch solche Lote einen Cylinder errichtet, dann ist dessen Inhalt $J = fr$. Der über einer beliebig gestalteten Fläche errichtete Cylinder aber erhält den Inhalt $J = \sum fr = M'_p$, d. h. einen Inhalt, der gleich dem Polarmoment erster Ordnung der Fläche in Bezug auf den Punkt P ist. Der Cylindermantel stellt das Polarmoment für die Umrandung der Fläche dar.

Ist z. B. die Fläche F ein Quadrat von der Seite 2, und wird das Polarmoment für dessen Mittelpunkt gesucht,

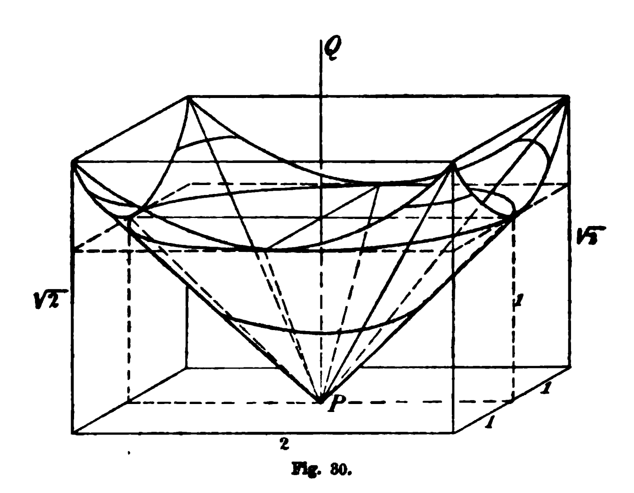


Fig. 30.

so giebt der Kegel das in Figur 30 dargestellte Gebilde, welches einem Rechteckskörper von der Höhe $\sqrt{2}$ einbeschrieben ist und auf der Seitenfläche hyperbolische Begrenzung zeigt. Der Inhalt des Aufsenkörpers zum Kegel ist gleich dem Polarmoment der Grundfläche in Bezug auf P, die Summe der Fläche der Aufsenwände, aus denen hyperbolische Stücke auszuschneiden sind, giebt das Polarmoment der Umrandung des Quadrates. Die Hyperbeln sind gleichseitige, weil die nach ihren unendlich fernen Punkten gehenden Geraden die Neigung 45^0 haben. Bei der Be-

rechnung der letzteren Momente spielt also der Flächeninhalt des Segments der gleichseitigen Hyperbel eine Rolle. Dies gilt von den Polarmomenten jeder beliebigen Parabel.

Die mittlere Höhe des Cylinders $h_m = \frac{J}{F} = \frac{M_p'}{F}$ stellt stets den mittleren Abstand der Flächenteilchen der Grundfläche vom Punkte P dar, die des Mantels den mittleren Abstand der Randpunkte von P.

Dreht sich also die Fläche F oder ihre Umrandung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die Achse PQ, so dafs jedes Teilchen die wirkliche Geschwindigkeit $r\vartheta$ hat, so giebt h_m zugleich den Abstand der Punkte an, welche die mittlere Geschwindigkeit haben, und wo die mittlere Centrifugalkraft $mr\vartheta^2$ herrscht. Diese Entfernung soll heifsen der Radius des Polarmomentes erster Ordnung.

Besonders einfach sind diese Momente für die zu P konzentrischen Kreise und die Polarparabeln (Spiralen) mit dem Centrum P. Schon die regelmäfsigen Vielecke machen sogar in Bezug auf ihren Mittelpunkt ziemlich viel Rechnung nötig, wie die folgenden Beispiele zeigen werden.

§ 92) Stereometrische Veranschaulichung des polaren Trägheitsmomentes ebener Flächen und ihrer Umrandung. Statt des Kegels denke man sich jetzt als begrenzende Fläche das Drehungsparaboloid $z = r^2$. Bei ihm giebt jedes Flächenteilchen f einen Cylinderinhalt fr^2, jede gröfsere Fläche F einen Cylinder inhalt $\sum fr^2$. Also:

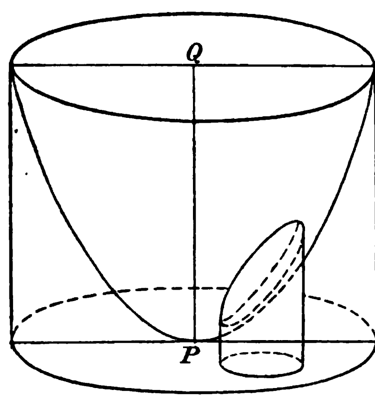


Fig. 31.

Der über einer Fläche stehende, durch das Paraboloid begrenzte Cylinder hat einen Inhalt, der gleich dem Trägheits-Momente T_p seiner Grundfläche in Bezug auf den Punkt P

ist. Seine Mantelfläche ist gleich dem Polarmomente zweiter Ordnung der Umrandung in Bezug auf P.

Die mittlere Höhe des Cylinders bestimmt sich als $h_m = \frac{T_p}{F}$. Sie befindet sich im Abstande $r_m = \sqrt{\frac{T_p}{F}}$ und giebt die Stellen mittleren Trägheitsmomentes an. r_m heifst der Radius des Trägheitsmomentes. Entsprechendes gilt vom Cylindermantel.

Denkt man sich jede Flächeneinheit von F mit der Masse 1 belegt und dreht sich die Fläche F um die Achse PQ, so hat jedes Flächenteilchen die Bewegungsenergie $fr^2 \frac{\vartheta^2}{2}$, die ganze Fläche also $\frac{\vartheta^2}{2} \sum fr^2 = \frac{\vartheta^2}{2} T_p$, so dafs die Energie proportional dem Trägheitsmomente ist. Die Wichtigkeit des Begriffs für die Dynamik liegt auf der Hand. Wird eine beliebig gestaltete Scheibe durch eine am gegebenen Hebelarm wirkende Triebkraft in gleichförmig beschleunigte Bewegung versetzt, so ist die Winkelbeschleunigung von der Gröfse

$$\gamma = \frac{pr}{T_p} = \frac{\text{Moment der Triebkraft}}{\text{Trägheitsmoment}}.$$

Schwingt die Scheibe als Pendel in ihrer Ebene um den Punkt P, so ist die Schwingungsdauer $t = \pi \sqrt{\frac{T_p}{Mg}}$, wo M jetzt das statische Moment in Bezug auf den Drehungspunkt bedeutet. Die reduzierte Pendellänge also ist gegeben durch $l = \frac{T_p}{M}$. Auch der Mittelpunkt des Stofses liegt in der Entfernung $\frac{T_p}{M}$. Für ihn ist die Drehungsachse beim Stofse eine freiwillige Achse, die also keine Erschütterung erhält. Die ausgedehnteste Anwendung findet das polare Trägheitsmoment in der Lehre von der Torsionsfestigkeit.

§ 93) Bemerkung. Alle diese stereometrischen Veranschaulichungen geben brauchbare Übungsaufgaben für die

darstellende Geometrie, und zwar handelt es sich um Durchdringungen senkrechter Cylinder und Prismen von beliebiger Grundfläche mit den begrenzenden Momentflächen, also mit der um 45^0 geneigten Ebene, dem parabolischen Cylinder, dem Kegel mit Neigung 45^0 der Geraden, des Drehungsparaboloids, wobei man auch noch zu Momenten höherer Ordnung übergehen kann.

Die nachstehenden Berechnungen von Momenten für gegebene ebene Flächen und Kurven geben also zugleich Berechnungen für die damit zusammenhängenden stereometrischen Gebilde und eine ganze Reihe von Sätzen über diese Gebilde. Jede genau konstruierte Figur dieser Art, sei sie in schräger oder senkrechter Parallelprojektion dargestellt, fördert den Schüler zugleich hinsichtlich des korrekten Zeichnens, der räumlichen Anschauung und auch der Vorstellung mechanischer Begriffe. Über die genannten Anwendungen, besonders solche technischer Art giebt des Verfassers Ingenieur-Mathematik Band I zahlreiche Beispiele.

Die oben abgeleiteten Verschiebungssätze $T_1 = T + e^2 F$ und $T_{p_1} = T_p + e^2 F$ (für Flächen) bezw. $T_1 = T + e^2 s$ und $T_{p_1} = T_p + e^2 s$ (für Bogen) geben für Cylinder und Cylindermäntel, die in der besprochenen Weise parabolisch begrenzt sind, leicht auszusprechende stereometrische Sätze, von denen namentlich der für T_p angedeutete von überraschender Einfachheit ist. Dabei sind T und T_p die für eine Schwerpunktsachse bezw. den Schwerpunkt geltenden Momente. Auch der Satz $T_p = T_x + T_y$ läfst eine einfache Deutung stereometrischer Art zu.

x) Beispiele von Momenten ebener Flächen und Kurven, nebst Sätzen über die Poinsotschen und Clebsch-Culmannschen Trägheitsellipsen und über die Lemniskate des Centrifugalmoments.

a) Statische Momente und Schwerpunkte ebener Flächen und ihrer Umrandung.

§ 94) Hinsichtlich der Schwerpunkte sind schon in Band II und Band III zahlreiche Beispiele durchgeführt, durch die zugleich die statischen Momente in Bezug auf

irgend welche Achsen der Ebene erledigt sind. Abgesehen von den Flächen und Kurven mit mehreren Symmetrieachsen, bei denen der Schwerpunkt Mittelpunkt ist, handelt es sich z. B. um das Dreieck und dessen Umrandung, um das Viereck und seine Umrandung, um den Kreissektor und den zugehörigen Kreisbogen, auch um dessen gesamte Umrandung, um den Kreisabschnitt und seine Umrandung. Bei den Abschnitten und Sektoren der Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln aber handelt es sich nur um die Flächen, nicht um die Bogen. In Band I geschah es in dem Kapitel über Cylinder und Prismen, besonders auch abgeschrägte Cylinder und Prismen, in Band III bei den Untersuchungen über die Guldinsche Inhaltsformel und Flächenformel.

§ 96) Gelegentlich der Schichtenformel und der Erweiterung der Simpsonschen Regel wurden auch die Momente für die Flächen der Parabeln höherer Ordnung erledigt. Der Vollständigkeit halber mufs aber einiges beigefügt werden, wobei die Parabel zweiter Ordnung $x = ky^2$ als Beispiel dienen soll, die sich auch in der Form

$$y = \sqrt{\frac{x}{k}} = \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

schreiben läfst, also in Bezug auf die andere Achse von der $\frac{1}{2}$ ter Ordnung ist. Die Fläche ACD ergab

$$\overset{y_1}{\underset{0}{F}} = k\frac{y_1^3}{3}, \quad \overset{y_1}{\underset{0}{M_x}} = k\frac{y^4}{4},$$

also die Schwerpunktshöhe

$$y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{3}{4}\,y_1.$$

Für dieselbe Fläche führt aber die Gleichung

$y = \sqrt{\frac{x}{k}}$ auf senkrechte

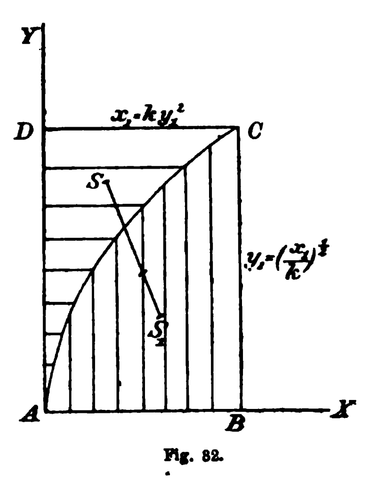


Fig. 82.

Querschnitte von der Form $q_1 = \sqrt{\frac{1}{k}}\left[x_1^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right]$, wobei x_1 als konstant, x als veränderlich zu betrachten ist. Man erhält also für die Fläche

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \sqrt{\frac{1}{k}}\left[x_1^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x_1}{1} - \frac{x_1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \sqrt{\frac{1}{k}}\left[x_1^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} x_1^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}\frac{x_1^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}}.$$

für das statische Moment in Bezug auf AD also

$$\overset{x_1}{\underset{0}{M_y}} = \sqrt{\frac{1}{k}}\left[x_1^{\frac{1}{2}} \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right] = \sqrt{\frac{1}{k}}\left[\frac{x_1^{\frac{5}{2}}}{2} - \frac{2}{5} x_1^{\frac{5}{2}}\right] = \frac{1}{10}\frac{x_1^{\frac{5}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}}.$$

Demnach wird der Schwerpunktsabstand von der Y-Achse

$$x_s = \frac{M_y}{F} = \frac{\frac{1}{10}\frac{x_1^{\frac{5}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{3}\frac{x_1^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}}} = \frac{3}{10} x_1.$$

Nach derselben Methode sind die Trägheitsmomente und Trägheitsabstände in Bezug auf beide Achsen zu behandeln, wovon jetzt nicht die Rede sein soll.

§ 96) Die Fläche ABC kann ebenfalls nach den Schichtenformeln $q = ky_1^2 - ky^2$ bezw. $q_1 = \frac{1}{\sqrt{k}} x^{\frac{1}{2}}$ behandelt werden. Da aber die Fläche hier das Doppelte von

der vorigen ist, läfst sich auch die Verlängerung von SM um die Hälfte anwenden, was S_1 giebt. Letzteres führt auf $\frac{3}{8}y_1$ und $\frac{3}{5}x_1$ als Schwerpunktsabstände von der Y-Achse und X-Achse. Die Schichtenformel führt auf dieselben Werte, denn

$$q = k\,[y_1^2 - y^2] \text{ giebt } F = k\left[y_1^2 \cdot \frac{y_1}{1} - \frac{y_1^3}{3}\right] = \frac{2}{3}ky_1^3,$$

$$M = k\left[y_1^2 \cdot \frac{y_1^2}{2} - \frac{y_1^4}{4}\right] = \frac{1}{4}ky_1^4,$$

also wird jetzt

$$y_0 = \frac{M}{F} = \frac{\frac{1}{4}ky_1^4}{\frac{2}{3}ky_1^3} = \frac{3}{8}y_1,$$

$$\text{und } q_1 = \frac{1}{\sqrt{k}}x^{\frac{1}{2}} \text{ führt auf } F = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{x_1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot x_1^{\frac{3}{2}},$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{x_1^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt{k}}x_1^{\frac{5}{2}},$$

also wird jetzt

$$x_0 = \frac{M}{F} = \frac{\frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt{k}}x_1^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{k}}x_1^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}x_1.$$

§ 97) Nach diesem Vorgange kann man z. B. folgende Tabelle für die Parabeln $y = ky^p$ aufstellen:

---

*) M ist der Mittelpunkt des Rechtecks $ABCD$.

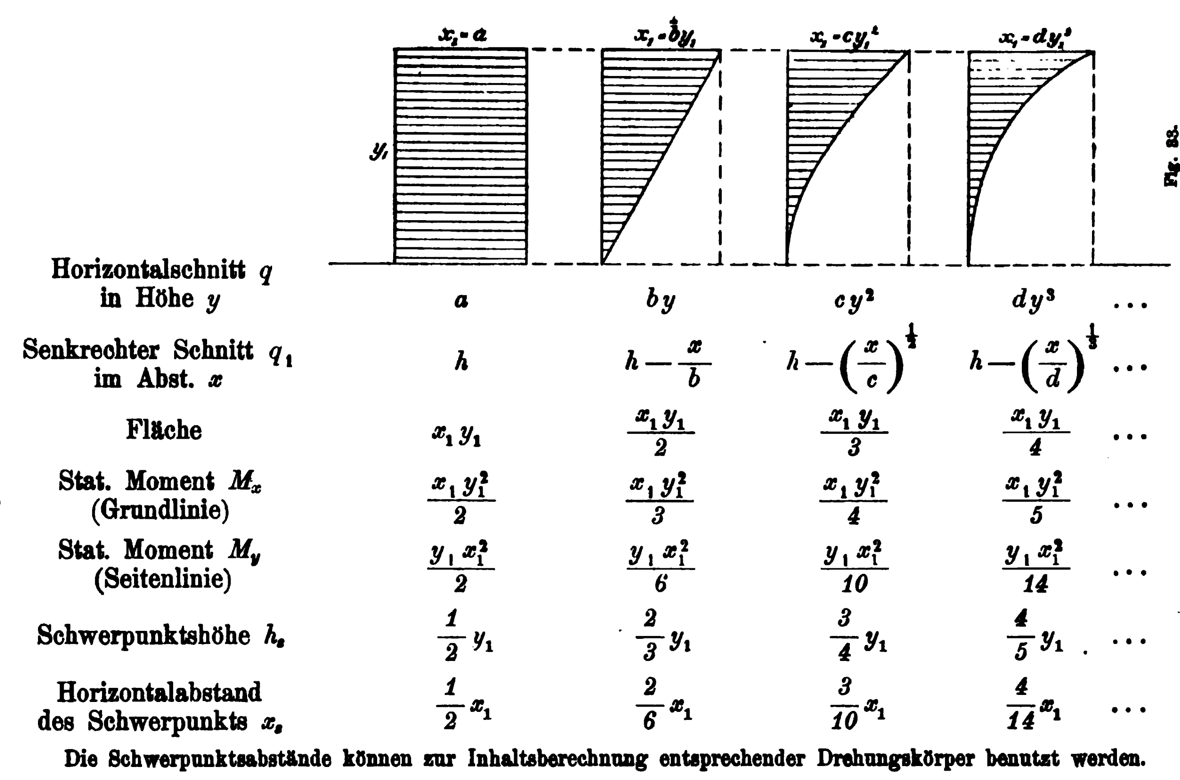


Fig. 33.

Horizontalschnitt q in Höhe y	a	$b y$	$c y^2$	$d y^3$	...
Senkrechter Schnitt q_1 im Abst. x	h	$h - \frac{x}{b}$	$h - \left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$	$h - \left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{1}{3}}$	...
Fläche	$x_1 y_1$	$\frac{x_1 y_1}{2}$	$\frac{x_1 y_1}{3}$	$\frac{x_1 y_1}{4}$	...
Stat. Moment M_x (Grundlinie)	$\frac{x_1 y_1^2}{2}$	$\frac{x_1 y_1^2}{3}$	$\frac{x_1 y_1^2}{4}$	$\frac{x_1 y_1^2}{5}$	...
Stat. Moment M_y (Seitenlinie)	$\frac{y_1 x_1^2}{2}$	$\frac{y_1 x_1^2}{6}$	$\frac{y_1 x_1^2}{10}$	$\frac{y_1 x_1^2}{14}$	...
Schwerpunktshöhe h_s	$\frac{1}{2} y_1$	$\frac{2}{3} y_1$	$\frac{3}{4} y_1$	$\frac{4}{5} y_1$	...
Horizontalabstand des Schwerpunkts x_s	$\frac{1}{2} x_1$	$\frac{2}{6} x_1$	$\frac{3}{10} x_1$	$\frac{4}{14} x_1$	...

Die Schwerpunktsabstände können zur Inhaltsberechnung entsprechender Drehungskörper benutzt werden.

In jeder Horizontalreihe erkennt man bei dieser Schreibweise ein Fortschreiten der Zahlen in den Zählern bezw. Nennern nach arithmetischer Reihe, so dafs z. B. die letzte Reihe weitergeht mit $\frac{5}{18}x$, $\frac{6}{22}x_1$, $\frac{7}{26}x_1$ u. s. w.

§ 98) **Daraus geht zugleich hervor, dafs man für die gebrochenen Exponenten einfach interpolieren kann.** So würde z. B. für die Parabeln $x = k y^{\frac{1}{2}}$, $x = k_1 y^{\frac{3}{2}}$, $x = k_2 y^{\frac{5}{2}}$ in der letzten Reihe einzuschalten sein

$$x_s = \frac{\frac{1+2}{2}}{\frac{2+6}{2}} x_1 = \frac{3}{8} x_1, \quad x_s = \frac{\frac{2+3}{2}}{\frac{6+10}{2}} x_1 = \frac{5}{16} x_1, \quad x_s = \frac{\frac{3+4}{2}}{\frac{10+14}{2}} x_1 = \frac{7}{24} x_1$$

und würde es weitergehen mit $\frac{9}{32}x_1$, $\frac{11}{40}x_1$ u. s. w. Für die Parabeln $x = k y^{\frac{1}{3}}$ und $k y^{\frac{1}{3}}$ würde zwischen $1 = \frac{3}{3}$ und $2 = \frac{6}{3}$ einzuschalten sein $\frac{4}{3}$ und $\frac{5}{3}$, zwischen $2 = \frac{6}{3}$ und $6 = \frac{18}{3}$ dagegen $\frac{10}{3}$ und $\frac{14}{3}$, man hätte also

$$x_s = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{10}{3}} x_1 = \frac{4}{10} x_1, \quad \text{bezw.} \quad x_s = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{14}{3}} x_1 = \frac{5}{14} x_1 .$$

Die Reihe würde also im ganzen lauten $x_s = \frac{3}{6} x_1$, $\frac{4}{10} x_1$, $\frac{5}{14} x_1$, $\frac{6}{18} x_1$ u. s. w. Diese arithmetischen Reihen treten für gewisse Schreibweisen auch bei den Trägheitsmomenten, Centrifugalmomenten u. s. w. auf. Mit Hilfe einer Tabelle, die nur die ersten drei Kolonnen enthält, kann man also nicht nur mit Hilfe der Fortsetzung der Reihen nach rechts, sondern auch durch Interpolation und endlich durch Fortsetzung mit Hilfe der Schichtenformel für beliebige Momente höherer Ordnung zu allen möglichen Resultaten gelangen. Setzt man $a = b = c = d = \ldots$, so ergiebt sich zugleich, dafs jede der Flächen das statische Moment der vorhergehenden in Bezug auf die Grundlinie darstellt, also jeder zugehörige parabolische Cylinder das statische Moment des vorangegangenen in Bezug auf die Grundfläche.

b) Trägheitsmoment für ebene Flächen und Kurven, Trägheitsmittelpunkte u. dergl.

§ 99) Für die Flächen der Parabeln höherer Ordnung würde die obige Tabelle folgendermafsen fortzusetzen sein.

Ordnung u. s. w.	0	1	2	3	…
1) Trägheitsmoment T_x in Bezug auf Grundlinie	$\frac{x_1 y_1^3}{3}$	$\frac{x_1 y_1^3}{4}$	$\frac{x_1 y_1^3}{5}$	$\frac{x_1 y_1^3}{6}$	…
2) Trägheitsmoment T_y' in Bezug auf Seitenlinie	$\frac{y_1 x_1^3}{3}$	$\frac{y_1 x_1^3}{12}$	$\frac{x_1 y_1^3}{21}$	$\frac{x_1 y_1^3}{30}$	…
3) Höhe h_m des Trägheitsmittelpunktes für T_x'	$y_1 \sqrt{\frac{1}{3}}$	$y_1 \sqrt{\frac{2}{4}}$	$y_1 \sqrt{\frac{3}{5}}$	$y_1 \sqrt{\frac{4}{6}}$	…
4) Horizontalabstand x_m des Trägheitsmittelpunktes für T_y'	$x_1 \sqrt{\frac{1}{3}}$	$y_1 \sqrt{\frac{2}{12}}$	$y_1 \sqrt{\frac{3}{21}}$	$y_1 \sqrt{\frac{4}{30}}$	…
5) Höhe des Schwingungspunktes beim Pendeln um die Grundlinie	$\frac{2}{3} y_1$	$\frac{3}{4} y_1$	$\frac{4}{5} y_1$	$\frac{5}{6} y_1$	…
6) Horizontalabstand des Schwingungspunktes beim Pendeln um die Seitenachse	$\frac{2}{3} x_1$	$\frac{6}{12} x_1$	$\frac{10}{21} x_1$	$\frac{14}{30} x_1$	…

7) Polares Trägheitsmoment in Bezug auf die linke Grundecke $T'_p = T'_x + T'_y$	$\frac{y_1 x_1}{3}\left(x_1^2 + \frac{3}{3} y_1^2\right)$	$\frac{x_1 y_1}{12}\left(x_1^2 + \frac{12}{4} y_1^2\right)$	$\frac{x_1 y_1}{21}\left(x_1^2 + \frac{21}{5} y_1^2\right)$	$\frac{x_1 y_1}{30}\left(x_1^2 + \frac{30}{6} y_1^2\right)$
8) Trägheitsmoment für Schwerpunktsachse $T_x = T'_x - h_s^2 F$	$\frac{x_1 y_1^3}{4.3}$	$\frac{x_1 y_1^3}{6.6}$	$\frac{x_1 y_1^3}{8.10}$	$\frac{x_1 y_1^3}{10.15}$ ...
9) Trägheitsmoment für Schwerpunktsachse $T_y = T'_y - h_s^2 F$	$y_1 x_1^3\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2^2}\right]$	$y_1 x_1^3\left[\frac{1}{12} - \frac{2}{6^2}\right]$	$y_1 x_1^3\left[\frac{1}{21} - \frac{3}{10^2}\right]$	$y_1 x_1^3\left[\frac{1}{30} - \frac{4}{14^2}\right]$

Diese Schreibweise läfst die Reihen noch erkennen. Bei der vereinfachten Form

8*) $T_x =$	$\frac{x_1 y_1^3}{12}$	$\frac{x_1 y_1^3}{36}$	$\frac{x_1 y_1^3}{80}$	$\frac{x_1 y_1^3}{150}$ ...
9*) $T_y =$	$\frac{y_1 x_1^3}{12}$	$\frac{y_1 x_1^3}{36}$	$\frac{37}{2100} y_1 x_1^3$	$\frac{19}{1470} y_1 x_1^3$ ...

sind die Reihen nicht mehr zu übersehen. Endlich wäre noch das wichtige Polarmoment für den Schwerpunkt $T_p = T_x + T_y$ zu bilden, also z. B. in der Schreibweise

10) $$T_p = \frac{x_1 y_1^3}{4.3} + y_1 x_1^3\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2^2}\right], \quad \frac{x_1 y_1^3}{6.6} + y_1 x_1^3\left[\frac{1}{12} - \frac{2}{6^2}\right], \dots$$

wobei man die Reihen erkennt, oder in der Form

10*) $$T_p = \frac{x_1 y_1 (x_1^2 + y_1^2)}{12}, \quad \frac{x_1 y_1 (x_1^2 + y_1^2)}{36}, \quad x_1 y_1\left(\frac{37}{2100} x_1^2 + \frac{y_1^2}{80}\right), \dots$$

wobei die Reihenübersicht verloren geht.

§ 100) Man suche noch folgende Trägheitsmomente für die Schwerpunktsachsen und den Schwerpunkt zu bilden:

Gleichschenkliges Dreieck:

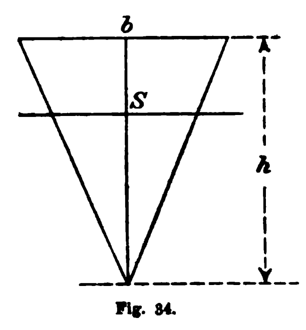


Fig. 34.

$$T_x = \frac{b h^3}{36}, \qquad T_y = \frac{h b^3}{48},$$

$$T_p = \frac{b h}{144}(4 h^2 + 3 b^2)$$

In Bezug auf die Spitze ist

$$T_p' = \frac{b h}{48}(12 h^2 + b^2),$$

$$T_x' = \frac{b h^3}{4},$$

in Bezug auf die Basis ist

$$T_x = \frac{b h^3}{12}.$$

Beim Rechteck mit den Seiten a und b ist daher für die Diagonale

$$T = 2\frac{d h_1^3}{12} = \frac{d h_1^3}{6} = \frac{1}{6}\sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^3 = \frac{a^3 b^3}{6(a^2 + b^2)}.$$

Symmetrisches Trapez:

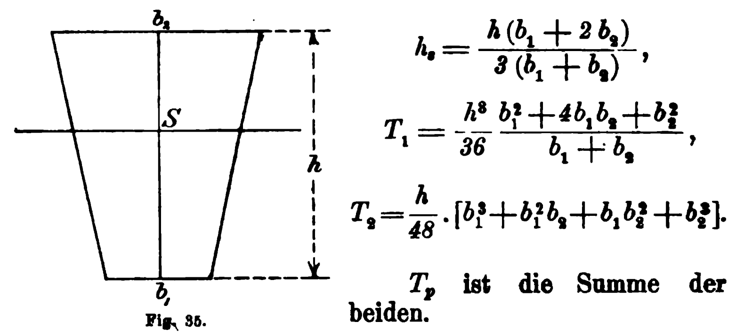


Fig. 35.

$$h_s = \frac{h(b_1 + 2 b_2)}{3(b_1 + b_2)},$$

$$T_1 = \frac{h^3}{36}\,\frac{b_1^2 + 4 b_1 b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2},$$

$$T_2 = \frac{h}{48}\cdot[b_1^3 + b_1^2 b_2 + b_1 b_2^2 + b_2^3].$$

T_p ist die Summe der beiden.

§ 101) Mit Hilfe von T_p' für die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks findet man für das regelmäfsige n-Eck

$$T_p = \frac{n\,b\,\varrho}{48}(12\,\varrho^2 + b^2) = \frac{u\,\varrho}{48}(12\,\varrho^2 + b^2),$$

wo b die Seite, ϱ der Radius des einbeschriebenen Kreises, n die Seitenzahl, u der Umfang ist. Das axiale Trägheitsmoment für jede beliebige Achse durch den Mittelpunkt ist nach dem Additionssatz $T_p = T_x + T_y$ halb so grofs, also

$$T_a = \frac{n\,b\,\varrho}{96}(12\,\varrho^2 + b^2).$$

Man hat also als polare Trägheitsmomente für

regelm. Dreieck		$T_a = \frac{b^4}{96}\sqrt{3}$,	$T_p = \frac{b^4}{48}\sqrt{3}$,
„	Viereck	$T_a = \frac{b^4}{12}$,	$T_p = \frac{b^4}{6}$,
„	Sechseck	$T_a = \frac{5\,b^4}{16}\cdot\sqrt{3}$	$T_p = \frac{5}{8}\,b^4\sqrt{3}$
„	Achteck	$T_a = \frac{b^4}{12}(11+8\sqrt{2})$,	$T_p = \frac{b^4}{6}(11+8\sqrt{2})$.

Für die regelmäfsigen Polygone mit gerader Seitenzahl ist der Satz

$$T_a = \frac{T_p}{2}$$

ohne weiteres klar, weil die Quadrantensumme $I + II$ sich in Bezug auf KL ebenso verhält wie $II + III$ in Bezug auf K_1L_1. Für ungerade Seitenzahl wird der Satz unten für regelmäfsige Flächen und ihre Umrandungen zusammen bewiesen.

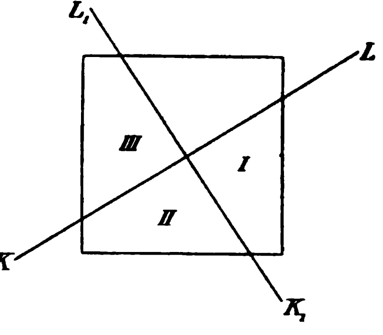


Fig. 86.

§ 102) Für den Kreis war das polare Trägheitsmoment schon nachgewiesen als $T_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$, wobei es auf

den Mittelpunkt bezogen war. Dies bestätigt sich, wenn man in T_p für das regelmäfsige n-Eck einsetzt $u = 2\pi$, $b = 0$. Für den Kreismittelpunkt und die durch ihn gelegten Achsen hat man also im ganzen

$$T_p = \frac{\pi r^4}{2}, \quad T_a = \frac{\pi r^4}{4}.$$

Für den konzentrischen Kreisring folgt

$$T_p = \frac{\pi}{2}(r^4 - r_1^4), \quad T_a = \frac{\pi}{4}(r^4 - r_1^4).$$

§ 103) Für die Halbkreisfläche wird in Bezug auf den Schwerpunkt und die durch ihn gelegten Hauptachsen

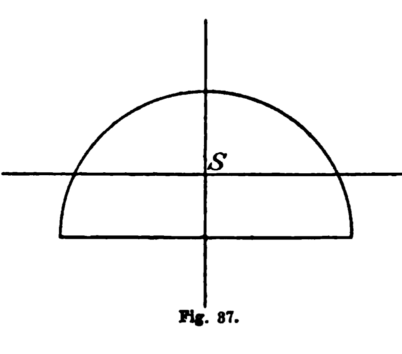


Fig. 87.

$$T_x = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right),$$

$$T_y = \frac{\pi r^4}{8},$$

$$T_p = r^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi}\right).$$

104) Für Ellipsen mit den Halbachsen a und b ist, wie aus der Halbkreisformel

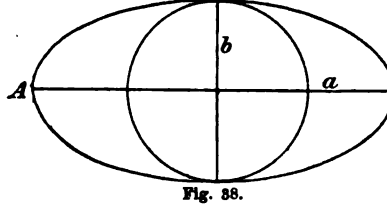


Fig. 88.

$$T = \frac{\pi b^4}{4}$$

in Bezug auf AB hervorgeht, nach Cavalieris Methode das axiale Trägheitsmoment

$$T_1 = \frac{a}{b}\cdot\left(\frac{\pi b^4}{4}\right) = \frac{\pi a b^3}{4}.$$

In Bezug auf CD folgt aus der Halbkreisformel $T = \frac{\pi a^4}{4}$ das $\frac{b}{a}$ fache, also $T_2 = \frac{b}{a}\left(\frac{\pi a^4}{4}\right) = \frac{\pi a^3 b}{4}$.

Das polare Trägheitsmoment in Bezug auf den Mittelpunkt ist für die Ellipsenfläche

$$T_p = \frac{\pi}{4}(a b^3 + a^3 b) = \frac{\pi a b}{4}(b^2 + a^2).$$

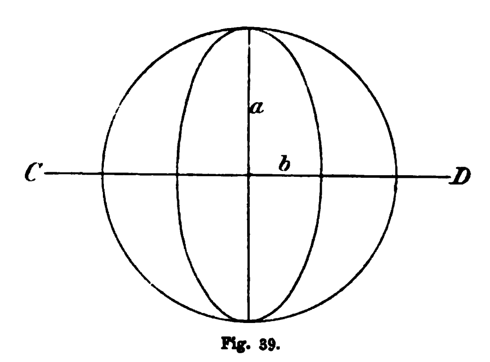


Fig. 39.

§ 105) In des Verfassers Ingenieurmathematik findet man noch elementar abgeleitet die Formeln für Viertelkreis, allgemeinen Sektor, allgemeines Kreissegment, allgemeine Halbellipse, elliptischen Ring, Querschnitt der Flügelachse und der Säule mit Verstärkungsrippen und die Momente für die wichtigsten Querschnitte des Maschinenbaues, als T-Eisen, Γ-Eisen, ⅂-Eisen, trapezförmige T-Träger, Gurtungen u. s. w., die für die Biegungsfestigkeit, Strebfestigkeit und Torsionsfestigkeit von Wichtigkeit sind, aber auch Beispiele für die Dynamik, Stereometrie u. s. w. abgeben.

Dort sind auch graphische Methoden zur Bestimmung der Schwerpunkte, z. B. auch die Methoden von Nehls, Mohr, Land, Culmann und Reye angegeben, denen Verfasser auch noch eine Methode mittels einfacher konformer Transformationen beigefügte, durch welche auch Aufgaben elementar gelöst werden, die sich auf schwierigere Begrenzungen der Flächen durch Parabeln, kardioidische Kurven höherer Ordnung, gleichseitige Hyperbeln zweiter und höherer Ordnung, Lemniskaten höherer Ordnung u. dergl. beziehen.

Jede der gelösten Aufgaben läfst sich auch als Lösung einer entsprechenden stereometrischen Auf-

gabe betrachten, die sich auf einen eben oder parabolisch abgeschrägten Cylinder bezieht, wobei das Paraboloid sowohl ein cylindrisches als auch ein Drehungsparaboloid sein kann.

Unter den dort gelösten Aufgaben seien folgende genannt: Schwerpunktsbestimmung für den Meridiankeil einer Kugel, Berechnung der Tragfähigkeit von Achsen und technischen Trägern, von Säulen und Streben beliebigen Querschnitts bei verschiedenen Arten der Belastung, die Drehungsenergie von Schleifsteinen, Mühlsteinen, Schwungringen einfacher Form, Probleme über den verzögerten Fall drehender Körper, die durch Abwickelung eines Fadens oder bei schiefer Ebene durch Reibung zum Drehen gezwungen werden, wobei falsche Auffassungen über das Verhalten des Drehungswinkels widerlegt werden, Aufgaben über die Atwoodsche Fallmaschine, über das Schwingen physischer Pendel, über die Leistungsfähigkeit cylindrischer Triebwellen, besonders der Schraubenwellen von Schiffsmaschinen, von Transmissionswellen, Bestimmungen für den Mittelpunkt des seitlichen Wasserdrucks u. s. w. Alle diese Aufgaben lassen sich mit Hilfe der für ebene Flächen bestimmten Trägheitsmomente lösen.

c) Trägheitsmomente ebener Linien in Bezug auf eine Achse ihrer Ebene.

Von diesen seien nur einige genannt.

§ 106) Für die Gerade denke man sich das Trägheitsmoment jedes Teilchens in Bezug auf die durch den Punkt A gehende Achse, die senkrecht auf der Ebene der Zeichnung steht, durch ein Lot, z. B. BC, dargestellt. Dann liegen die Endpunkte auf einer Parabel, denn jedes Lot $\frac{l}{n} x^2$

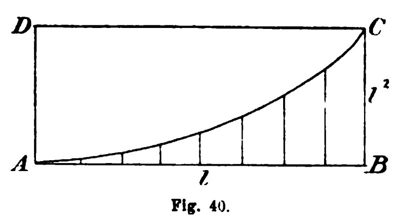


Fig. 40.

ist proportional dem Quadrate des Abstands x. Da die Parabelfläche vom Rechteck den dritten Teil abschneidet, handelt es sich um das Moment

$$T_1 = l\frac{l^2}{3} = \frac{l^3}{3}.$$

Dabei ist die durch AB und die Achse gehende Ebene als die des Trägheitsmomentes betrachtet.

Verschiebt man die Achse parallel zu sich selbst nach dem Halbierungspunkte, so wird nach dem Verschiebungssatze

$$T = T_1 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 . l = \frac{l^3}{12}.$$

Faſst man aber die Ebene des Trägheitsmomentes als senkrecht gegen die obige Achse stehend auf, so erscheint dasselbe Trägheitsmoment $T_p' = \frac{l^3}{3}$ als das polare Trägheitsmoment der Geraden für A, ebenso $T_p = \frac{l^3}{12}$ als das Polarmoment für den Schwerpunkt.

[In der Physik wird daher das mechanische Trägheitsmoment eines dünnen Stabes (Drahtes u. dergl.) von der Masse m angenähert als $m\frac{l^2}{2}$ bezw. $m\frac{l^2}{12}$ betrachtet und bei der Theorie des physischen Pendels damit gerechnet. Es ist nämlich m an Stelle des einen l getreten.]

§ 107) Das polare Trägheitsmoment einer Geraden AB in Bezug auf einen beliebigen Punkt P der Ebene ist natürlich nach der Verschiebungsformel

$$T_p = \frac{l^3}{12} + e^2 l,$$

wo e die Entfernung des Poles P von S ist.

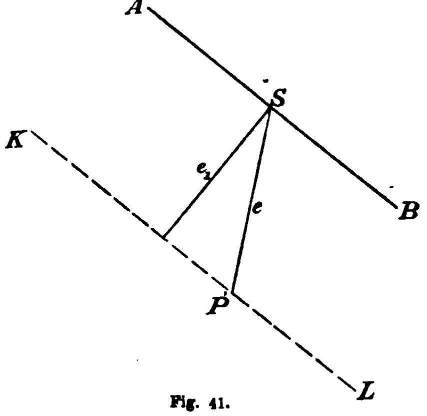


Fig. 41.

§ 108) **Das axiale Trägheitsmoment der Geraden** in Bezug auf eine zu ihr parallele Achse, die von ihr die Entfernung q hat, ist, da das der Geraden in Bezug auf sie selbst den Wert Null hat, von der Gröfse $0 + lq^2$.

Geht die gewählte Achse durch den Schwerpunkt der Geraden und bildet sie mit dieser den Winkel α, so denke man sich in B über dem Teilchen $\frac{l}{n}$ das Lot

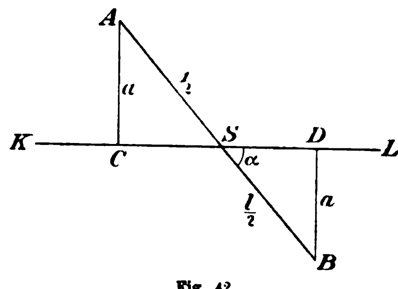


Fig. 42.

$$a^2 = BD^2 = \left(\frac{l}{2}\sin\alpha\right)^2$$

auf der Ebene errichtet. Geschieht dies an jeder Stelle der Geraden mit der entsprechenden Entfernung a_1, so steht über der Geraden AB eine Parabel, die vom Rechtecke aus l und $a^2 = \frac{l^2}{4}\sin^2\alpha$ den dritten Teil abschneidet. Das Trägheitsmoment nimmt also den Wert

$$T_1 = \frac{1}{3}\, l\, \frac{l^2}{4}\sin^2\alpha = \frac{l^3}{12}\sin^2\alpha\,,$$

oder wenn man den gröfsten möglichen Wert $\frac{l^3}{12} = T$ setzt, den Wert

$$T_1 = T\sin^2\alpha$$

an. Bezeichnet man die entsprechenden Trägheitsradien mit ϱ und ϱ_1, so folgt aus $\varrho^2 l = \frac{l^3}{12}$ und aus $\varrho_1^2 l = \frac{l^3}{12}\sin^2\alpha$, dafs $\varrho = \frac{l}{\sqrt{12}}$ und

$$\varrho_1 = \frac{l}{\sqrt{12}}\sin\alpha = \varrho\sin\alpha.$$

Denkt man sich also um S einen Kreis mit Radius $r = \frac{1}{\varrho} = \frac{\sqrt{12}}{l}$ gelegt und die beiden zu AB parallelen Tangenten gezeichnet, so ist

$$SE = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\varrho_1}$$

der reciproke Wert des zur Achse SE gehörigen Trägheitsradius.

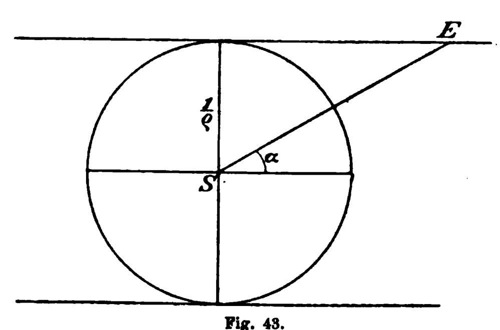


Fig. 43.

Denkt man sich also den reciproken Wert aller Trägheitsradien auf jeder durch S gehenden Achse von S aus angetragen, so erhält man als Endpunkte lauter Punkte dieser beiden Geraden. Die letzteren lassen sich als unendlich lange Ellipse betrachten. Es handelt sich also um einen Sonderfall der Poinsotschen Trägheitsellipse. Auf diese gelangt man hier bei folgender Betrachtung.

§ 109) Man denke sich die Achsen KL statt durch S durch einen beliebigen Punkt P der Ebene gelegt und

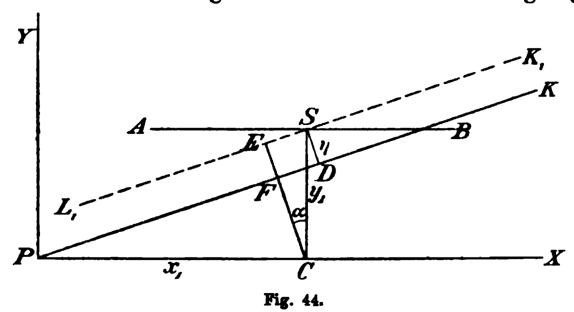


Fig. 44.

wähle z. B. die durch P gehende Parallele zu AB als X-Achse des Koordinatensystems, P als Anfangspunkt. Ist nun durch x_1, y_1 der Schwerpunkt S bestimmt, so ist für die durch P gelegte Gerade PK von der Neigung α die Gröſse der Verschiebung $\eta_1 = CE - CF = y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha$, also wird, da $\frac{l^3}{12} \sin^2\alpha$ das Trägheitsmoment der Geraden in Bezug auf die Parallele $L_1 K_1$ (durch S) ist, das Trägheitsmoment in Bezug auf PK.

$$T_\alpha = \frac{l^3}{12} \sin^2\alpha + (y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha)^2 l.$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich $\varrho_\alpha^2 l$, so findet man den Trägheitsradius in Bezug auf die Achse PK mittels der Gleichung

$$\varrho_\alpha^2 = \frac{l^2}{12} \sin^2\alpha + (y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha)^2,$$

oder, wenn man den für $\alpha = 0$ entstehenden Ausdruck gleich ϱ_0, den für $\alpha = 90^0$ entstehenden gleich ϱ_{90} setzt,

$$\varrho_\alpha^2 = \left(\frac{l^2}{12} + x_1^2\right) \sin^2\alpha + y_1^2 \cos^2\alpha - 2 x_1 y_1 \sin\alpha \cos\alpha$$

oder

$$\varrho_\alpha^2 = \varrho_0^2 \sin^2\alpha + \varrho_{90}^2 \cos^2\alpha - 2 x_1 y_1 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Setzt man jetzt die nur von der Veränderlichen α abhängige Gröſse $\frac{\cos\alpha}{\varrho_\alpha} = y$, ebenso $\frac{\sin\alpha}{\varrho_\alpha} = x$, so geht die Gleichung über in

$$1 = \varrho_0^2 x^2 + \varrho_{90}^2 y^2 - x_1 y_1 \sin 2\alpha$$

oder

$$1 = \varrho_0^2 x^2 + \varrho_{90}^2 y^2 - 2 x_1 y_1 \cdot xy,$$

oder in

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\varrho_0}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\varrho_{90}}\right)^2} - 2 x_1 y_1 \cdot xy = 1,$$

was im allgemeinen die Mittelpunktsgleichung einer schräg-liegenden Ellipse (mit P als Mittelpunkt) ist. Folglich:

Trägt man für jede durch P gehende Gerade als Achse den reciproken Wert des Trägheitsradius für die Gerade AB als Gerade PE auf, so liegen alle Endpunkte auf einer Ellipse, die P zum Mittelpunkte hat.

Dieser Satz enthält den vorigen als besonderen Fall, ist aber selbst nur ein Sonderfall eines weit allgemeineren, auf den erst später eingegangen werden soll.

§ 110) War $x_1 = 0$, so ging die Gleichung der Ellipse über in die einfachere Form

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\varrho_0}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\varrho_{90}}\right)^2} = 1,$$

das Trägheitsmoment aber für jede Richtung der Achse in

$$T_\alpha = \frac{l^3}{12} \sin^2 \alpha + y_1^2 \cos^2 \alpha \, l.$$

Der Radius ϱ_α bestimmt sich aus

$$\varrho_\alpha^2 = \varrho_0^2 \sin^2 \alpha + \varrho_{90}^2 \cos^2 \alpha = \frac{l^2}{12} \sin^2 \alpha + y_1^2 \cos^2 \alpha \, l,$$

wobei $\varrho_0^2 = y_1^2 \, l$, $\varrho_{90}^2 = \frac{l^2}{12}$ ist.

Dabei kann $\varrho_0 = \varrho_{90}$ werden. Man hat nur zu setzen

$$y_1^2 \, l = \frac{l^2}{12} \text{ oder } y_1 = \sqrt{\frac{l}{12}}.$$

Es giebt also für eine Gerade stets zwei Punkte P, für welche die sogenannte Trägheits-Ellipse in einen Kreis übergeht.

Auch dieser Satz hat allgemeinere Geltung.

§ 111) Das polare Trägheitsmoment der Kreislinie in Bezug auf den Mittelpunkt ist

$$T_p = 2 r \pi . r^2 = 2 \pi r^3.$$

In Bezug auf jeden Durchmesser ist das Achsialmoment halb so grofs, also

$$T = \pi r^3.$$

§ 112) **Das polare Trägheitsmoment der Umrandung eines regelmäfsigen n-Seits (n-Fcks) ist wie grofs?** Jede Gerade von der Länge b hat in Bezug auf ihren Halbierungspunkt das polare Trägheitsmoment $\frac{b^3}{12}$, also in Bezug auf den Mittelpunkt M des ganzen Gebildes das polare Trägheitsmoment

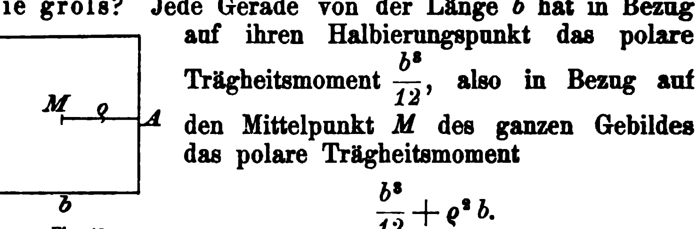


Fig. 45.

$$\frac{b^3}{12} + \varrho^2 b.$$

Für den gesamten Umfang u ist also

$$T_p = n\,b\left(\frac{b^2}{12} + \varrho^2\right) = u\left(\frac{b^2}{12} + \varrho^2\right).$$

(Für die Kreislinie ist $u = 2\varrho\pi$, b wird, da $n = \infty$ ist, gleich $\frac{u}{\infty} = 0$, also bleibt $T_p = 2\varrho\pi\,.\,\varrho^2 = 2\varrho^3\pi$, was mit dem obigen Resultate übereinstimmt.)

§ 113) Ist die Anzahl der Seiten eine gerade, so ist das **Achsialmoment** für eine beliebige Mittelpunktsachse KL ebenso grofs, wie für eine darauf senkrechte Mittelpunktsachse K_1L_1, denn die vier Quadranten sind kongruent, es verhält sich also $I + II$ in Bezug auf KL ebenso, wie $II + III$ in Bezug auf K_1L_1.*) **Folglich ist hier das achsiale Trägheitsmoment in Bezug auf jede beliebige Mittelpunktsachse gleich der Hälfte des polaren Trägheitsmomentes in Bezug auf den Mittelpunkt.** Alle solche Achsialmomente stimmen daher überein.

Ist die Anzahl der Seiten eine ungerade, so ist der Beweis für die Fortsetzung des Satzes etwas unbequemer. Man kann ihn aber beweisen mit Hilfe des allgemeinen Satzes von der Trägheitsellipse für ebene Gebilde. Denn diese geht in einen Kreis über, sobald mehr als zwei Symmetrieachsen vorhanden sind. Dieser Satz soll daher ganz allgemein für ebene Gebilde, mögen sie Flächen oder Linien sein, bewiesen werden.

*) Vgl. Fig. 35.

d) Satz von der Poinsotschen Trägheits-Ellipse für ebene Gebilde.

§ 114) Kennt man von einem ebenen Gebilde die Trägheitsmomente in Bezug auf zwei auf einander senkrechte Achsen X und Y die Trägheitsmomente T_x und T_y und das Centrifugalmoment C_{xy} in Bezug auf diese beiden Achsen, so ist in Bezug auf jede durch den Schnittpunkt von X und Y gelegte Achse, die gegen die erstere um α gedreht ist

$$T_\alpha = T_x \cos^2\alpha + T_y \sin^2\alpha - 2 \sin\alpha \cos\alpha \, C_{xy}.$$

Der Beweis dafür ist für dreidimensionale Gebilde schon in § 15 gegeben, gilt also auch hier. Setzt man die Summe l der Linien des Gebildes bezw. die Summe F der Flächen des Gebildes gleich m, so ist hier der Trägheitsradius ϱ_x in Bezug auf die X-Achse $\varrho_x^2 m = T_x$, ebenso ist $\varrho_y^2 m = T_y$, $\varrho_\alpha^2 m = T_\alpha$. Ebenso kann man ganz formell setzen $c^2 . m = C_{xy}$. Die Gleichung geht also über in

$$\varrho_\alpha^2 m = \varrho_x^2 m \cos^2\alpha + \varrho_y^2 m \sin^2\alpha - 2 c^2 m \sin\alpha \cos\alpha,$$

oder in

$$\varrho_\alpha^2 = \varrho_x^2 \cos^2\alpha + \varrho_y^2 \sin^2\alpha - 2 c^2 \sin\alpha \cos\alpha,$$

oder, wenn man einfacher ϱ statt ϱ_α schreibt, in

$$1 = \frac{\left(\frac{\cos\alpha}{\varrho}\right)^2}{\left(\frac{1}{\varrho_x}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\sin^2\alpha}{\varrho}\right)}{\left(\frac{1}{\varrho_y}\right)^2} - \frac{2\frac{\sin\alpha}{\varrho}\frac{\cos\alpha}{\varrho}}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}.$$

Setzt man die veränderlichen Gröfsen $\frac{\cos\alpha}{\varrho} = x$, $\frac{\sin\alpha}{\varrho} = y$ und die gegebenen Gröfsen $\frac{1}{\varrho_x} = a$, $\frac{1}{\varrho_y} = b$, so geht die Gleichung über in

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{2xy}{\left(\frac{1}{c}\right)^2} = 1,$$

und dies ist die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse. Folglich:

Trägt man auf allen Achsen, die durch denselben Punkt P gehen, die ihnen entsprechenden Trägheitsradien ϱ reciprok von P aus auf, so dafs z. B. $PK_a = \frac{1}{\varrho_a}$ ist, so liegen alle Endpunkte auf einer Ellipse, der sogenannten Trägheitsellipse.

Häufig wird statt $\frac{1}{\varrho_a}$ auf den Achsen $\frac{1}{\sqrt{T}}$ angetragen, was aber nur einen konstanten Faktor $\frac{1}{\sqrt{J}}$ bedeutet, der nur den Mafsstab ändert.

§ 115) Fällt P mit dem Schwerpunkt der Figur zusammen, so heifst die Ellipse die Centralellipse, und zwar die Poinsotsche Centralellipse.

Hat diese Figur eine Symmetrieachse, so ist diese zugleich eine der Symmetrieachsen der Centralellipse.

Hat die Figur zwei Symmetrieachsen, so fallen beide mit denen der Centralellipse zusammen.

Sind mehr als zwei Symmetrieachsen vorhanden, so geht die Centralellipse in einen Kreis über.

Folglich: Die Centralellipsen der regelmäfsigen n-Ecke sind Kreise. Für sämtliche durch den Schwerpunkt gelegten Achsen stimmen die axialen Trägheitsmomente überein und sind gleich der Hälfte des polaren Trägheitsmomentes.

§ 116) Demnach ist für die Umrandung eines regelmäfsigen n-Ecks das Trägheitsmoment in Bezug auf jede durch den Mittelpunkt gehende Achse

$$T = \frac{nb}{2}\left(\frac{b^2}{12} + \varrho^2\right) = \frac{u}{2}\left(\frac{b^2}{12} + \varrho^2\right),$$

für die Fläche des regelmäfsigen n-Ecks ist ebenso

$$T = \frac{nb\varrho}{96}(12\varrho^2 + b^2) = \frac{u\varrho}{96}(12\varrho^2 + b^2).$$

§ 117) Daraus folgt z. B. der stereometrische Satz: Wird ein senkrechtes regelmäfsiges Prisma durch

einen festen parabolischen Cylinder in dem durch die Gleichung $x = y^2$ definierten Sinne abgeschnitten, und dreht man das Prisma um seine Mittellinie, so bleibt während der Drehung sowohl der körperliche Inhalt, als auch die Mantelfläche für den abgeschnittenen Teil konstant, obwohl die Gestalt dabei im Wechsel begriffen ist.

Es bleibt nämlich der Mantel konstant gleich

$$T_1 = \frac{u}{2}\left(\frac{b^2}{12} + \varrho^2\right) + e^2 u,$$

und der körperliche Inhalt konstant gleich

$$T_2 = \frac{u\varrho}{96}(12\varrho^2 + b^2) + e^2 F,$$

wobei u der Umfang, F die Fläche der Grundfigur, e der Abstand ihres Schwerpunktes von der Nulllinie des parabolischen Cylinders ist.

Der Leser versuche auch den Satz über die Trägheitsellipse rein stereometrisch zu deuten, wobei es sich um den über einer beliebigen Grundfigur stehenden Cylinder bezw. seinen Mantel handelt.

Sämtliche vorstehenden Resultate lassen sich in mehrfacher Weise stereometrisch deuten.

§ 118) Wichtig ist noch folgendes: Ist das Centrifugalmoment C_{xy} gleich Null, so geht die Gleichung für T_α über in

$$T_\alpha = T_x \cos^2\alpha + T_y \sin^2\alpha,$$

die Gleichung für ϱ_α in

$$\varrho_\alpha^2 = \varrho_x^2 \cos^2\alpha + \varrho_y^2 \operatorname{ein}^2\alpha,$$

die Gleichung für die allgemeine Trägheitsellipse in

$$\varrho_x^2 x^2 + \varrho_y^2 y^2 = 1$$

bezw.

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\varrho_x}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\varrho_y}\right)^2} = 1.$$

Eins von den Trägheitsmomenten T_x und T_y ist also das gröfste, das andere das kleinste, sobald das Centrifugalmoment $C_{xy} = 0$ ist.

In Bezug auf Achsen, für die $C_{xy} = 0$ ist, werden also alle Formeln erheblich vereinfacht. Der kleinste und gröfste Trägheitsradius möge stets mit ϱ_x und ϱ_y bezeichnet werden, so dafs $a = \frac{1}{\varrho_x}$, $b = \frac{1}{\varrho_y}$ ist.

e) Satz über die Clebsch-Culmannsche Trägheitsellipse oder die zweite Trägheitsellipse.

§ 119) Legt man durch einen beliebigen Punkt O ein Strahlenbüschel und zieht man zu jedem Strahle eine Parallele in dem Abstande ϱ, der dem Trägheitsradius eines gegebenen ebenen Gebildes (Fläche, Liniensystem oder Punktsystem) in Bezug auf jenen Strahl als Achse entspricht, so umhüllen die Parallelen eine Ellipse von der Gleichung $\frac{x^2}{\varrho_y^2} + \frac{y^2}{\varrho_x^2} = 1$, wobei ϱ_x den kleinsten, ϱ_y den gröfsten Trägheitsradius bedeutet.

Beweis. In Figur 46 sei $OB = \varrho_y$, $OD = \varrho_x$, also die gezeichnete Ellipse, die im Satz besprochene. Macht man $OF = e = \sqrt{\varrho_y^2 - \varrho_x^2}$, so ist F ein Brennpunkt. Legt man um die Ellipse den umbeschriebenen Kreis, so umhüllt der rechte Winkel $FH'K'$, sobald H' stets auf dem Kreise wandert, die Ellipse.

Dabei ist für das Lot OJ

$$OJ^2 = OH'^2 - JH'^2$$

$$= \varrho_y^2 - ON^2 = \varrho_y^2 - e^2\cos^2\alpha = \varrho_y^2 - (\varrho_y^2 - \varrho_x^2)\cos^2\alpha.$$

oder

$$OJ^2 = \varrho_x^2 \cos^2\alpha + \varrho_y^2 \sin^2\alpha.$$

Nach den Schlufsbemerkungen des vorigen Paragraphen ist aber

$$\varrho_\alpha^2 = \varrho_x^2 \cos^2\alpha + \varrho_y^2 \sin^2\alpha,$$

folglich ist

$$OJ = \varrho_\alpha.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Ist O der Schwerpunkt, so heifst die Ellipse die Culmannsche Centralellipse.

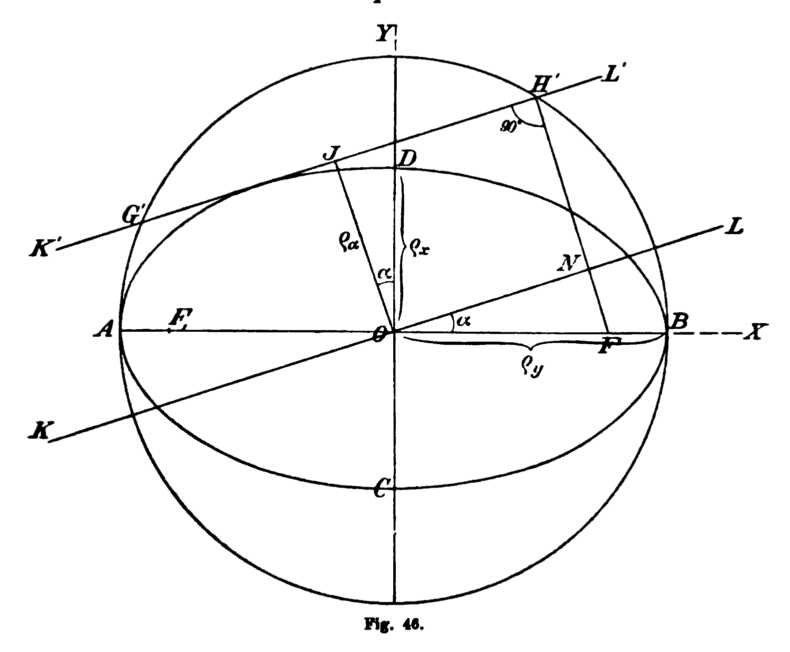


Fig. 46.

§ 120) Während bei der Poinsotschen Ellipse die gröfsere Hauptachse $a = \frac{1}{\varrho_x}$, die kleinere $b = \frac{1}{\varrho_y}$ war, ist hier $a_1 = \varrho_y$, $b_1 = \varrho_x$. Das Achsenverhältnis ist aber für beide Ellipsen $\frac{b}{a} = \frac{\varrho_x}{\varrho_y} = \frac{b_1}{a_1}$, d. h. die Ellipsen sind ähnlich und ähnlich liegend. Für die aufeinander liegenden gröfseren Halbachsen ist $a : a_1 = \frac{1}{\varrho_x} : \varrho_y = 1 : \varrho_x \varrho_y$.

Durch Culmanns graphische Statik ist diese zuerst von Clebsch aufgestellte Ellipse den Technikern noch

geläufiger geworden, als die von Poinsot aufgestellte Trägheitsellipse.

In der Ingenieurmathematik des Verfassers werden beide Arten von Trägheitsellipsen eingehender erörtert und auf zahlreiche Beispiele der technischen Praxis angewandt, besonders auf solche der Festigkeitslehre. Zeichnet man die Culmannsche Ellipse wie dort in die Querschnitte der behandelten Winkeleisen Γ, T-Eisen, Z-Eisen, ⊔-Eisen, ⌐-Eisen, ∩-Eisen, Eisenbahnschienen u. dergl. ein, so erkennt man ohne weiteres die Achsen geringster und gröſster Widerstandsfähigkeit, gegen Biegungs- und Strebungsbeanspruchung. Dort sehe man die Anwendungen nach.

§ 121) Was die stereometrischen Anwendungen angeht, so sei beispielsweise folgendes bemerkt. Figur 47 stellt das axiale Trägheitsmoment des Rechtecks $ABCD$ in Bezug auf die Mittellinie EF dar.

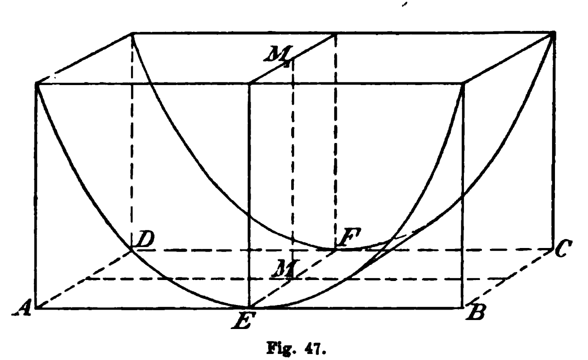


Fig. 47.

Dreht man das Rechteck um die Achse MM_1 unter Festhaltung des die drüberstehende Säule abschneidenden parabolischen Cylinders, so ändert sich der Inhalt proportional den entsprechenden Radien der Culmannschen Centralellipse. Dies gilt sowohl von der Fläche, als auch von dem Mantel der Säule.

Ebenso kann man das Rechteck festhalten und den parabolischen Cylinder um MM_1 drehen. Man kann den letzteren aber auch um einen beliebigen Punkt seiner Berührungslinie EF drehen, die nicht durch M zu gehen

braucht. Die Änderungen des Inhalts und der Mantelfläche sind dann denen der Radien der zum Drehungspunkte gehörigen Culmannschen Centralellipse proportional.

Die Ausführung von Beispielen bleibe dem Leser überlassen.

f) Einige Polarmomente erster Ordnung.

§ 122) Für die **Kreislinie** handelt es sich in Bezug auf den Mittelpunkt um $M'_p = 2\pi r \,.\, r = 2\pi r^2$, also nach der Schichtenformel für die **Kreisfläche** um $\overset{r}{\underset{0}{M'_p}} - 2\pi \frac{r^3}{3}$. Das erstere ist veranschaulicht durch einen Cylindermantel, das andere durch den Restkörper zwischen Cylinder und Kegel. (Der Kegel hat Leitlinien von 45^0 Neigung.)

123) Für den **Quadratumfang** handelt es sich bei der Quadratseite $b = 2x_1$ nach Figur 30 um vier seitliche Rechtecke von den Seiten $2x_1$ und $x_1\sqrt{2}$, wobei aus jedem eine gleichseitige Hyperbel von der Gleichung $x^2 - y^2 = x_1^2$ ausgeschnitten ist. Jedes Hyperbelsegment hat die Fläche

$$\overset{x_1\sqrt{2}}{\underset{x_1}{F}} = x_1\sqrt{2}\sqrt{(x_1\sqrt{2})^2 - x_1^2} - x_1^2\,{}^e lg \frac{x_1\sqrt{2} + \sqrt{(x_1\sqrt{2})^2 - x_1^2}}{x_1}$$
$$= x_1^2\left[\sqrt{2} - {}^e lg(1 + \sqrt{2})\right].$$

Im ganzen ergiebt sich als Polarmoment erster Ordnung

$$1) \qquad M'_p = 4\left[2x_1^2\sqrt{2} - x_1^2\sqrt{2} + x_1^2\,{}^e lg(1 + \sqrt{2})\right]$$
$$= 4x_1^2\left[\sqrt{2} + {}^e lg(1 + \sqrt{2})\right] = b^2\left[\sqrt{2} + {}^e lg(1 + \sqrt{2})\right].$$

§ 124) Um auf die Formel für die **Quadratfläche** zu kommen, betrachte man nur das Dreieck MAB, bei dem die Schicht, welche den Abstand x hat, nach 1) den Beitrag

$$q = x^2\left[\sqrt{2} + {}^e lg(1 + \sqrt{2})\right]$$

giebt. Nach der Schichtenformel giebt dies für das ganze Dreieck

$$\frac{x_1^3}{3}\left[\sqrt{2} + {}^e lg(1 + \sqrt{2})\right],$$

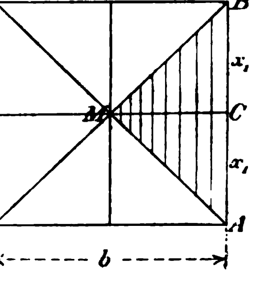


Fig. 48.

für die ganze Quadratfläche ist also das Polarmoment erster Ordnung in Bezug auf den Mittelpunkt M

$$2)\quad M_p' = \frac{4\,x_1^3}{3}\left[\sqrt{2} + {}^{e}lg(1+\sqrt{2})\right] = \frac{b^3}{6}\left[\sqrt{2} + {}^{e}lg(1+\sqrt{2})\right].$$

Der Punkt mittleren Abstandes von M ergiebt sich für den Umfang des Quadrates aus

$$\varrho_m = \frac{M_p'}{u} = \frac{4x_1^2\left[\sqrt{2} + {}^{e}lg(1+\sqrt{2})\right]}{8\,x_1} = \frac{x_1}{2}\left[\sqrt{2} + {}^{e}lg(1+\sqrt{2})\right]$$

$$= \frac{b}{4}\left[\sqrt{2} + {}^{e}lg(1+\sqrt{2})\right],$$

für die Quadratfläche aus

$$r_m = \frac{M_p'}{F} = \frac{\frac{4\,x_1^3}{3}\left[\sqrt{2} + {}^{e}lg(1+\sqrt{2})\right]}{4\,x_1^2} = \frac{x_1}{3}\left[\sqrt{2} + {}^{e}lg(1+\sqrt{2})\right]$$

$$= \frac{b}{6}\left[\sqrt{2} + {}^{e}lg(1+\sqrt{2})\right].$$

Dadurch sind für Drehungsbewegungen des Quadratumfangs oder der Quadratfläche die Punkte mittlerer Geschwindigkeit und mittlerer Centrifugalkraft gefunden.

§ 125) Denkt man sich ferner den Kegel der Figur 30, von dem hyperbolische „Segmente" abgeschnitten sind, ergänzt, so dafs sein Inhalt

$$J = \frac{\pi}{3}(x_1\sqrt{2})^2 \,.\, x_1\sqrt{2} = \frac{\pi}{3}\, 2\sqrt{2} \,.\, x_1^3$$

ist, und zieht man davon den in der Figur dargestellten kegelförmigen Innenkörper ab, so erhält man das vierfache vom Inhalte jedes der abgeschnittenen Segmente. Nun hat der Rechteckskörper den Inhalt

$$4\,x_1^3\sqrt{2},$$

der Momentkörper den Inhalt

$$\frac{4\,x_1^3}{3}\left[\sqrt{2} + {}^{e}lg(1+\sqrt{2})\right],$$

folglich ist der Inhalt des Innenkörpers gleich

$$4x_1^3\sqrt{2}-\frac{4x_1^3}{3}[\sqrt{2}+{}^e lg(1+\sqrt{2})]=\frac{4x_1^3}{3}[2\sqrt{2}-{}^e lg(1+\sqrt{2})],$$

was an sich ein bemerkenswertes Resultat ist. Die oben gesuchte Inhaltsdifferenz ist also

$$D=\frac{\pi}{3}2\sqrt{2}\,.\,x_1^3-\frac{4x_1^3}{3}[2\sqrt{2}-{}^e lg(1+\sqrt{2})],$$

oder

$$D=\frac{4x_1^3}{3}\left[\pi\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{2}+{}^e lg(1+\sqrt{2})\right].$$

Jedes der abgeschnittenen Kegelsegmente hat demnach den Inhalt

$$J=\frac{x_1^3}{3}\left[\frac{\pi-4}{\sqrt{2}}+{}^e lg(1+\sqrt{2})\right].$$

Dieses letztere Resultat läfst sich verallgemeinern und giebt zu weiteren Aufgaben vorliegender Art Anlafs.

§ 126) Einige andere Beispiele findet man in der Ingenieurmathematik des Verfassers, wo sie mit den obigen auf anderem Wege abgeleitet worden sind, z. B.:

Für das Rechteck mit den Seiten $2a$ und $2b$ ist in Bezug auf die beiden Mittellinien

$$M_p=\frac{4ab}{3}\sqrt{a^2+b^2}+\frac{2a^3}{3}{}^e lg\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$
$$+\frac{2b^3}{3}{}^e lg\frac{a+\sqrt{b^2+a^2}}{b}.$$

g) Einige Centrifugalmomente ebener Gebilde.

§ 127) Für das Rechteck $OABC$ mit den Seiten a und b ist das Centrifugalmoment in Bezug auf benachbarte Seiten a und b gleich dem statischen Momente des Körpers, der durch Abschrägung der über der Fläche stehenden Säule mittels einer Fläche, die unter 45^0 Neigung durch b gelegt

wird. Der Körper hat den Inhalt $a b . \frac{a}{2} = \frac{a^2 b}{2}$. Seine Schwerpunktsachse hat von a den Abstand $\frac{b}{2}$, also ist das gesuchte statische Moment

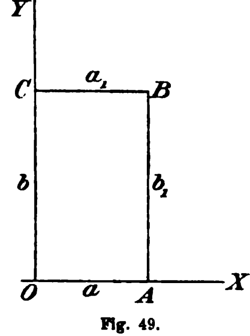


Fig. 49.

$$C_{xy} = \frac{a^2 b}{2} . \frac{b}{2} = \frac{a^2 b^2}{4}.$$

Denkt man sich über der untersuchten Fläche das hyperbolische Paraboloid der Figur 28 gezeichnet, so ist zugleich für die vom hyperbolischen Paraboloid begrenzte Säule der Inhalt gefunden.

§ 128) Über $AB = b_1$ steht die Säulenfläche $ab_1 = ab$. Ihre Schwerpunktsachse hat von der X-Achse die Entfernung $\frac{b}{2}$, also ist das statische Moment der Fläche in Bezug auf die X-Achse gleich $a b \cdot \frac{b}{2} = \frac{a b^2}{2}$. Das Centrifugalmoment von b_1 in Bezug auf beide Achsen ist demnach

$$C_{xy} = \frac{a b^2}{2}.$$

Dagegen steht über a_1 ein Dreieck von der Fläche $\frac{a_1^2}{2}$. Der Abstand von der X-Achse ist b_1, also wird das statische Moment für diese Fläche

$$C_{xy} = \frac{a^2}{2} b.$$

§ 129) Für eine beliebige schrägliegende Gerade DB, die z. B. von den Punkten $x_1, y_1 = 0$ und x_2, y_2 begrenzt ist, würde die Schwerpunktsachse SS_1 des Tetraeders $DBEF$ zu bestimmen sein. Ist dann $S_1 G = y_s$ und F die Fläche des Tetraeders, so ist das gesuchte Moment

$$C_{xy} = y_s . F.$$

Damit sind alle Aufgaben für gerade Linien und geradlinige Figuren gelöst und zugleich die entsprechenden Inhaltsformeln und die Formeln für Mantelflächen von

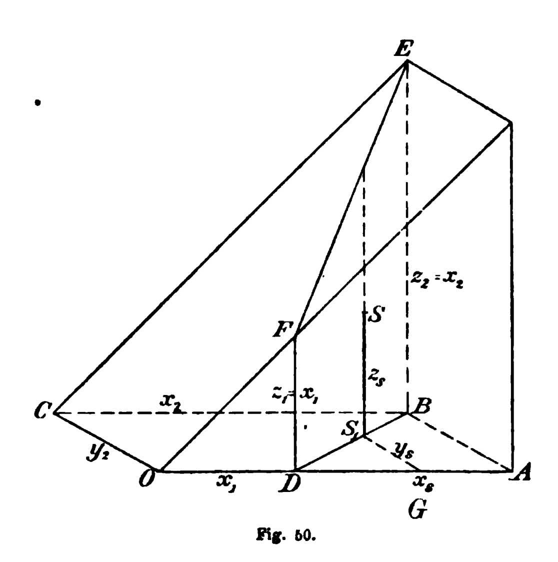


Fig. 50.

Säulen bestimmt, die hyperbolisch-paraboloidisch abgeschnitten sind.

§ 130) Für die Kreisfläche findet man in Bezug auf zwei einander rechtwinklig schneidende Tangenten einen Cylinderhuf von der Höhe $2r$, also vom Inhalte

$$\frac{1}{2}\pi r^2 \, . \, 2r = \pi r^3.$$

Der Abstand von der anderen Achse ist r, also wird das Centrifugalmoment für die Kreisfläche

$$C_{xy} = \pi r^4.$$

Der Mantel des Cylinderhufes hat die Fläche

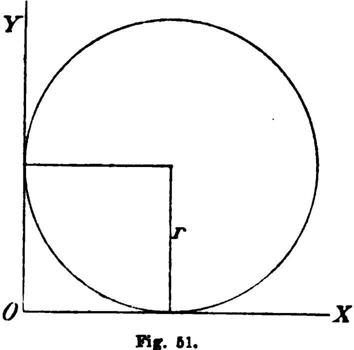


Fig. 51.

$\frac{1}{2} 2\pi r . 2r = 2\pi r^2$, die Schwerpunktsachse hat von der X-Achse den Abstand r, das Centrifugalmoment für die Umrandung der Fläche ist also

$$C_{xy} = 2\pi r^3.$$

Damit ist zugleich die Aufgabe gelöst, den Inhalt und die Mantelfläche der Säule zu bestimmen, die durch das hyperbolische Paraboloid der Figur 28 begrenzt wird.

§ 131) Ein Drehungskörper entstehe durch Drehung der Kurve

$$x = k y^p$$

$(p > -1)$ um die Y-Achse, dann liegt sein Schwerpunkt nach § 57 in der Höhe

$$h_s = \frac{2p+1}{2p+2} y_1,$$

wenn er von $y = 0$ bis $y = y_1$ reicht. Nun liegt aber der Schwerpunkt eines Guldinschen Körpers nach § 85 in der Höhe

$$h_s = \frac{C_{xy}}{M_y},$$

wo C_{xy} das Centrifugalmoment der rotierenden Fläche (im ersten Quadranten der XY-Ebene) in Bezug auf beide Achsen und M_y ihr statisches Moment in Bezug auf die Y-Achse ist.

Aus beiden Gleichungen folgt

$$C_{xy} = h_s M_y = \frac{2p+1}{2p+2} \cdot y_1 \cdot \overset{y_1}{\underset{0}{M_y}}.$$

Hier ist $M_y = \frac{y_1 x_1^2}{2 + p . 4}$, also wird

$$C_{xy} = \frac{2p+1}{2p+2} \cdot y_1 \frac{y_1 x_1^2}{2(2p+1)} = \frac{x_1^2 y_1^2}{4(p+1)} = \frac{k^2}{4} \cdot \frac{y_1^{2(p+1)}}{p+1}.$$

Damit ist das Centrifugalmoment für die Parabeln p^{ter} Ordnung in Bezug auf die Achsen X und Y bestimmt.

Für die gleichseitige Hyperbel ergiebt sich nach Ingenieurmathematik I, S. 252:

$$C_{xy} = \frac{h^2}{8}(2 + h^2).$$

§ 132) Dem Leser bleibe es überlassen, dasselbe für das rotierende Profil $y = a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots$ durchzuführen, wobei der Querschnitt sich auf eine Form

$$\pi y^2 = \pi [a_1 + b_1 y + c_1 y^2 + d_1 y^3 + \ldots]$$

bringen läfst.

Weitere Aufgaben findet man in der Ingenieurmathematik des Verfassers. Dort sind auf S. 202 bis 232 auch behandelt die graphostatischen Methoden von Nehls, Mohr, Land, Culmann, Reye zur Darstellung von statischen, Trägheits- und Centrifugalmomenten.

h) Satz über die Lemniscate des Centrifugalmoments einer ebenen Fläche.

§ 133) Dreht man die X-Achse um α, so gehen die Koordinaten x und y eines Flächenelements f in neue ξ und η über, und dabei ist

$$\xi = OE + EG$$
$$= OE + CD$$
$$= x \cos\alpha + y \sin\alpha,$$
$$\eta = FC - FE$$
$$= y \cos\alpha - x \sin\alpha.$$

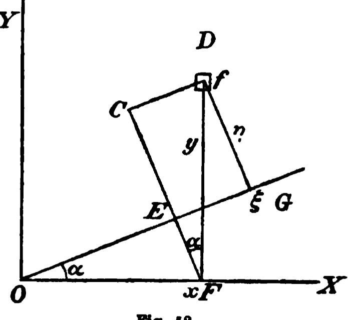


Fig. 52.

Demnach wird das neue Centrifugalmoment des Teilchens f jetzt

$$f\xi\eta = f(xy\cos^2\alpha - xy\sin^2\alpha + y^2 \sin\alpha\cos\alpha - x^2 \sin\alpha\cos\alpha),$$

und für eine ganze Fläche F wird es

$$\Sigma f\xi\eta = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\Sigma fxy + \sin\alpha\cos\alpha[\Sigma fy^2 - \Sigma fx^2],$$

oder

1) $$C_{\xi\eta} = \cos 2\alpha\, C_{xy} + \frac{1}{2}\sin 2\alpha(T_x - T_y)$$
$$= \cos 2\alpha\, C_{xy} - \frac{1}{2}\sin 2\alpha(T_y - T_x).$$

Dies ist der Drehungssatz für das Centrifugalmoment.

§ 134) Demnach wird $C_{\xi\eta} = 0$ für den Fall

$$\frac{1}{2} \sin 2\alpha \, (T_y - T_x) = \cos 2\alpha \; C_{xy}$$

oder für

$$\text{2)} \qquad \tan 2\alpha = \frac{2\,C_{xy}}{T_y - T_x}$$

Da man für $C_{\xi\eta} = 0$ die Culmannsche und die Poinsotsche Ellipse in der einfachsten Lage erhält, so findet man auf diesem Wege die Achsen kleinsten und gröfsten Trägheitsmomentes.

§ 135) Geht man von diesen Achsen aus, und dreht man um $-\alpha$, so erhält man

$$C_{\xi\eta} = 0 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \, (T_y - T_x),$$

oder, wenn man die Momente durch ihre Radien ersetzt,

$$F \,.\, \lambda^2 = \frac{1}{2} \sin (2\alpha) \, [\varrho_y^2 F - \varrho_x^2 F]$$

oder

$$\text{3)} \quad \lambda^2 = \frac{1}{2} (\varrho_y^2 - \varrho_x^2) \sin 2\alpha = \frac{e^2}{2} \sin 2\alpha = e^2 \sin\alpha \cos\alpha,$$

wobei $e = \sqrt{\varrho_y^2 - \varrho_x^2}$ wieder die Brennweite der Culmannschen Ellipse bedeutet.

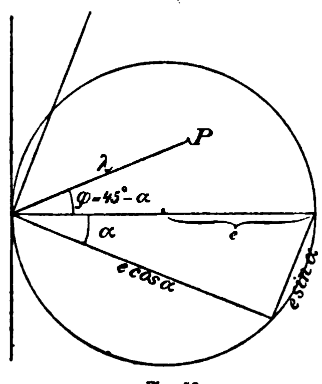


Fig. 53.

Jetzt kann λ als mittlere Proportionale zwischen $e \sin\alpha$ und $e \cos\alpha$ leicht konstruiert werden. Es ist als Halbierende des Winkels zwischen den Strahlen

$$-\alpha \text{ und } -\alpha + 90^\circ$$

einzutragen, es erhält also die Neigung

$$45^\circ - \alpha = \varphi.$$

Figur 53 stellt dies dar.

§ 136) Um die Gleichung 3) für die Konstruktion übersichtlicher zu haben, führe man $\varphi = 45^0 - \alpha$ in sie ein, d. h. man setze für α den Wert $45^0 - \varphi$, für 2α den Wert $90^0 - 2\varphi$ ein, so dafs sie übergeht in

3*) $$\lambda^2 = \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi .$$

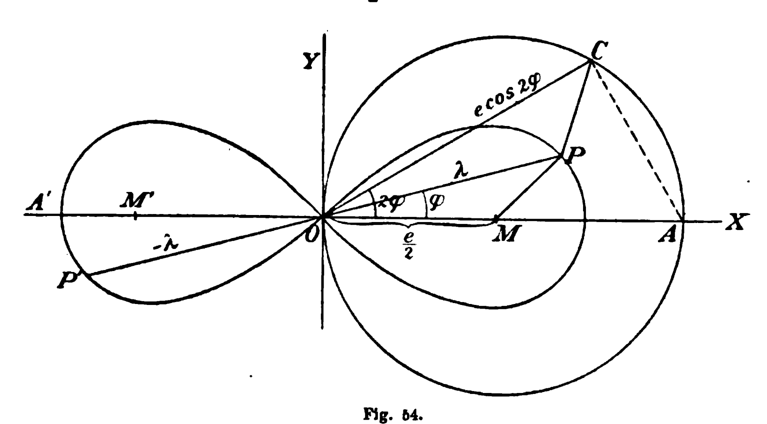


Fig. 54.

Ist jetzt C ein Kreispunkt und $\sphericalangle COA = 2\varphi$, und konstruiert man OP als mittlere Proportionale zwischen $OC = e \cos 2\varphi$ und $OM = \frac{e}{2}$, so erhält man $OP^2 = e \cos 2\varphi \frac{e}{2} = \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi = \lambda^2$. Trägt man also dieses als Winkelhalbierende ein, so hat man $\pm \lambda$ als Radius des Centrifugalmoments für die beiden gegen OP um 45^0 geneigten Achsen.

§ 137) Die so entstehende Kurve um P ist, wie im nächsten Abschnitt ausführlicher dargelegt wird, eine Lemniskate gewöhnlicher Art. Sie heifst die Lemniskate des Centrifugalmoments. Ihre Brennpunkte M und M' liegen auf der gröfseren Hauptachse der Trägheitsellipsen in der Entfernung $\frac{e}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\varrho_y^2 - \varrho_x^2}$.

Ist O der Schwerpunkt, so handelt es sich um die Central-Lemniskate.

§ 138) Über Anwendungen und Beispiele vergleiche man die Ingenieurmathematik des Verfassers, wo auch die Theorie der Centrifugalmomente weiter ausgebaut wird. Dort wird auch gezeigt, dafs auf der Y-Achse der Centralellipsen zwei Punkte in den Entfernungen $\pm e = \pm \sqrt{\varrho_y^2 - \varrho_x^2}$ liegen, für die die Trägheitsellipsen zu Kreisen werden. Dies sind die sog. Fixpunkte für das ebene Gebilde.

§ 139) Stereometrisch gilt für die Centrifugalmomente folgendes: Dreht man bei der Darstellung durch das hyperbolische Paraboloid dieses um den Nullpunkt O, so schneidet es von dem über der gegebenen Fläche stehenden Cylinder bezw. seinem Mantel Stücke ab, die während der Drehung sich verhalten wie die Radien der dabei entstehenden Lemniskaten des Centrifugalmoments für die Fläche bezw. ihre Umrandung.

§ 140) Bemerkungen zu diesem Kapitel. In der Ingenieurmathematik des Verfassers werden noch folgende Gegenstände behandelt:

a) Verschiebungssatz für das Centrifugalmoment

$$C_{xy} = C_{\xi\eta} + p\,q\,F,$$

wenn durch die Verschiebung ξ in $x = \xi + p$, η in $y = \eta + q$ übergeht und F die Fläche ist.

b) Dreht sich eine Fläche F, die eine Symmetrieachse hat, um eine in ihrer Ebene liegende Achse, die zur Symmetrieachse parallel ist und von dieser die Entfernung ϱ hat, so ist das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehungsachse

$$T = J(\varrho^2 + 3\,\varrho_1^2),$$

wo J den Inhalt des Körpers, ϱ_1 den Trägheitsradius der Fläche in Bezug auf die Symmetrieachse bedeutet. Der Schwerpunkt des Körpers liegt dann ebenso hoch, wie der der Fläche, sein Trägheitsradius ist $r_t = \sqrt{\varrho^2 + 3\,\varrho_1^2}$.

Dies ist ein in der Technik häufig vorkommender Fall.

c) Abgeleitet wird das Centrifugalmoment für das Dreieck, den Viertelkreis, für Parabeln p^{ter} Ordnung, für hyperbolische Flächen, für Flächen, die von transcendenten Kurven begrenzt sind. Ferner die Centralellipsen für das Rechteck, das Trägheitsmoment für die Diagonale des Rechtecks, der Halbkreisfläche für beliebige Schwerpunktsachsen.

d) Eingeführt werden die Gleichheitsachsen für $T_x = T_y$, die Grenzmomente T_{max} und T_{min} (für Maximum und Minimum) des Trägheitsmoments, der zugehörige Satz

$$C_{xy} = \frac{T_{max} - T_{min}}{2}.$$

Die Grenzmomente werden für mehrere Flächen bestimmt.

e) Sind T_x und T_y bekannte Trägheitsmomente (in Bezug auf Achsen, die aufeinander senkrecht stehen) und ist M_{xy} das zugehörige Centrifugalmoment, so bestimme man einen Hilfswinkel α mittels der Gleichungen

$$\sin 2\alpha = \frac{2\, C_{xy} \cos 2\alpha}{T_y - T_x},$$

dann sind die Grenzmomente bestimmt durch

$$T_\xi = \frac{1}{2}(T_x + T_y) + \frac{1}{2}(T_x - T_y)\sec 2\alpha,$$

$$T_\eta = \frac{1}{2}(T_x + T_y) - \frac{1}{2}(T_x - T_y)\sec 2\alpha.$$

wobei ξ und η die zum Drehungswinkel gehörigen Achsen sind.

f) Ein gegebenes Winkeleisen wird in Bezug auf die beiden Centralellipsen und die Centrallemniskate vollständig berechnet.

g) Die Grenzmomente für Viertel- und Achtelkreis werden berechnet.

h) Aus

$$\varrho_\alpha^2 = \varrho_x^2 \cos^2\alpha + \varrho_y^2 \sin^2\alpha,$$

$$\varrho_\beta^2 = \varrho_x^2 \sin^2\alpha + \varrho_y^2 \cos^2\alpha,$$

$$\lambda_{\alpha\beta}^2 = (\varrho_y^2 - \varrho_x^2)\sin\alpha\cos\alpha,$$

folgt

$$\lambda_{\alpha\beta}^4 = (\varrho_\alpha \varrho_\beta)^2 - (\varrho_x \varrho_y)^2.$$

Hier haben $\varrho_x, \varrho_y, \varrho_\alpha, \varrho_\beta, \lambda_{\alpha\beta}$ die obigen Bedeutungen, und zwar ist $\beta = \alpha + 90^\circ$.

h) Für Parabelflächen $0^{\text{ter}}, 1^{\text{ter}}, 2^{\text{ter}}, 3^{\text{ter}} \ldots$ Ordnung werden als Centrifugalmomente für die Stellung der Figur 6 gefunden

$$C_{xy} = \frac{a^2 h^2}{4}, \quad \frac{b^2 h^2}{8}, \quad \frac{c^2 h^2}{12}, \quad \frac{d^2 h^2}{16}, \ldots$$

ferner

$$\frac{C_{xy}}{M_x} = \frac{2}{4} a, \quad \frac{3}{8} b, \quad \frac{4}{12} c, \quad \frac{5}{16} d, \ldots$$

$$\frac{C_{xy}}{M_y} = \frac{1}{2} h, \quad \frac{3}{4} h, \quad \frac{5}{6} h, \quad \frac{7}{8} d, \ldots$$

Auch $\lambda = \sqrt{\frac{C_{xy}}{F}}$ ist leicht für die ganze Reihe zu berechnen.

i) Berechnet wird das Rechteck gröfsten Trägheitsmomentes, welches sich aus einer Kreisfläche, Ellipsenfläche, aus einer Parabelfläche ausschneiden läfst.

k) Eingeführt wird für Kegelschnitte der Begriff von Pol und Antipol einer Geraden, der Begriff von Polare und Antipolare eines Punktes.

l) Die Koordinaten des Antipols der Ordinatenachse in Bezug auf die Centralellipse einer gegebenen Fläche bestimmen sich aus $x_1 = \frac{T_y}{M_y}$, $y_1 = \frac{C_{xy}}{M_y}$; er ist also der Angriffspunkt der Centrifugalkraft der um die Ordinatenachse gedrehten Fläche und hat auch sonstige mechanische Bedeutungen.

m) Die Polare des Flächenschwerpunktes in Bezug auf eine beliebige Trägheitsellipse ist zugleich Antipolare des Mittelpunkts dieser Ellipse in Bezug auf die Centralellipse.

n) Die Achsen der Ebene, in Bezug auf die das Trägheitsmoment einer Fläche konstanten Wert hat, umhüllen eine Schar konfokaler Kegelschnitte, deren Brennpunkte die beiden Fixpunkte sind.

o) Der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, für welche die Hauptträgheitsachsen einer Fläche parallel sind, ist eine durch die Fixpunkte gehende gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt ist und deren Asymptoten den Richtungen der gegebenen Parallelen parallel sind.

p) Auch bei der Methode von Reye werden die Ausdrücke $\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}$ und $\frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}$ zur Anwendung gebracht.

q) Die Reyesche Methode, nach der sich für die Drehung einer Fläche um einen Punkt ihrer Ebene die Fläche durch drei zweckmäfsig gewählte Punkte ersetzen läfst, wird auf S. 222 bis 232 abgehandelt.

r) Die Methode von Nehls auf S. 202 und 203, die beiden von Mohr auf S. 203 bis 209, die Methode von Land auf S. 209 bis 211.

Sämtliche Bemerkungen geben zu stereometrischen Deutungen Veranlassung, unter denen die unter *n* und *o* hervorgehoben werden mögen.

λ) Die Anwendung der Transformationen $Z = z^p$ und $z = \sqrt[p]{Z}$, $Z = lg\, z$ und $z = e^Z$ und einiger anderer auf die Bestimmung von Polarmomenten verschiedener Ordnung für ebene Gebilde.

§ 141) In des Verfassers Ingenieurmathematik Bd. I*) wird von Seite 175 ab in elementarer Weise ein Beispiel aus der Lehre von den winkeltreuen Abbildungen zur Ableitung polarer Trägheitsmomente benutzt, die Abbildung $Z = z^2$ und ihre Umkehrung

$$z = \sqrt{Z}.$$

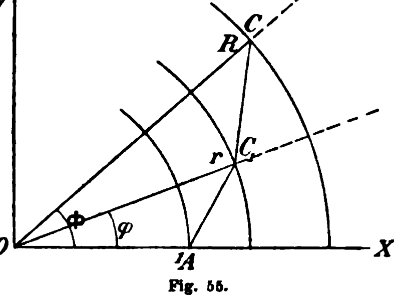


Fig. 55.

Bekanntlich ist nach Moivre

*) Vergl. auch des Verfassers Theorie der isogonalen Verwandtschaften, wo die Abbildungen $Z = z^2$ und $Z = z^p$ in besonderen Abschnitten behandelt sind.

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$
$$= R(\cos\Phi + i\sin\Phi)$$

Bezeichnet man den Ausdruck in der eckigen Klammer links mit z, den rechtsstehenden mit Z, so hat man

$$z^2 = Z.$$

Hier bedeutet z eine Strecke im neueren Sinne, d. h. eine Gerade von der Länge r, die z. B. vom Nullpunkte ausgeht und die Neigung φ hat, Z eine Strecke von der Länge R und der Neigung Φ. Ist also $\measuredangle C_1OA = \varphi$, $\overline{OC_1} = r$, so stellt OC_1 in Figur 55 die Strecke z dar.

Aus ihr findet man die Strecke $Z = z^2$ durch Verdoppelung des Winkels φ und durch Konstruktion der Länge $\overline{OC} = R$ mittels der Gleichung $1 : r = r : R$, wobei die Strecke $OA = 1$ ist.

Kennt man umgekehrt Z, so findet man die Strecke $z = \sqrt{Z}$ durch Halbierung des Winkels und Konstruktion der Länge $OC_1 = r$ als mittlere Proportionale der Längen 1 und R.

Die beiden Konstruktionen sind unabhängig von dem oben angedeuteten komplexen Ausdrucke, der einen reellen und einen imaginären Teil hat, gehören also in die Elementargeometrie.

Der ganzen Ebene der Z entspricht dabei eine Halbebene der z, denn die Abweichung $\Phi = 360^0$ giebt eine Abweichung $\varphi = 180^0$. Sollen auch die z eine ganze Ebene erfüllen, so mufs man die Z-Ebene sich doppelt bedeckt denken, denn es ist $\frac{1}{2} 720^0 = 360^0$.

Jedem Punkte C der doppelt gedachten Ebene entspricht jetzt ein Punkt C_1 der z-Ebene und umgekehrt jedem der z-Ebene ein solcher der doppelt gedachten z-Ebene. Da aber C sowohl im einen, als auch im anderen „Blatte" gedacht werden kann, so entsprechen ihm jetzt zwei Punkte C_1, denn $\Phi' = \Phi + 360^0$ führt auf $\varphi' = \frac{\Phi + 360^0}{2} = \varphi + 180^0$. Dadurch ist der Doppeldeutigkeit der Quadratwurzel Genüge geleistet.

§ 142) Jeder Geraden OC von der Neigung Φ entsprechen also zwei Gerade von den Neigungen

$$\varphi = \frac{\Phi}{2} \text{ und } \varphi' = \frac{\Phi}{2} + 180^0,$$

nämlich OC_1 und $OC_1' = -OC_1$. Jedem vom Punkte C doppelt durchlaufenen Kreise mit Mittelpunkt O und Radius OC entspricht ein einfach durchlaufener Kreis OC_1 mit Mittelpunkt O und Radius OC_1.

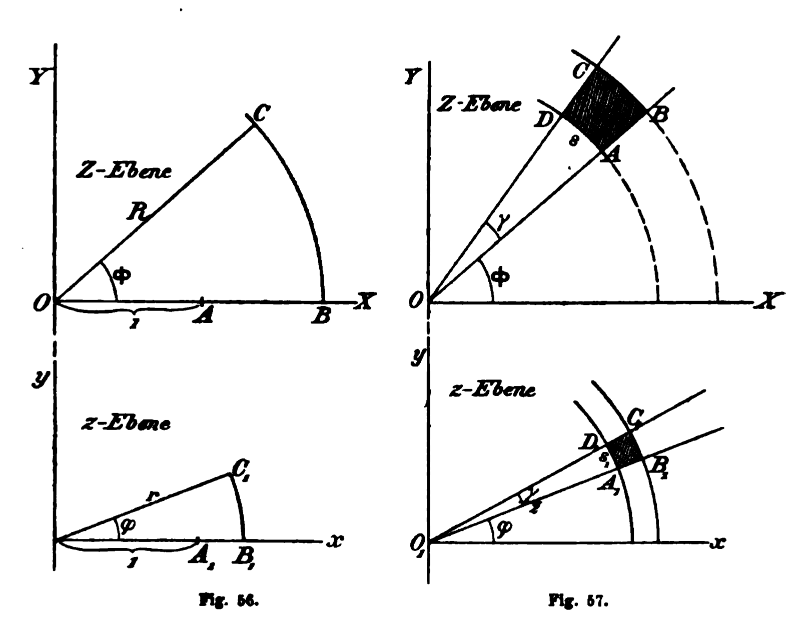


Fig. 56. Fig. 57.

Es ist nun gut, die allen Punkten C entsprechenden Punkte C_1 (und C_1') in besonderer Ebene, der z-Ebene, zu zeichnen, damit die Gebilde deutlich auseinander gehalten werden.

Hat man in der Z-Ebene ein Strahlenbüschel durch O mit den Neigungswinkeln

$$\Phi = 0, \pm\frac{2\pi}{n}, \pm\frac{4\pi}{n}, \pm\frac{6\pi}{n}, \ldots$$

und die orthogonale Kreisschar mit den Radien

$$r = e^0,\ e^{\pm\frac{2\pi}{n}},\ e^{\pm\frac{4\pi}{n}},\ e^{\pm\frac{6\pi}{n}}, \ldots$$

so hat man nach Band I § 314 und Band II (Mercatorkarte) eine Einteilung in kleine Quadrate.

Macht man mit diesem Gebilde die Transformation $z = \sqrt{Z}$, so entsteht in der z-Ebene ein Büschel von doppelt sovielen Strahlen von den Neigungen

$$\varphi = e,\ \pm\frac{\pi}{n},\ \pm\frac{2\pi}{n},\ \pm\frac{3\pi}{n}, \ldots$$

und eine Kreisschar mit den Radien

$$r = e^0,\ e^{\pm\frac{\pi}{n}},\ e^{\pm\frac{2\pi}{n}},\ e^{\pm\frac{3\pi}{n}}, \ldots$$

Damit ist also ebenfalls die Bedingung für solche quadratische Einteilungen erfüllt. Und weil der Einteilung der Z-Ebene in kleine Quadrate eine solche der z-Ebene entspricht, so ist die Transformation oder Abbildung eine winkeltreue oder konforme (oder isogonale) in dem mehrfach besprochenen Sinne.

§ 143) Jedem der kleinen Quadrate der Z-Ebene entsprechen also zwei solche der z-Ebene. Dem zugehörigen Winkel γ zwischen je zwei benachbarten Strahlen durch den Nullpunkt der Z-Ebene entspricht ein halb so grofser zwischen denen der z-Ebene. Daraus folgt, dafs die Quadratseite $AD = s$ einer Quadratseite $A_1D_1 = s_1$ so entspricht, dafs

$$s : s_1 = 2\sqrt{R} : 1 = 2r : 1$$

ist. (Bei gleichen Winkeln AOD würde es sich um $s : s_1 = OA : O_1A_1$ handeln, da aber $\measuredangle AOD = 2\measuredangle A_1O_1D_1$ ist, so wird

$$s : s_1 = 2OA : OA_1 = 2R : \sqrt{R} = 2\sqrt{R} : 1 = 2r : 1.)$$

Wie für die Grenze die Quadratseiten für $ABCD$ sämtlich gleich grofs sind, so ist in der Entfernung R von O und der entsprechenden r von O_1 überhaupt das Vergröfserungsverhältnis $s : s_1 = 2\sqrt{R} : 1 = 2r : 1$, d. h. einem unendlich kleinen Kreise z. B. um A mit Radius ϱ entsprechen zwei unendlich kleine Kreise um A_1 und A_1' mit Radien $\varrho \frac{1}{2\sqrt{R}} = \varrho \frac{1}{2} R^{\frac{1}{2}}$ oder $\varrho \frac{2r}{1} = \varrho 2r^1$. Das Quadrat $ABCD$ erscheint gegen das Quadrat $A_1 B_1 C_1 D_1$ um $\varphi = \frac{\Phi}{2}$ gedreht, gegen $A_1 B_1 C_1 D_1$ um $\varphi_1 = \frac{\Phi}{2} + 180^0$.

§ 144) Da $R = r^2$, $r = \sqrt{R}$, $\Phi = 2\varphi$, $\varphi = \frac{\Phi}{2}$ ist, so folgt: In beiden Ebenen entsprechen einander Kurven von den Gleichungen

	Z-Ebene	z-Ebene
1)	$f(R, \Phi) = 0$	$f(r^2, 2\varphi) = 0$
2)	$f\left(\sqrt{R}, \frac{\Phi}{2}\right) = 0$	$f(r, \varphi) = 0$
3)	$f(X, Y) = 0$	$f[(x^2 - y^2)(2xy)] = 0$

4) $f\left[\sqrt{\frac{X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}}, \sqrt{\frac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}}\right] = 0$, $f(x, y) = 0$.

Die Beziehungen 3) und 4) ergeben sich folgendermafsen: Es ist $X = R \cos \Phi$, $Y = R \sin \Phi$, dem ersteren entspricht also $r^2 \cos 2\varphi = r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = x^2 - y^2$, dem anderen entspricht $r^2 \sin 2\varphi = 2 (r \sin \varphi)(r \cos r) = 2xy$. Aus $X = x^2 - y^2$ und $Y = 2xy$ folgt aber durch Auflösung nach x und y

$$x = \sqrt{\frac{X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}},$$

oder auch $x = R^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\Phi}{2}$, $y = R^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\Phi}{2}$.

Hat man in der einen Ebene eine Einteilung durch irgend welche Kurven in kleine Quadrate, so erhält man eine solche auch in der andern.

§ 145) Beispiele. a) Der quadratischen Einteilung der Z-Ebene durch Gerade $X = 0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots$ $Y = 0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots$ entspricht eine solche durch Kurven $x^2 - y^2 = 0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots$ und $2xy = 0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots$, d. h. durch zwei orthogonale Scharen gleichseitiger Hyperbeln. Die erste Gruppe hat Asymptoten von den Neigungen $\pm 45^0$ und geht durch die Punkte $0, \pm\sqrt{a}, \pm\sqrt{2a}, \pm\sqrt{3a}, \ldots$ der X-Achse bezw. durch die Punkte $0, \pm\sqrt{a}, \pm\sqrt{2a}, \pm\sqrt{3a} \ldots$ der Y-Achse. Die andere Gruppe hat Asymptoten von der Neigung 0 bezw. 90^0 und geht durch die Punkte $0, \pm\sqrt{a}, \pm\sqrt{3a}, \pm\sqrt{2c}, \ldots$ der Geraden von der Neigung $\pm 45^0$ durch den Punkt O_1.

b) Auch die Geraden $\frac{Y}{X-a} = A = \tan a$ oder besser $X - \frac{Y}{A} = 0, a, 2a, 3a \ldots$ und die Orthogonalschar von Geraden geben eine quadratische Einteilung. Ihnen entsprechen Kurven

$$\frac{2xy}{x^2 - y^2 - a} = A$$

oder besser

$$x^2 - y^2 - \frac{2}{A}xy = 0, a, 2a, 3a, \ldots$$

Jeder beliebigen Geraden der Z-Ebene entspricht also eine gleichseitige Hyperbel der z-Ebene, deren eine Asymptote die Neigung $\vartheta = \frac{\theta}{2}$ hat, wenn die der Geraden gleich θ ist. Die Asymptoten gehen wiederum durch den Nullpunkt. Die isogonalen Trajektorien der Hyperbeln unter a) sind also wieder solche, und je zwei Orthogonalscharen geben wieder eine quadratische Einteilung.

c) Dem Kreise $\varrho = k$ um einen Punkt der Z-Ebene mit den Koordinaten $X_1 = a$ und $Y_1 = 0$, dessen Gleichung also ist

$$(X - a)^2 + Y^2 = k^2$$

entspricht einer Kurve

$$(x^2 - y^2 - a)^2 + (2xy)^2 = k^2,$$

die sich in der Form

$$[(x^2 + y^2 + a) + 2x\sqrt{a}]\,[(x^2 + y^2 + a) - 2x\sqrt{a}] = k^2$$

schreiben läfst. Hier bedeutet die eine eckige Klammer das Quadrat der Entfernung p_1 eines Kurvenpunktes von dem Punkte $+\sqrt{a}$, die andere das Quadrat seiner Entfernung p_2 von dem Punkte $-\sqrt{a}$ der x-Achse, so dafs man auch schreiben kann $p_1^2 p_2^2 = k^2$ oder

$$p_1 p_2 = k.$$

Es handelt sich also um eine Cassinische Kurve, d. h. um eine verallgemeinerte Lemniskate zweiter Ordnung.

Der Geraden durch den Punkt a der X-Achse von der Neigung α entspricht eine gleichseitige Hyperbel

$$x^2 - y^2 - \frac{2}{\tan\alpha} = a \quad \text{oder} \quad \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a} = \tan\alpha,$$

die durch den Punkt $+\sqrt{a}$ geht. Die Kurvenpunkte können wieder mit den Punkten $\pm\sqrt{a}$ der x-Achse verbunden werden. Die Radii vectores p_1 und p_2 haben dann Neigungen ϑ_1 und ϑ_2, die sich bestimmen aus

$$\tan\vartheta_1 = \frac{y}{x - \sqrt{a}}, \quad \tan\vartheta_2 = \frac{y}{x + \sqrt{a}},$$

so dafs

$$\tan(\vartheta_1 + \vartheta_2) = \frac{\tan\vartheta_1 + \tan\vartheta_2}{1 - \tan\vartheta_1 \tan\vartheta_2} = \frac{\dfrac{y}{x - \sqrt{a}} + \dfrac{y}{x + \sqrt{a}}}{1 - \dfrac{y}{x - \sqrt{a}} \cdot \dfrac{y}{x + \sqrt{a}}}$$

$$= \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a} = \tan\alpha,$$

also

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \alpha$$

ist. Daraus folgt:

Dem Strahlenbüschel durch den Punkt a der X-Achse mit den Neigungen $\theta = 0, \pm c, \pm 2c, \pm 3c\ldots$ und der orthogonalen Kreisschar mit den Radien $P = e^0, e^{\pm c}, e^{\pm 2c}, e^{\pm 3c}, \ldots$ entspricht in der z-Ebene ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 0, \pm c, \pm 2c, \pm 3c, \ldots$ durch die Punkte $\pm\sqrt{a}$ der x-Achse und eine Orthogonalschar von Lemniskaten zweiter Ordnung mit dem Produkte (der von diesen Punkten ausgehenden Radii vectores)

$$p_1 p_2 = e^0, e^{\pm c}, e^{\pm 2c}, e^{\pm 3c}, \ldots$$

Den Kurven $f(P, \theta) = 0$ der Z-Ebene entsprechen also Kurven $f[(p_1 p_2), (\vartheta_1 + \vartheta_2)] = 0$ der z-Ebene. Dabei können übrigens die Radien P von einem beliebigen Punkte C ausgehen, die Radii vectores p_1 und p_2 von den entsprechenden Punkten C_1 und C_1' der z-Ebene.

Solcher Beispiele kann man beliebig viele geben. So gehen z. B. die Kurven

$$\frac{P}{Q} = e^0, e^c, e^{2c}, e^{3c}\ldots, \Phi - X = 0, c, 2c, 3c, \ldots,$$

d. h. Kreisschar und Kreisbüschel z. B. durch die Punkte $X = \pm 1$ der Z-Ebene über in Kurven

$$\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} = e^0, e^c, e^{2c}, \ldots, \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\chi_1 - \chi_2} = 0, c, 2c, 3c, \ldots$$

der z-Ebene, wobei die Radii vectores p von den Punkten ± 1 der x-Achse, die Radii vectores q_1 und q_2 von den Punkten ± 1 der y-Achse ausgehen, u. s. w.

§ 146) Anwendung auf Polarmomente von ebenen Gebilden.

Zu jeder Entfernung R in der Z-Ebene (vom Nullpunkte) und zur entsprechenden r in der z-Ebene, wobei $R = r^2$ und $r = \sqrt{R}$ ist, gehört das Vergrößerungsverhältnis $2\sqrt{R} : 1$ bezw. $2r : 1$. Folglich: Zwischen einem Kurvenelemente s der Z-Ebene und dem entsprechenden s_1

der z-Ebene besteht die Beziehung $s:s_1 = 2\sqrt{R}:1 = 2r:1$, so dafs

$$s = s_1\, 2r, \quad s_1 = \frac{s}{2\sqrt{R}}$$

ist.

Daraus folgt für eine beliebige Kurve von der Z-Ebene von der Länge l, dafs

1) $$l = \sum s = 2 \sum s_1\, r$$

ist. Für eine beliebige Kurve der z-Ebene von der Länge l_1 folgt ebenso

2) $$l_1 = \sum s_1 = \frac{1}{2} \sum \frac{s}{\sqrt{R}} = \frac{1}{2} \sum s \,.\, R^{\frac{1}{2}}.$$

Für Flächenelemente folgt ebenso $f:f_1 = 4R:1 = 4r^2:1$, so dafs

$$f = f_1\, 4r^2, \quad f_1 = \frac{f}{4R}$$

ist.

Daraus folgt für eine beliebige Fläche F der Z-Ebene

3) $$F = \sum f = 4 \sum f_1\, r^2,$$

für eine beliebige Fläche F_1 der z-Ebene folgt ebenso

4) $$F_1 = \sum f_1 = \frac{1}{4} \sum \frac{f}{R}.$$

Daraus lassen sich folgende Sätze ablesen.

1) Die Länge jeder Kurve der Z-Ebene ist das Doppelte vom Polarmomente erster Ordnung für die entsprechende Kurve der z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt.

2) Die Länge jeder Kurve der z-Ebene ist die Hälfte vom Polarmomente $= \frac{1}{2}$ ter Ordnung für die entsprechende Kurve der Z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt.

3) Jedes Flächenstück der Z-Ebene ist das vierfache vom polaren Trägheitsmomente für die ent-

sprechende Fläche der z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt.

4) Jedes Flächenstück der z-Ebene ist der vierte Teil vom Polarmomente (—1)ter Ordnung für die entsprechende Fläche der z-Ebene.

Uns interessieren hier in erster Linie die Polarmomente erster und zweiter Ordnung in ihrem Zusammenhange mit den zugehörigen Kurvenlängen bezw. Flächeninhalten. Zu 4) sei bemerkt, dafs $\sum \frac{f}{R}$ das Newtonsche Potential der Fläche F in Bezug auf den Nullpunkt bedeutet. Dabei ist die Flächeneinheit der Fläche F mit der Masse *1* belegt zu denken und im Nullpunkte ebenfalls die Masse *1* konzentriert zu denken. Das Potential in Bezug auf den Nullpunkt bedeutet dann die Arbeit, die nötig ist, die in letzterem befindliche Masseneinheit unter Überwindung der gegenseitigen Anziehung auf irgend welchem Wege in unendliche Entfernung zu bringen. Die den Cylinderkörper begrenzende Drehungsfläche ist dabei entstanden durch die Drehung einer gleichseitigen Hyperbel um die eine Asymptote.

Kennt man den einen von den beiden Bestandteilen, die in jedem dieser vier Sätze auftreten, so kennt man auch den andern.

§ 147) Beispiel der Geraden der Z-Ebene und der gleichseitigen Hyperbeln der z-Ebene.

1) Irgend ein schraffiertes Quadrat der Z-Ebene hat, wie jedes andere dieser Einteilung, den Umfang $4a$.

Jeder „Quadratumfang" der hyperbolischen Einteilung der z-Ebene hat in Bezug auf den Nullpunkt das Polarmoment erster Ordnung $M' = 2a$.

(Die Dimension dieses Ausdrucks ist, wie aus s. r. folgt, bei Centimetermafs c^2.) Die stereometrische Deutung für den Mantel des durch den Kegel $z = r$ abgeschnittenen „Cylinders" über der Fläche liegt auf der Hand. Alle über den hyperbolischen Quadraten stehenden Cylindermäntel sind flächengleich.

Jedes Quadrat der hyperbolischen Einteilung der z-Ebene hat in Bezug auf den Nullpunkt das polare Trägheitsmoment $T_p = \frac{a^2}{4}$.

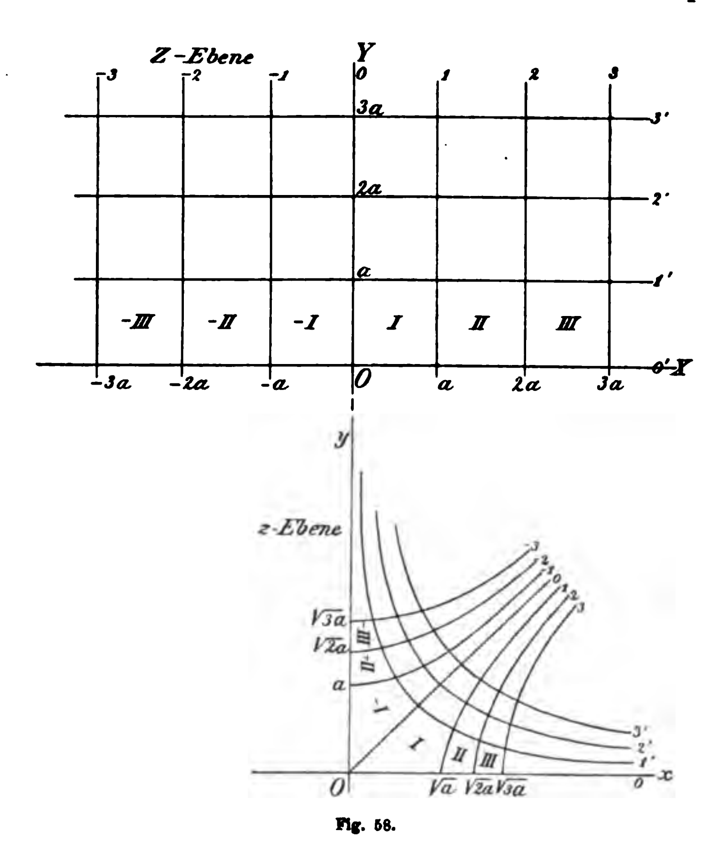


Fig. 58.

(Die Dimension dieses Ausdrucks ist wegen $f r^2$ von der Form c^4.)

Die stereometrische Deutung für den Inhalt des durch das Paraboloid $z = r^2$ abgeschnittenen Cylinders über der Fläche liegt ebenfalls auf der Hand. Alle über den hyperbolischen Quadraten stehenden Cylinder sind inhaltsgleich.

§ 148) Beispiel der Einteilung durch konzentrische Kreise und das orthogonale Strahlenbüschel durch den Punkt a der X-Achse.

Die „Quadrate“ jedes einzelnen Ringes der Z-Ebene haben dieselben homologen Seitenlängen. Ist z. B. der Kreis der durch den Nullpunkt gehende, so ist $AB = \frac{2\pi}{n} a$. Folglich hat in der z-Ebene jedes $A_1 B_1$ der entsprechenden

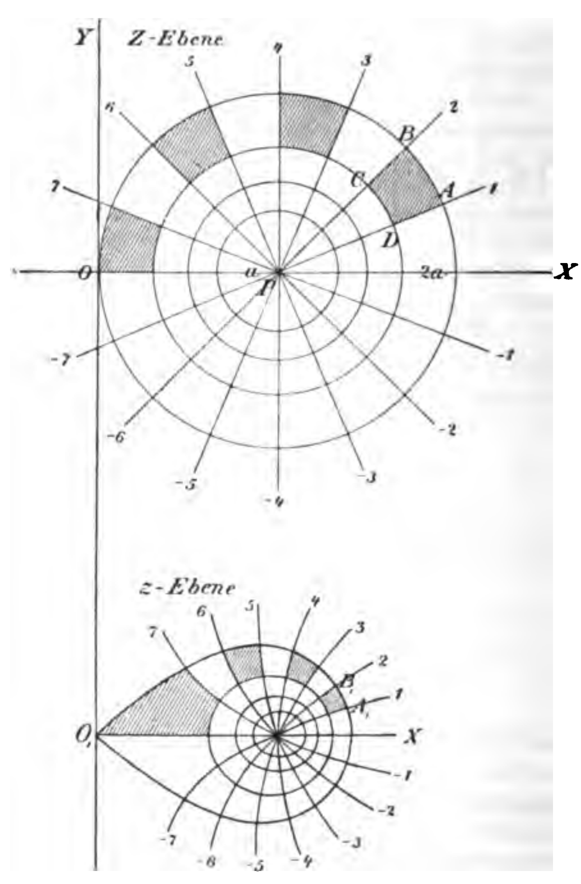


Fig. 59.

Lemniskate in Bezug auf den Nullpunkt 1 das Polarmoment erster Ordnung $M' = \frac{\pi}{n} a$ in Bezug auf den Nullpunkt.

Setzt man $a = e^{m \cdot \frac{2\pi}{n}}$, so ist der nächste kleinere Radius

$$PD = b = \frac{e^{m \cdot \frac{2\pi}{n}}}{e^{\frac{2\pi}{n}}} = e^{(m-1)\frac{2\pi}{n}}, \text{ also } CD = \frac{2\pi}{n} b$$

bekannt. Demnach hat in der z-Ebene $C_1 D_1$ in Bezug auf O_1 das Polarmoment erster Ordnung $M' = \frac{\pi}{n} b$.

Endlich ist $DA = a - b$ bekannt, also ist das Polarmoment für $D_1 A_1$ gleich $\frac{a-b}{2}$.

Man kennt also das Polarmoment für den Umfang dieses Quadrates der lemniskatischen Einteilung. Der Schlufs auf den durch den Kegel $z = r$ abgeschnittenen „Cylindermantel“ sei dem Leser überlassen.

Der ganze Kreis hat den Umfang $2\pi a$, die äufserste Lemniskate also das Polarmoment πa.

Der Inhalt des untersuchten Quadrates der Z-Ebene ist $\frac{1}{n} \pi (a^2 - b^2)$, folglich hat das entsprechende Quadrat der z-Ebene in Bezug auf O_1 das polare Trägheitsmoment

$$T_p = \frac{\pi}{4n} (a^2 - b^2).$$

Der ganze Kreis hat die Fläche πa^2, die ganze Lemniskatenfläche also das polare Trägheitsmoment $T'_p = \frac{\pi}{4} a^2$. Über die Cylinderinhalte spreche sich der Leser selbst aus.

§ 149) Beispiel. Der quadratischen Einteilung

$$x = 0, a, 2a, 3a \dots$$
$$y = 0, a, 2a, 3a \dots$$

der z-Ebene entspricht einer Einteilung durch Kurven

$$\sqrt{\frac{X+\sqrt{X^2+Y^2}}{2}}=0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ldots$$

$$\sqrt{\frac{-X+\sqrt{X^2+Y^2}}{2}}=0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ldots$$

der Z-Ebene. Dies sind Parabeln mit dem Nullpunkte O als Brennpunkt, die also durch die Punkte $0, \pm a^2, \pm 4a^2, \pm 9a^2\ldots$ der X-Achse und durch die Punkte $0, \pm 2a^2$,

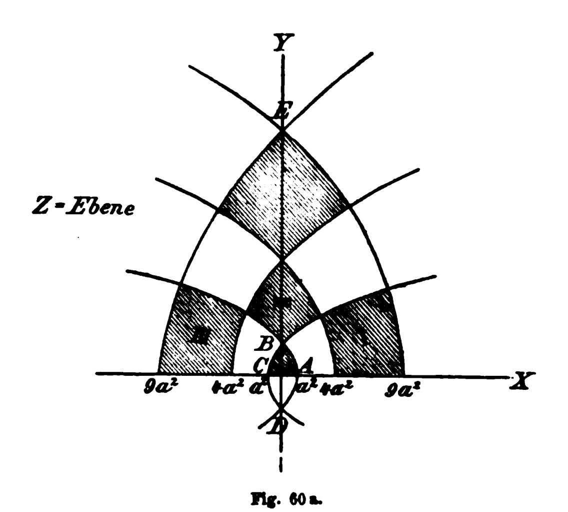


Fig. 60 a.

z-Ebene

Fig. 60 b.

$\pm 8a^2, \pm 18a^2, \ldots$ der Y-Achse gehen. — Die Gleichungen können auch geschrieben werden

$$R^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\Phi}{2} = 0, a, 2a, \ldots, \quad R^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\Phi}{2} = 0, a, 2a, \ldots$$

Jedes Quadrat der z-Ebene hat den Umfang $4a$, folglich hat der Umfang jedes „Quadrates" der parabolischen Einteilung der Z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt das Polarmoment $-\frac{1}{2}$ter Ordnung $8a$.

Der Inhalt von jedem dieser Quadrate der z-Ebene ist a^2, folglich hat jede Quadratfläche der parabolischen Einteilung der Z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt das Newtonsche Potential $4a^2$.

Die schraffierte Fläche ABC hat den Inhalt

$$\frac{2}{3}(2a^2)(2a^2) = \frac{8}{3}a^4,$$

folglich hat das entsprechende Quadrat in Bezug auf O das polare Trägheitsmoment $\frac{2}{3}a^4$. (In der That ist

$$T_p = \frac{a^4}{6} + e^2 F = \frac{a^4}{6} + \left(a\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 a^2 = \frac{a^4}{6} + \frac{a^4}{2} = \frac{2}{3}a^4.)$$

Die Parabel DAB hat, wenn man $BD = p$ setzt, die Länge $\frac{p}{2}[\sqrt{2} + {}^e lg(1+\sqrt{2})] = 2a^2[\sqrt{2} + {}^e lg(1+\sqrt{2})]$, folglich hat die Gerade $DAB = 2a$ in Bezug auf O das Polarmoment erster Ordnung $a^2[\sqrt{2} + {}^e lg(1+\sqrt{2})]$, was mit der früheren Untersuchung zusammenstimmt.

Weitere Beispiele über Hyperbelsegmente, parabolische und cardioidische Flächen u. s. w. findet man in der „Ingenieurmathematik". Auf die parabolischen Sektoren der cardioidischen Flächen sei besonders aufmerksam gemacht, auch auf die Brennstrahlsektoren der Parabeln.

§ 150) Bei den Transformationen $Z = z^3$ und $z = \sqrt[3]{Z}$ ist entsprechend zu verfahren. Ist $OA = 1$, $\overline{OC_1} = r$ und $\sphericalangle AOC_1 = \varphi$, so erhält man C durch Verdreifachung des Winkels und mit Hilfe der ähnlichen Dreiecke OAC_1, OC_1K, OKC, wobei $OK = r^2$, $OC = r^3$ wird.

[Vergl. $\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = R(\cos\Phi + i\sin\Phi)$.]

Geht man von C aus, so hat man — im allgemeinen auf dem Wege der Rechnung — den dritten Teil des Winkels zu bilden und die Kubikwurzel aus OC zu konstruieren. (Rein geometrische Konstruktionen sind hier im allgemeinen nicht möglich.)

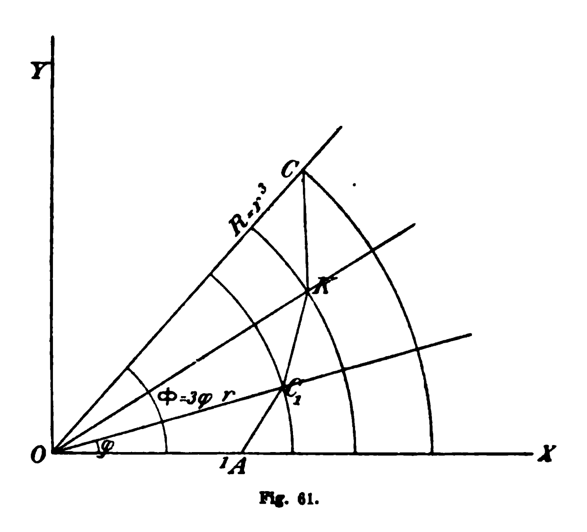


Fig. 61.

Die Z-Ebene ist dreifach belegt zu denken, wenn die ganze z-Ebene erfüllt werden soll. Dem Punkte C_1 reihen sich noch zwei andere, C_2 und C_3 an, die mit ihm ein gleichseitiges Dreieck mit O_1 als Mittelpunkt bilden. (3 Wurzelpunkte.)

Die der vorigen entsprechende Behandlungsweise zeigt, dafs der Quadrateinteilung der Z-Ebene durch Polar-

koordinaten eine quadratische Einteilung der z-Ebene durch solche entspricht.

Dabei wird das Vergröſserungsverhältnis für jede Entfernung R bezw. r auf $s:s_1 = 3R:r = 3r^3:r = 3r^2:1$ zurückgeführt, wofür man auch schreiben kann $3R^{\frac{2}{3}}:1$ oder $1:\frac{1}{3}R^{-\frac{2}{3}} = 1:\frac{1}{3}R^{\frac{1}{3}-1}$, also $s = 3s_1r^2$, $s_1 = s\cdot\frac{1}{3}R^{-\frac{2}{3}}$; $f = f_1 9r^3$, $f_1 = f\cdot\frac{1}{9}R^{-\frac{4}{3}}$.

Hier wird demnach

1) $$l = \sum s = 3\sum s_1 r^2,$$

2) $$l_1 = \sum s_1 = \frac{1}{3}\sum s R^{-\frac{2}{3}},$$

3) $$F = \sum f = 9\sum f_1 r^4,$$

4) $$F_1 = \sum f_1 = \frac{1}{9}\sum f R^{-\frac{4}{3}}.$$

Die entsprechenden stereometrischen Sätze spreche der Leser selbst aus. Uns interessiert hier nur der erste, welcher die polaren Trägheitsmomente ebener Kurven betrifft. Fr lautet: Die Länge jeder Kurve der Z-Ebene ist das dreifache vom polaren Trägheitsmoment der entsprechenden Kurve der z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt.

Aus $R = r^3$, $\Phi = 3\varphi$, $r = \sqrt[3]{R}$, $\varphi = \frac{1}{3}\Phi$ folgt $X = R\cos\Phi = r^3\cos 3\varphi$, $Y = R\sin\Phi = r^3\sin 3\varphi$, $x = r\cos\varphi = R^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\Phi}{3}$, $y = r\sin\varphi = R^{\frac{1}{3}}\sin\frac{\Phi}{3}$. Demnach entsprechen einander in beiden Ebenen folgende Kurven:

$f(R, \Phi) = 0$	$f(r^3, 3\varphi) = 0$
$f\left(\sqrt[3]{R}, \frac{\Phi}{3}\right) = 0$	$f(r, \varphi) = 0$
$f(X, Y) = 0$	$f[(r^3\cos 3\varphi, r^3\sin 3\varphi)] = 0$
$f\left[\left(R^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\Phi}{3}\right), \left(R^{\frac{1}{3}}\sin\frac{\Phi}{3}\right)\right] = 0$	$f(x\,y) = 0$

Sind $P = x$ und $\Theta = \gamma$ konzentrische Kreise nebst Radienbüschel durch einen beliebigen Punkt C, so entsprechen einander P und $p_1 p_2 p_3$, Θ und $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3$ (vergl. isogonale Verwandtschaften, Kap. IX), also entsprechen einander auch die Kurven

$$f[P, \Theta] = 0, \qquad f[(p_1 p_2 p_3), (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3)] = 0.$$

Die Kurven $p_1 p_2 p_3 = c$ sind konfokale Lemniskaten dritter Ordnung, die Kurven $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 = c$ die orthogonalen Hyperbeln dritter Ordnung. Die Radii vectores gehen von den drei Wurzelpunkten von C aus.

Auch die Kurven $r^3 \cos 3\varphi = c$ und $r^3 \sin 3\varphi = c$ sind reguläre Hyperbeln dritter Ordnung. Dagegen sind die Kurven $R^{\frac{1}{3}} \sin \frac{\Phi}{3} = c$ cardioidische Kurven dritter Ordnung und die Kurven $R^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\Phi}{3} = c$ ebenso, welche die Rolle der Parabeln übernehmen, aber auch als Hyperbeln $\frac{1}{3}$ ter Ordnung bezeichnet werden könnten.

§ 151) Einige Beispiele. Der Kreis der z-Ebene mit Radius $\varrho = 1$, der durch den Nullpunkt geht und seinen Mittelpunkt auf der x Achse hat, entspricht einer cardioidischen Kurve dritter Ordnung der Z-Ebene. Seiner Gleichung $r = 2 \cos \varphi$ entspricht die Gleichung der letzteren $R^{\frac{1}{3}} = 2 \cos \frac{\Phi}{3}$. Sein polares Trägheitsmoment (das seines Umfanges) in Bezug auf den Nullpunkt ist $T_p = 2\pi\varrho^3 + e^2 . l = 4\pi\varrho^3 = 4\pi$. Demnach hat jene cardioidische Kurve den Umfang $3 . 4\pi = 12\pi$.

Der Kreis der Z-Ebene mit Radius $P = 1$, der durch den Nullpunkt geht und seinen Mittelpunkt auf der X-Achse hat, hat den Umfang 2π und die Gleichung $R = 2 \cos \Phi$. Die ihm entsprechende Lemniskate dritter Ordnung hat die Gleichung $r^3 = 2 \cos 3\varphi$. Jede ihrer Schleifen hat in Bezug auf den Nullpunkt das polare Trägheitsmoment $T_p = \frac{2\pi}{3}$. Denkt man sich über dieser Schleife

einen Cylinder errichtet und diesen durch das Drehungsparaboloid zweiter Ordnung $z = r^2$ abgeschnitten, so ist der Mantel von der Fläche $\frac{2\pi}{3}$.

Teilt man die Z-Ebene durch die Geraden $X = 0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots, Y = 0, \pm a, \pm 2a, \ldots$ in Quadrate ein, so hat jedes den Umfang $4a$. Dem entspricht eine quadratische Einteilung der Z-Ebene durch die Kurvenscharen $r^3 \cos 3\varphi = 0, \pm a, \pm 2a, \ldots, r^3 \sin 3\varphi = 0, \pm a, \pm 2a, \ldots,$ die reguläre Hyperbeln dritter Ordnung sind und je drei Asymptoten besitzen. Jedes Quadrat der Einteilung hat in Bezug auf den Nullpunkt das Trägheitsmoment $T_p = \frac{4a}{3}$. Die über diesen Quadraten stehenden Säulen, die durch das Drehungs-Paraboloid $z = r^2$ abgeschnitten sind, haben sämtlich als Mantelfläche $F = \frac{4a}{3}$.

Die Gerade der z-Ebene, welche die Punkte mit den Koordinaten $(x_1 y_1)$ und $(x_1, -y_1)$ verbindet, hat in Bezug auf den Nullpunkt das Trägheitsmoment

$$T_p = \frac{(2y_1)^3}{12} + x^2\, 2y_1 = \frac{2y_1}{3}\,[y_1^2 + 3x_1^2].$$

Die entsprechende Kurve der Z-Ebene hat die dreifache Länge, also

$$l = 2R_1^{\frac{1}{3}} \sin\frac{\Phi_1}{3}\left[R_1^{\frac{2}{3}} \sin^2\frac{\Phi_1}{3} + 3R_1^{\frac{2}{3}} \cos^2\frac{\Phi_1}{3}\right]$$

$$= 2R_1 \sin\frac{\Phi_1}{3}\left[1 + 2\cos^2\frac{\Phi_1}{3}\right].$$

In dieser Weise kann man beliebig viele Schlüsse ziehen, ohne Rechnungen anzuwenden. Namentlich die Kurven $p_1 p_2 p_3 = e^c$ und $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 = c$, wo c die Werte

$$0, \pm\frac{2\pi}{n}, \pm\frac{4\pi}{n}, \pm\frac{6\pi}{n}, \ldots$$

annimmt, sind dabei von Interesse.

§ 152) Bei der Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ oder $z = \frac{1}{Z}$ handelt es sich, wie bei der Inversion nachgewiesen wurde, um das Vergrößerungsverhältnis $s : s_1 = R^2 : 1 = \frac{1}{r^2} : 1$. Es wird also:

1) $l = \sum s = \sum \frac{s_1}{r^2}$ 2) $l_1 = \sum s_1 = \sum \frac{s}{R^2}$

3) $F = \sum f = \sum \frac{f_1}{r^2}$ 4) $F_1 = \sum f_1 = \sum \frac{f}{R^4}$

(Die Formeln 1) und 2) deuten nur scheinbar auf das Newtonsche Anziehungsgesetz hin, denn die Kräfte werden nicht algebraisch summiert, sobald ihre Richtungen nicht parallel sind. Dagegen dürfen aber die Elemente des Potentials algebraisch summiert werden.)

Die Formeln sind, wie oben, leicht in Worte zu bringen. Es handelt sich dabei um Polarmomente von der Ordnung (-2) bezw. (-4).

Beide Ebenen stehen in Kreisverwandtschaft. Demnach entsprechen einander Kreis und Kreis, von denen einer auch eine Gerade werden kann, Kreisbüschel und Kreisbüschel, von denen das eine ein Strahlenbüschel werden kann; Kreisschar und Kreisschar, von denen die eine konzentrisch werden kann, Bicirkularspiralen und Bicirkularspiralen, von denen die eine Schar zu logarithmischen Spiralen werden kann. Quadratische Einteilungen durch Hyperbelscharen gehen in gewisse lemniskatische über, solche durch Hyperbelbüschel in solche durch Lemniskatenbüschel durch drei Punkte.

Die entsprechenden stereometrischen Schlüsse seien dem Leser überlassen. (Vergl. Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften.)

§ 153) Bei der Abbildung $Z = z^p$ und $z = \sqrt[p]{Z}$, wo p irgend eine reelle Zahl, nur nicht Null ist, wird das Vergrößerungsverhältnis

$$s : s_1 = p r^{p-1} : 1 = p R^{1-\frac{1}{p}} : 1 = 1 : \frac{1}{p} R^{\frac{1}{p}-1},$$

also

1) $$l = \sum s = p \sum s_1 r^{p-1}$$

2) $$l_1 = \sum s_1 = \frac{1}{p} \sum s R^{\frac{1}{p}-1}$$

3) $$F = \sum f = p^2 \sum f r^{2(p-1)}$$

4) $$F_1 = \sum f_1 = \frac{1}{p^2} \sum f R^{2\left(\frac{1}{p}-1\right)}$$

Jeder Punkt C der Z-Ebene giebt bei ganzem positiven p p Punkte $C_1, C_2 \ldots C_p$, die ein regelmäfsiges p Eck mit dem Halbmesser $\sqrt[p]{R}$ bilden, wenn R die Entfernung OC ist (Wurzelpunkte). Jedem von diesem Punkte C ausgehenden Radius vector P entspricht das Produkt $p_1 p_2 \ldots p_p = P$ der von jenen p Punkten ausgehenden Radii vectores, dem Neigungswinkel Θ für P entspricht die Summe der Neigungswinkel $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_p = \Theta$ der von den p Punkten ausgehenden Radii vectores. So entsprechen einander folgende Kurvenscharen in beiden Ebenen

$f(R, \Phi) = 0$	$f(r^p, p\varphi) = 0$
$f\left(\sqrt[n]{R}, \frac{\Phi}{n}\right) = 0$	$f(r, \varphi) = 0$
$f(X, Y) = 0$	$f[(r^p \cos p\varphi), (r^p \sin p\varphi)] = 0$
$f\left[(R^{\frac{1}{p}} \cos \frac{1}{p} \Phi), (R^{\frac{1}{p}} \sin \frac{1}{p} \Phi)\right] = 0$	$f(x, y) = 0$
$f[P, \Theta] = 0$	$f[(p_1 p_2 \cdot\cdot p_p), (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots \vartheta_p)] = 0.$

Alle diese Beziehungen lassen sich elementar nachweisen. Vergl. Kapitel 9 der isogonalen Verwandtschaften. Die Kurven $p_1 p_2 p_3 \ldots p_p = c$ und $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots \vartheta_p = \gamma$ werden dort als reguläre Lemniskaten bezw. Hyperbeln p^{ter} Ordnung bezeichnet.

Der Länge jeder Kurve der Z-Ebene entspricht also das p-fache vom Polarmomente $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der entsprechenden Kurve der z-Ebene; jedem Flächenstück der ersteren das p^2-fache vom Momente $2(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des

entsprechenden in der andern u. s. w. Das Abschneiden der Cylindermäntel bezw. Cylinderkörper in der letzeren geschieht durch Drehungsparaboloide $(p-1)^{\text{ter}}$ bezw. $2(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, in der ersteren durch solche von der Ordnung $\left(\frac{1}{p}-1\right)$ bezw. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-1\right)$.

§ 154) Die Abbildung $Z={}^{e}lgz$ oder $z=e^{Z}$ gehört ebenfalls hierher. Nach der in Band II gegebenen Theorie der Mercatorkarte handelt es sich um das Vergröfserungsverhältnis $s:s_1=1:r=1:e^{X}$. Demnach ist

$$l=\sum s=\sum\frac{s}{r}, \qquad F=\sum f=\sum\frac{f_1}{r^2},$$

$$l_1=\sum s_1=\sum s\,e^{X}, \qquad F_1=\sum f_1=\sum f e^{2X}.$$

Die Länge jeder Kurve der Z-Ebene ist also gleich dem Polarmoment $(-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von der entsprechenden Kurve der andern in Bezug auf den Nullpunkt oder gleich dem Newtonschen Potential in Bezug auf diesen Punkt. Die Fläche jeder Kurve der Z-Ebene ist gleich dem Polarmomente $(-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der Fläche der entsprechenden Kurve der z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt.

Die Länge jeder Kurve der z-Ebene giebt das Axialmoment $\sum s e^{X}$ von der entsprechenden der Z-Ebene, das Flächenstück giebt das Axialmoment $\sum f e^{2X}$ der entsprechenden Fläche der Z-Ebene. Hier tritt also ein Axialmoment ein, bezogen auf die Y-Achse der Z-Ebene, und zwar handelt es sich um ein Abschneiden der Cylindermäntel und Cylinderkörper durch eine cylindrische Fläche von der Gleichung $Z=e^{X}$, was zugleich die Gleichung einer logarithmischen Linie ist, bezw. durch die Fläche $Z=e^{2X}$.

Die einander entsprechenden Kurven sind dabei z. B.:

$$f(X\,Y)=0 \qquad f(lgr,\vartheta)=0,$$

$$f(e^{X},Y)=0 \qquad f(r,\vartheta)=0,$$

$$f[(e^{X}\cos Y),(e^{X}\sin Y)]=0 \qquad f(xy)=0.$$

§ 155) Die Abbildung $Z = z\,lg\,z - z = z\,(lg\,z - 1)$ verwandelt die Kurven $X = a$ in $x\,[lg\sqrt{x^2+y^2} - 1] - y \arctan\frac{y}{x} = a$ oder in

$$r\,[\cos\varphi\,(lg\,r - 1) - \varphi\sin\varphi] = a,$$

die Kurven $Y = b$ in

$$y\,[lg\sqrt{x^2+y^2} - 1] + x\arctan\frac{y}{x} = b$$

oder in

$$r\,[\sin\varphi\,(lg\,r - 1) + \varphi\cos\varphi] = b,$$

die Kurven $R = e^c$ in

$$r^2\,[(lg\,r - 1)^2 + \varphi^2] = e^{2c},$$

die Geraden $\tan\Phi = \frac{Y}{X} = c$ in die Kurven

$$\frac{\sin\varphi\,(lg\,r - 1) + \varphi\cos\varphi}{\cos\varphi\,(lg\,r - 1) - \varphi\sin\varphi} = c.$$

Das Vergröfserungsverhältnis ergiebt sich so, dafs $\frac{s}{s_1} = \frac{lg\,r}{1}$, also $l = \sum s = \sum s_1\,lg\,r$ wird. Demnach ist die Länge jeder Kurve $f(XY) = 0$ der Z-Ebene gleich dem logarithmischen Potential der entsprechenden Kurve der z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt. Die letztere Kurve hat die Gleichung

$$f\left\{\left[x\,(lg\sqrt{x^2+y^2} - 1) - y\arctan\frac{y}{x}\right],\right.$$
$$\left.\left[y\,(lg\sqrt{x^2+y^2} -)\,1 + x\arctan\frac{y}{x}\right]\right\} = 0$$

oder

$$f\,\{r\,[\cos\varphi\,(lg\,r - 1) - \varphi\sin\varphi],$$
$$r\,[\sin\varphi\,(lg\,r - 1) + \varphi\cos\varphi]\} = 0.$$

Man denke sich auf der Ebene in den Punkten der Kurve Lote errichtet, die bis zur Drehungsfläche $z = lg\,r$ reichen.

Die so entstehende Mantelfläche hat den Inhalt $F = l \,.\, 1$.

Die Umkehrung dieser Abbildung ist schwieriger zu behandeln, da transcendente Gleichungen zu behandeln sind.

Ebenso ist die Aufgabe schwieriger, die Abbildung zu finden, bei der $\sum f = \sum f_1 \, lg\, r$ wird, so dafs jeder Fläche in der Z-Ebene das logarithmische Potential der entsprechenden Fläche der z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt entspricht. Überhaupt sind die Aufgaben dieses Paragraphen besser der höheren Mathematik zu überlassen.

§ 156) Die Abbildung $Z = {}^{e}lg\, z^{p} = p\, lg\, z$ giebt das Vergröfserungsverhältnis $s : s_1 = 1 : \frac{r}{p} = 1 : e^{\frac{X}{p}}$, so dafs

$$l = \sum s = p \sum \frac{s_1}{r}, \qquad F = \sum f = p^2 \sum \frac{f_1}{r^2},$$

$$l_1 = \sum s_1 = \sum s\, e^{\frac{X}{p}}, \qquad F_1 = \sum f_1 = \sum s \,.\, e^{\frac{2X}{p}}.$$

Dabei entsprechen einander die Kurven

$$f(X, Y) = 0 \qquad f[p\, lg\, r, p\vartheta] = 0 \text{ oder } f[lg\, r^p, p\vartheta] = 0$$

$$f\left[e^{\frac{1}{p}X}, \frac{1}{p}Y\right] \qquad f[r, \vartheta] = 0$$

$$f\left[e^{\frac{1}{p}X} \cos \frac{1}{p} Y, e^{\frac{1}{p}X} \sin \frac{1}{p} Y\right] = 0 \qquad f[x, y] = 0$$

$$e^X \cos Y = c \qquad r^p \cos p\,\vartheta = c$$

$$e^X \sin Y = c \qquad r^p \sin p\,\vartheta = c.$$

Die stereometrischen Folgerungen seien dem Leser überlassen.

§ 157) So giebt jede konforme Abbildung zu je vier Sätzen Veranlassung, durch welche die Längen, Flächen, Momente einander entsprechender Kurven in einfache Beziehungen zu einander gesetzt werden.

Diese letzteren lassen sich sämtlich stereometrisch deuten und geben Sätze über Prismen und Cylinder, die durch die den Momenten höherer Ordnung entsprechenden Drehungsflächen bezw. Cylinderflächen abgeschnitten werden. Die körperlichen Inhalte und die Mantelflächen und ihre Momente sind dann leicht zu berechnen.

§ 158) Von besonderem Interesse sind dabei die Kurven, längs deren das Vergröfserungsverhältnis konstant, z. B. gleich $\varkappa$ ist. Es läfst sich z. B. elementar zeigen,*) dafs es sich bei dem Kreisbüschel durch die Punkte ± 1 der X-Achse um die Kurvenscharen $pq = \frac{2}{\varkappa}$ handelt, also um Lemniskaten zweiter Ordnung. Diese gehen dann durch die „gleich grofsen Quadrate" der quadratischen Einteilung durch Kreisbüschel und Kurvenschar. (Vergl. die Abbildungen $Z = \frac{z-1}{z+1}$ bezw: $Z = {}^e lg \frac{z-1}{z+1}$.)

Bei der quadratischen Einteilung durch das Hyperbelbüschel durch die Punkte ± 1 der X-Achse und die orthogonalen Lemniskaten handelt es sich ebenso um Kurven $\frac{2r}{pq} = \varkappa$, deren Radii vectores von den Punkten 0 und ± 1 ausgehen. (Vergl. die Abbildungen $Z = (z - z_1)(z - z_2)$ oder $Z = {}^e lg (z - z_1)(z - z_2)$.)

Jede solche Kurve steht also mit der entsprechenden der andern Ebene in konstantem Vergröfserungsverhältnis $\varkappa : 1$. Kennt man also die Länge der einen, so kennt man auch die Länge der anderen. Bei den entsprechenden stationären Strömungen der Elektrizität (unter gewissen Voraussetzungen auch der Wärme) bedeuten sie die Linien gleicher Stromdichte. Für $\varkappa = 1$ ist natürlich die Beziehung die einfachste. Nicht nur für die

*) Vergl. Potentialtheorie des Verf. oder dessen Abhandlung „Zur elementaren Behandlung des logarithmischen Potentials" in Bd. IX der Zeitschr. für lateinlose Schulen, oder dessen Abhandlung über einen Satz der Funktionentheorie in Mehmke, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd. 42 (1897), Seite 217—246.

mathematische Physik und die Kartographie, sondern, wie man sieht, auch für die Stereometrie lassen sich aus den Bemerkungen dieses Kapitels auf elementarem Wege zahlreiche Beziehungen und Sätze ableiten, die von Interesse sind.

Man überblickt auch für die Anwendung der höheren Analysis eine Reihe von Übungsbeispielen, die zu eleganten Resultaten führen.

Hat man auf diesem Wege Werte für Längen und Flächen erhalten, für axiale und polare Momente irgend welcher Ordnung die entsprechenden Formeln bestimmt, so kann man diese benutzen, auch die etwa noch fehlenden Momente zu berechnen.

[§ 159) Bei den allgemeinen konformen Abbildungen ist das Vergröſserungsverhältnis gegeben durch den absoluten Betrag des Differentialquotienten der abbildenden Funktion. Im Anschluſs an die „Einführung" des Verfassers in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften kann man hiermit die Untersuchungen fortsetzen. Dabei zeigt sich ganz allgemein folgendes:

Die Kurven konstanten Vergrösserungsverhältnisses mögen für eine (erste) Isothermenschar, für welche sie also Stellen desselben Kurvenabstandes mit einander verbinden, gefunden sein, dann gelten sie auch für die orthogonale (zweite) Isothermenschar, auſserdem für jede Isothermenschar, die jene erste unter irgend welchem Winkel durchsetzt.

Die Kurven konstanten Vergrösserungsverhältnisses sind selbst eine Isothermenschar. Ihre Orthogonalschar bedeutet für die erste der obigen Isothermenscharen die Gesamtheit der Kurven, welche die Punkte gegebener Kurvenrichtung mit einander verbinden, also durch die Berührungspunkte einer an die erste Schar gelegte Parallelschar von Tangenten (gegebener Richtung) geht. Der Neigungswinkel der Tangenten bedeutet die „Abweichung" des Differentialquotienten der Funktion, welche die Schar aus einer Parallelenschar entstehen läſst.

Jede der genannten Kurvenscharen läſst sich isothermisch in kartesischen Koordinaten $u = p$ (wo p z. B. die Werte

$o, a, 2a, 3a, \ldots$ annimmt), so schreiben, dafs die linke Seite u oder $f(x, y)$ der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügt.

Angenommen, $u = p$ stelle die Kurven konstanten Vergröfserungsverhältnisses dar, so läfst sich die zugehörige Orthogonalschar $v = p$ leicht bestimmen. (Vergl. z. B. Theorie der isog. Verwandtschaften, Kap. V.) Jetzt ist $u + vi$ eine bestimmte Funktion komplexen Arguments, deren Integral zu suchen ist. Findet man als solches $U + Vi$, so ist z. B. $U = p$ eine der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ genügende Funktion, ebenso genügt V der entsprechenden Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$. Die Diagonalkurven einer beliebigen Einteilung in ähnliche Rechtecke haben die Gleichung $mU + nV = p$. Während also U und V partikuläre Integrale geben, ist der letzte Ausdruck eine vollständigere, allgemeinere Lösung. Wie sich mit $x = p$ und $y = p$ quadratische Einteilungen durchführen lassen, so auch mit $mx + ny = p$ und der Orthogonalschar $-mx + ny = p_1$.

Nun waren oben für gewisse isothermische Kurvenscharen die entsprechenden Kurven konstanten Vergröfserungs-Verhältnisses und ihre Orthogonalscharen auf elementarem Wege gefunden, es waren also leicht zu behandelnde Beispiele gegeben, die das Studium dieses Gebietes der Funktionentheorie wesentlich erleichtern und die entsprechenden Theorien veranschaulichen. Die Beschäftigung mit solchen Aufgaben hat also nicht nur geometrischen Wert.

Nun kann aber jede isothermische Kurvenschar als ein System von Stromlinien oder Niveaulinien einer stationären Strömung (z. B. der Elektrizität, der Wärme, des Grundwassers, des Wassers überhaupt unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen) gedeutet werden, die Flächen $z = r^p$ (z. B. für $(p = -1)$ und $z = {}^e lg\, r$ als graphische Darstellungen für gewisse Potentialbeziehungen,

und so haben jene Betrachtungen auch Wert für die mathematische Physik.

In der Formel $mU + nV = p$ erkennt man z. B. sofort den Maxwellschen Satz, dafs, wenn man zwei Strömungsnetze über einander legt, man durch das Ziehen der Diagonalen sofort ein neues Stromnetz erhält, was mit der algebraischen Addition der Potentiale zusammenhängt.

Jedes Stromnetz der ganzen Ebene läfst sich aber durch stereometrische Projektion auf die Kugel, jedes in einem Sektor der Ebene befindliches auf den Kegel, jedes in einem Parallelstreif der Ebene befindliches auf den Cylinder, das Katenoid, das einschalige Hyperboloid, auf die allgemeinen Röhrenflächen u. s. w. übertragen, jedes Stromnetz im ebenen Rechteck auf die Cyklide und die ihr verwandten Flächen, und so tritt man in Gebiete ein, wo die Stereometrie mit der Physik Hand in Hand zu gehen hat, auf denen Lambert, Lagrange, Gaufs, Riemann, Abel, Jacobi, Weierstrafs, Schwarz, Maxwell, Helmholtz, Kirchhoff erfolgreich gearbeitet haben.

Es braucht nicht mehr an die kartographische Bedeutung erinnert zu werden, um den Wert der obigen elementaren Betrachtungen hervorzuheben. Dafs sie aber auch für die Festigkeitslehre von Wichtigkeit sind, hat zuerst Saint Venant an der Torsiontheorie, z. B. für den elliptischen Cylinder, gezeigt.]

μ) Beispiele von Momenten für räumliche Gebilde.

a) Schwerpunkte und statische Momente für einige Körpergruppen und Oberflächen.

§ 160) Schon im zweiten Bande wurden Schwerpunktsberechnungen für verschiedene räumliche Gebilde und damit auch die statischen Momente in Bezug auf beliebige Ebenen erledigt, z. B. für Kegel und Kegelstumpf, Pyramide und Pyramidenstumpf, Schwerpunktshöhen für

Obelisken und Prismatoide und für die Parallelschichten der mit ihnen nach Cavalieri zusammenhängenden Kugeln, Kugelschichten und Kugelabschnitte, für Ellipsoide nebst Schichten und Abschnitten, ein- und zweifache Hyperboloide, parabolische Cylinder, elliptische Paraboloide und gelegentlich des Halbtetraeders auch für Räume, die vom hyperbolischen Paraboloid begrenzt sind. Vergl. Band II Seite 95 bis 96, 106 bis 109, 234 bis 237, 286 bis 312. Auch der Kugelsektor, die Zonenpyramide und ihr Stumpf wurden behandelt. Auch einige Oberflächen, wie die des Kegels, der Pyramide und ihrer Stumpfe, der Kugelfläche und der Kugelzonen bezw. Kalotten wurden berücksichtigt. (Vergl. Band II Seite 362 bis 366.)

§ 161) Die Cylinder parabolischer Kurven p^{ter} Ordnung wurden zugleich mit den ebenen Flächen behandelt in Band IV, Seite 18 bis 35 und 88 bis 93, und zwar wurde sowohl h_s, als auch x_s ermittelt, so dafs die Lage des Schwerpunkts in der Mittelebene des Cylinders vollständig bestimmt war. (Vergl. Tabelle in § 97.)

Die Schwerpunktsachsen abgeschrägter Cylinder und Prismen wurden bestimmt durch die Gleichungen

$$x_\sigma = \frac{T_y}{M_y}, \quad y_\sigma = \frac{M_{xy}}{M_x}.$$

Auf der entsprechenden Achse liegt der Schwerpunkt in halber Höhe. Die Kenntnis der Trägheits- und Centrifugalmomente für ebene Flächen wurde dabei vorausgesetzt. Die Ausdehnungsfähigheit dieser Methode auf Cylinder und Prismen, die durch parabolische Cylinderflächen zweiter und höherer Ordnung abgeschnitten sind, wurde angedeutet.

Auch für Guldinsche Drehungskörper und ihre Sektoren wurde die Schwerpunktslage bestimmt.

Jetzt sollen als lehrreiches Beispiel die Drehungskörper der Parabeln höherer Ordnung in entsprechender Weise untersucht werden.

§ 163) Tabelle für Drehungsparaboloide höherer Ordnung, bei denen die erzeugende Fläche schraffiert ist, die Drehung aber stets um die senkrechte Gerade $P_n Q_n^{\text{v}}$ erfolgt.

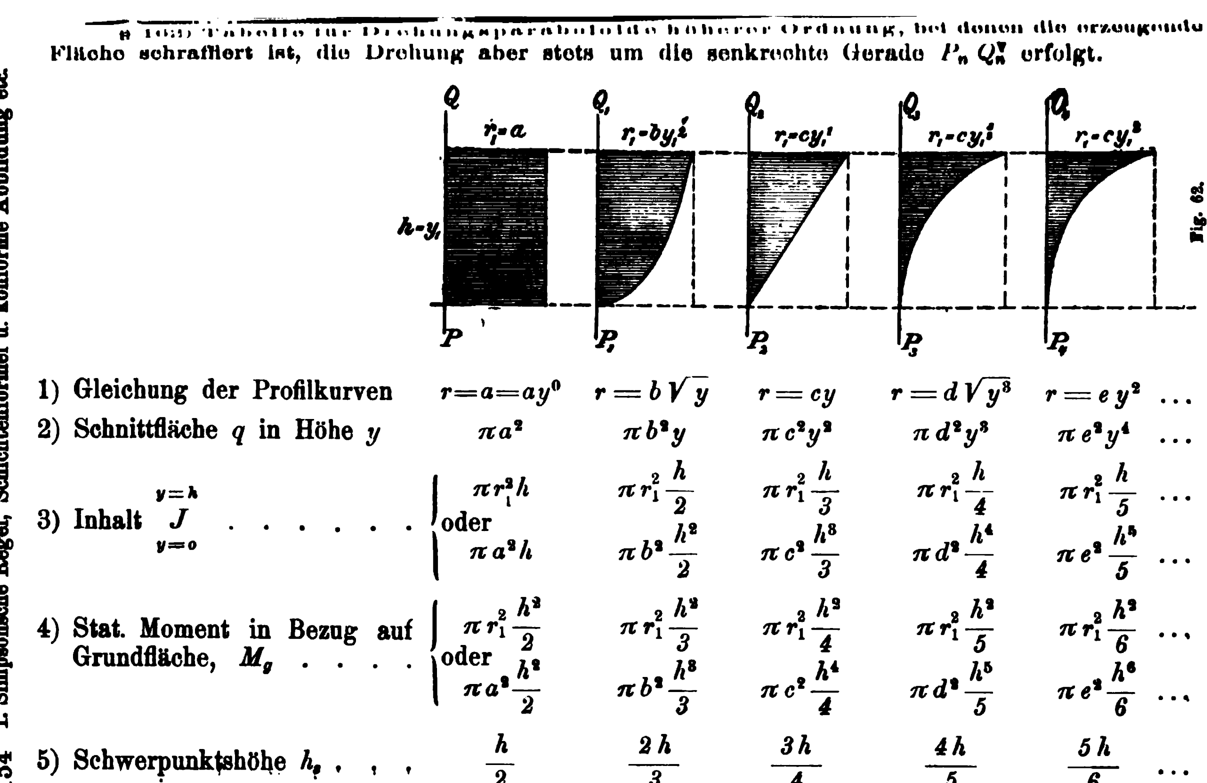


Fig. 62.

1) Gleichung der Profilkurven	$r=a=ay^0$	$r=b\sqrt{y}$	$r=cy$	$r=d\sqrt{y^3}$	$r=ey^2$	...
2) Schnittfläche q in Höhe y	πa^2	$\pi b^2 y$	$\pi c^2 y^2$	$\pi d^2 y^3$	$\pi e^2 y^4$	...
3) Inhalt $\int\limits_{y=0}^{y=h}$	$\pi r_1^2 h$	$\pi r_1^2 \frac{h}{2}$	$\pi r_1^2 \frac{h}{3}$	$\pi r_1^2 \frac{h}{4}$	$\pi r_1^2 \frac{h}{5}$	...
oder	$\pi a^2 h$	$\pi b^2 \frac{h^2}{2}$	$\pi c^2 \frac{h^3}{3}$	$\pi d^2 \frac{h^4}{4}$	$\pi e^2 \frac{h^5}{5}$	...
4) Stat. Moment in Bezug auf Grundfläche, M_g	$\pi r_1^2 \frac{h^2}{2}$	$\pi r_1^2 \frac{h^2}{3}$	$\pi r_1^2 \frac{h^2}{4}$	$\pi r_1^2 \frac{h^2}{5}$	$\pi r_1^2 \frac{h^2}{6}$	...
oder	$\pi a^2 \frac{h^2}{2}$	$\pi b^2 \frac{h^3}{3}$	$\pi c^2 \frac{h^4}{4}$	$\pi d^2 \frac{h^5}{5}$	$\pi e^2 \frac{h^6}{6}$	...
5) Schwerpunktshöhe h_s . . .	$\frac{h}{2}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{3h}{4}$	$\frac{4h}{5}$	$\frac{5h}{6}$	...

Die Tabelle kann beliebig weit fortgeführt werden, auch kann, wie in der früher angegebenen Tabelle, alles Zwischenliegende durch Interpolation eingeschaltet werden. Der Leser führe dies durch für $r_1 = xy^{\frac{1}{3}}$, $x'y^{\frac{2}{3}}$ u. s. w. sodann für $r_1 = xy^{\frac{1}{4}}$, $x'y^{\frac{2}{4}}$ (siehe oben), $x''y^{\frac{3}{4}}$ u. s. w.

Macht man $a = b = c = d \ldots$, so stellt jeder Körper das statische Moment des vorangehenden in Bezug auf die Grundfläche dar.

§ 164) Aufgaben: a) Man lasse die in jedem Rechtecke angedeuteten Ergänzungsflächen um PQ sich drehen und stelle dafür die Tabelle auf.

b) Man lasse die Ergänzungsflächen sich um die Grundlinie drehen und stelle die Tabelle auf. Als Grundfläche ist jetzt $P_n Q_n$ zu betrachten.

c) Man lasse die schraffierten Flächen sich um die Grundlinie drehen und stelle die Tabelle auf. Wiederum ist $P_n Q_n$ die neue Grundfläche.

d) Man stelle die Resultate in Beziehung zur Guldinschen Inhaltsregel.

e) Man verwandle die Kreisschnitte für alle untersuchten Probleme nach Cavalieri in flächengleiche Quadrate (oder in flächengleiche Vielecke von beliebiger Seitenzahl) und stelle die Tabellen her.

f) Man verwandle die Kreisschnitte in Rechtecke von gegebenen Seitenverhältnissen und stelle die Tabellen her.

g) Man verwandle die Kreisschnitte in Ellipsen von gegebenem Achsenverhältnis und stelle die Tabellen her; oder für irgend welche ähnliche Flächenstücke in den betreffenden Schichten, z. B. für je einen Umgang einer Polarparabel p^{ter} Ordnung.

h) Man bestimme Inhalt und Schwerpunktshöhe für beliebige Schichten aller so untersuchten Körper (z. B. $\overset{y=y_n}{\underset{y=y_1}{J}}$).

i) Man bestimme (z. B. mit Hilfe der Guldinschen Regel) das Entsprechende für beliebige Sektoren der untersuchten Körper.

§ 164) Man bilde die statischen Momente und Schwerpunktshöhen für Körper von der Profilkurve

$$r = a + b\sqrt{y} + cy + d\sqrt{y^3} + ey^2 + \ldots$$

und suche beliebige der im Vorparagraphen aufgestellten Aufgaben auch für diese zu lösen.

Bemerkung: Über die Momente höherer Ordnung für Körper, die mit den Kegelschnittsflächen zusammenhängen, soll später besonders gesprochen werden.

§ 165) Aus Bd. II und der Ingenieur-Mathematik des Verfassers sollen einige Resultate zusammengestellt werden.

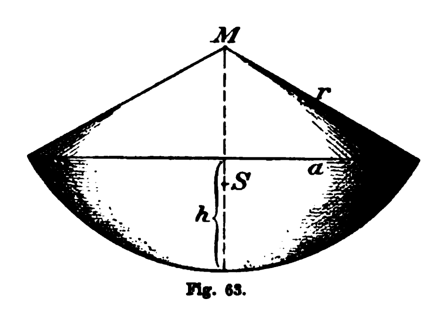


Fig. 63.

Für den Kugelsektor mit r und h liegt der Schwerpunkt in der Entfernung

$$MS = \frac{3}{8}(2r - h) = \frac{3}{8}\frac{a^2}{h}$$

vom Mittelpunkte. Für die Halbkugel ist $MS = \frac{3}{8}r$.

Für den Kegelstumpf liegt er in der Höhe

$$h_s = \frac{h}{4}\frac{r^2 + 2r\varrho + 3\varrho^2}{r^2 + r\varrho + \varrho^2} = \frac{h}{4}\frac{G_1 + 2\sqrt{G_1 G_2} + 3G_2}{G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2}.$$

Letzteres gilt auch für den Pyramidenstumpf.

Für den Kugelabschnitt mit r und Pfeilhöhe h liegt er in der Entfernung $h_s = \frac{h}{4}\frac{8r - 3h}{3r - h}$ vom Scheitelpunkte. Ist statt r der Radius a der begrenzenden Grundfläche gegeben, so wird $h_s = \frac{h}{2}\frac{4a^2 + h^2}{3a^2 + h^2}$.

Für die Kugelschicht, die durch r und die Ebenen-Abstände h und h_1 von dem untersten Punkte bestimmt ist, liegt der Schwerpunkt in der Höhe

$$y_s = \frac{8r(h_2^3 - h_1^3) - 3(h_2^4 - h_1^4)}{12r(h_2^2 - h_1^2) - 4(h_2^3 - h_1^3)}.$$

Sind dagegen die meſsbaren Radien a und b der Grundkreise und die Höhe h gegeben, so liegt er in der Höhe

$$y_s = \frac{h}{2} \cdot \frac{4a^2 + 2b^2 + h^2}{3a^2 + 3b^2 + h^2}$$

über dem Kreise mit Radius b.

Für das einmantelige Drehungs-Hyperboloid mit Hauptschnitt $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ liegt er, wenn der Körper von $y = 0$ bis $y = h$ reicht, in der Höhe

$$y_s = \frac{3h}{4} \frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2}.$$

Für das zweimantelige Drehungs-Hyperboloid mit derselben Hyperbel als Hauptschnitt liegt er, wenn der Körper vom Scheitelpunkte aus gerechnet bis nach e reicht, in der Entfernung

$$e_s = \frac{e}{4} \cdot \frac{8a + 3e}{3a + e}$$

vom Scheitelpunkte.

Wird ein Tetraeder mit der Kante a so auf einen Tisch gelegt, daſs die Gegenkante b horizontal ist, und hat es dabei die Höhe h, so hat der Teil, der von $y = 0$ bis $y = y_1$ reicht, den Schwerpunkt in der Höhe

$$y_s = \frac{y_1}{2} \frac{4h - 3y_1}{3h - 2y_1}.$$

Dies gilt auch von dem durch das hyperbolische Paraboloid begrenzte Halbtetraeder durch a, b und zwei andere Gegenkanten.

Ein prismatoidischer Körper habe als Grundfläche einen Kreis mit Radius r_1, er endige in der Höhe h, in einer horizontalen Schneide von der Länge $2r$. Sein Schwerpunkt liegt in der Höhe

$$h_s = \frac{2}{3} h.$$

Auch für einige körperliche Schraubengewinde bezw. ihre Sektoren wird in der Ingenieurmathematik der Schwerpunkt bestimmt.

b) Trägheitsmomente für einige Körper und Oberflächen.

§ 166) **Fortsetzung der Tabelle für die Drehungsparaboloide höherer Ordnung.**

1) Profilkurve	$r = a$	$r = b\sqrt{y}$	$r = cy$	$r = d\sqrt{y^3}$	$r = ey^2$	...
2) Polares Trägheitsmoment für jeden Horizontalschnitt, $\frac{\pi r^4}{2}$	$\frac{\pi a^4}{2}$	$\frac{\pi b^4 y^2}{2}$	$\frac{\pi c^4 y^4}{2}$	$\frac{\pi d^4 y^6}{2}$	$\frac{\pi e^4 y^8}{2}$	...
3) Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehungsachse, T_p	$\frac{\pi a^4}{2} h$	$\frac{\pi b^4}{2} \frac{h^3}{3}$	$\frac{\pi c^4}{2} \frac{h^5}{5}$	$\frac{\pi d^4}{2} \frac{h^7}{7}$	$\frac{\pi e^4}{2} \frac{h^9}{9}$	...
oder	$\frac{\pi r_1^4}{2} h$	$\frac{\pi r_1^4 h}{6}$	$\frac{\pi r_1^4 h}{10}$	$\frac{\pi r_1^4 h}{14}$	$\frac{\pi r_1^4 h}{18}$	...
4) Radius des vorstehenden Trägheitsmomentes, $\varrho_m = \sqrt{\frac{T_p}{J}}$	$r_1 \sqrt{\frac{1}{2}}$	$r_1 \sqrt{\frac{2}{6}}$	$r_1 \sqrt{\frac{3}{10}}$	$r_1 \sqrt{\frac{4}{14}}$	$r_1 \sqrt{\frac{5}{18}}$	...

5) Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Grundfläche, $T_g = \sum r^2 \pi y^2$		$\frac{\pi a^2 h^3}{3}$	$\frac{\pi b^2 h^4}{4}$	$\frac{\pi c^2 h^5}{5}$	$\frac{\pi d^2 h^6}{6}$	$\frac{\pi e^2 h^7}{7} \dots$
	oder	$\frac{\pi r_1^2 h^3}{3}$	$\frac{\pi r_1^2 h^3}{4}$	$\frac{\pi r_1^2 h^3}{5}$	$\frac{\pi r_1^2 h^3}{6}$	$\frac{\pi r_1^2 h^3}{7} \dots$
6) Mittlerer Trägheitsabstand für das letzte Moment, $h_m = \sqrt{\frac{T}{J}}$		$h\sqrt{\frac{1}{3}}$	$h\sqrt{\frac{2}{4}}$	$h\sqrt{\frac{3}{5}}$	$h\sqrt{\frac{4}{6}}$	$h\sqrt{\frac{5}{7}} \dots$
7) Trägheitsmoment T_h in Bezug auf den Hauptschnitt (gleich der Hälfte von T_p),		$\frac{\pi a_1^4 h}{4}$	$\frac{\pi b^4}{4} \frac{h^3}{3}$	$\frac{\pi c^4}{4} \frac{h^5}{5}$	$\frac{\pi d^4}{4} \frac{h^7}{7}$	$\frac{\pi e^4}{4} \frac{h^9}{9} \dots$
	oder	$\frac{\pi r_1^4 h}{4}$	$\frac{\pi r_1^4 h}{12}$	$\frac{\pi r_1^4 h}{20}$	$\frac{\pi r_1^4 h}{28}$	$\frac{\pi r_1^4 h}{36} \dots$

Man bilde noch folgende Ausdrücke, $\frac{T_p}{M_p}$ für die senkrechte Achse, $\frac{T_g}{M_g}$ in Bezug auf die Grundfläche, $\frac{T_h}{M_h}$ für jeden Hauptschnitt, $\frac{T_h}{J}$ für jeden Hauptschnitt u. s. w.

Setzt man $a = b = c = d \ldots$, so folgt, dafs jeder Drehungskörper der Figur 62 das Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundfläche für den zweitvorhergehenden darstellt.*)

Auch diese Tabelle kann beliebig weit ausgedehnt und durch Interpolationen ergänzt werden, wobei es sich, wie vorher, um arithmetische Reihen handelt.

§ 167) Aufgaben. Man erweitere auch diese Tabelle dadurch, dafs man die Ergänzungsflächen (des Rechtecks) um die Achsen $P_n Q_n$ rotieren läfst, auch dadurch, dafs man die beiden Flächen jedesmal um die Grundlinie sich drehen läfst.

Man bestimme das Entsprechende für Sektoren der Körper, ebenso für beliebige Schichten (z. B. $\overset{y=y_2}{\underset{y=y_1}{J}}$).

Man setze auch hier an Stelle der kreisförmigen Querschnitte regelmäfsige n-Ecke (z. B. Quadrate) und stelle für solche die Tabelle auf; oder Ellipsen von gegebenem Achsenverhältnis, oder Rechtecke von demselben Seitenverhältnis, oder überhaupt ähnliche Querschnitte irgend welcher Art.

An Stelle der Kreissektoren, Kreissegmente, können dabei Sektoren und Segmente der entsprechenden regelmäfsigen Vielecke, oder solche der Ellipsen treten u. s. w.

Die obere Grundfläche kann natürlich auch ein Umgang einer Polarparabel p^{ter} Ordnung werden, alle anderen Schnitte ähnliche Kurven dieser Art.

Das Übungsmaterial kann als unerschöpflich bezeichnet werden, besonders wenn auch Profilkurven von der Gleichung

$$r = a + b\sqrt{y} + cy + d\sqrt{y^3} + e^4 y^2 + \ldots$$

und ähnliche betrachtet.

---

*) Diese Tabellen veröffentlichte Verfasser im Jahre 1896 in seiner Ingenieurmathematik, Bd. I. Gleichzeitig hat Herr Prof. Bantlin von der technischen Hochschule in Stuttgart im Anschlufs an mein Lehrbuch der Elementar-Mathematik und an einige meiner Aufsätze in der Zeitschrift deutscher Ingenieure ebendaselbst einige stereometrische Darstellungen von körperlichen Trägheitsmomenten veröffentlicht (Bd. 40, 1896), die Beispiele zu der dargestellten Methode geben. Die systematische Tabelle hat er aber nicht abgeleitet.

§ 168) Einige Übungsbeispiele, die sich hinsichtlich der Trägheitsmomente leicht behandeln lassen, mögen mit Hilfe der Cavalierischen Methode angedeutet werden.

a) Für die Halbkugel mit Radius a ist der Querschnitt in der Höhe y

$$q_y = \pi x^2 = \pi (a^2 - y^2).$$

Ihr entspricht nach Cavalieri für die Tiefe 1 ein Cylinder mit dem durch

$$x \cdot 1 = \pi (a^2 - y^2)$$

bestimmten Profile. — (Wie ist es mit der Fortsetzung über $y = a$ hinaus?)

b) Ein einschaliges Drehungs-Hyperboloid habe das Profil $x^2 - y^2 = a^2$, so dafs der Querschnitt in Höhe y durch

$$q_y = \pi x^2 = \pi (a^2 + y^2)$$

gegeben ist. Ihm entspricht nach Cavalieri bei der Tiefe 1) ein Cylinder mit dem Profile

$$x \cdot 1 = \pi (a^2 + y^2).$$

c) Ein elliptischer Cylinder von der Tiefe 1 habe das Profil

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so dafs

$$q_y = 2x \cdot 1 = 2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2} = \frac{2a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

ist. Ihm entspricht nach Cavalieri ein Drehungskörper vom Profile

$$\pi x^2 = \frac{2a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}.$$

d) Ein einfacher hyperbolischer Cylinder von der Tiefe 1 habe das Profil

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so dafs sein Querschnitt in Höhe y durch

$$q_y = 2x \cdot 1 = 2\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2} = \frac{2a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$$

gegeben ist. Ihm entspricht nach Cavalieri ein Drehungskörper vom Profile

$$\pi x^2 = \frac{2a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}.$$

e) Ein einschaliges Drehungshyperboloid habe das Profil

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

also die Querschnittsformel

$$q_y = \pi x^2 = \pi(a^2 + y^2).$$

Ihm entspricht ein Körper quadratischen Querschnitts, dessen Mittelschnitt durch die Kurve

$$x^2 = \pi(a^2 + y^2)$$

begrenzt ist. [Wie ist es, wenn der neue Körper als Querschnitt ein regelmäfsiges $2n$-Eck oder $(2n+1)$-Eck hat?]

f) Entsprechende Aufgaben stelle man für die verschiedenen Arten von Drehungskörpern vom Profile der Parabeln p^{ter} Ordnung $x = y^p$ auf und untersuche sie auf statische Momente u. dergl. — Bei einigen der vorstehenden Aufgaben können gegebenenfalls binomische Reihenentwickelungen benutzt werden.

In der Ingenieurmathematik des Verfassers werden elementar z. B. die folgenden Resultate abgeleitet.

§ 169) Trägheitsmomente ebener Flächen in Bezug auf eine nicht parallele Ebene. Man denke sich die beliebig gestaltete Fläche F (in der Figur 64 ist beispielsweise ein Rechteck gezeichnet) durch Parallele zur Bezugsebene E in zahlreiche Streifen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ zerlegt, die von E die mittleren Entfernungen $y_1, y_2, y_3 \ldots$ haben, so dafs es sich für das Trägheitsmoment um $\sum f y^2$ handelt. Denkt man sich die ebene Fläche F auf eine Normalebene zu E projiziert, deren Schnittlinie K parallel zu den Teilungslinien, also auch parallel zur Schnittlinie von E und der

Ebene der Fläche ist, so erhält man eine neue Fläche $F_1 = F \sin\alpha$, und jeder Streifen f geht in einen Streifen $f_1 = f \sin\alpha$ über, wenn $\sphericalangle D A A_1 = \alpha$ gesetzt wird. Das Trägheitsmoment der Fläche F und das der Fläche F_1 in Bezug auf die Ebene E stehen also in der Beziehung $T_1 = T \sin\alpha$ oder $T = \frac{T_1}{\sin\alpha}$. Folglich gilt der Satz:

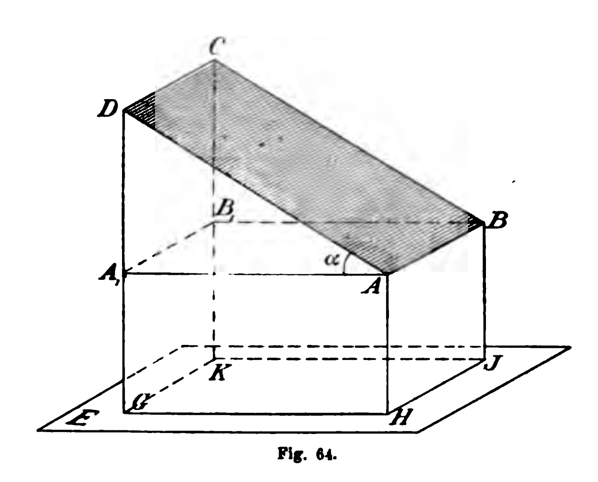


Fig. 64.

Das Trägheitsmoment einer ebenen Fläche F in Bezug auf eine Ebene E, welche gegen die Ebene von F die Neigung α hat, ist das $\frac{1}{\sin\alpha}$ fache von dem Trägheitsmomente einer Fläche F_1 in Bezug auf E, die durch Projektion der Fläche F auf die durch den Schnitt beider Ebenen gelegte Normalebene zu E (oder auf eine dazu parallele Ebene) entsteht.

§ 170) Aufgabe. Das Trägheitsmoment für den Mantel einer quadratischen Pyramide in Bezug auf eine ihrer Mittelebenen zu bestimmen.

Auflösung. $ABCD$ mit Spitze P sei die Pyramide, die Ebene E die betreffende Mittelebene. Dreieck PAB hat in Bezug auf E das $\frac{1}{\sin\alpha}$ fache vom Trägheitsmomente

des Dreiecks ABP in Bezug auf KL. Ist nun b die Grundkante der Pyramide, so ist das letztere Moment

$$T_1 = \frac{b\left(\frac{b}{2}\right)^3}{4},$$

also das Trägheitsmoment der Fläche PAB in Bezug auf E

$$T = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \frac{b^4}{32}.$$

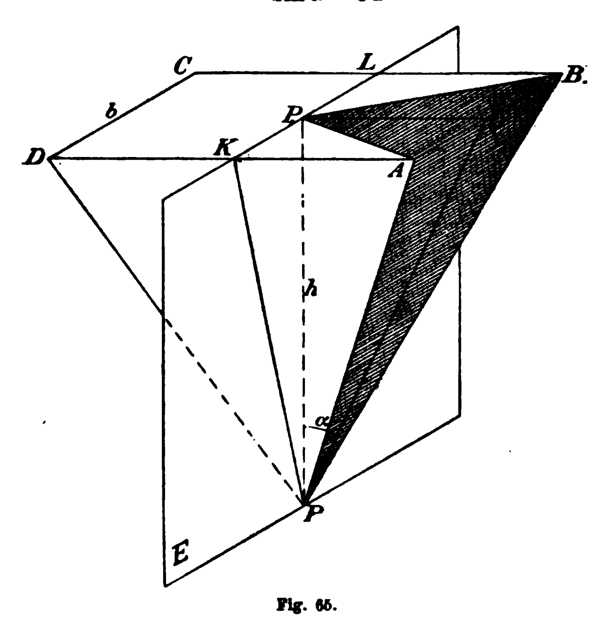


Fig. 65.

Da aber, wenn h die Höhe der Pyramide ist,

$$\sin\alpha = \frac{P_1 Q}{QP} = \frac{b}{2\sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4h^2}}$$

wird, so folgt

$$T = \frac{b^4}{32} \frac{\sqrt{b^2 + 4h^2}}{b} = \frac{b^3}{32}\sqrt{b^2 + 4h^2}.$$

Solcher Flächen sind zwei vorhanden.

Das Trägheitsmoment der Fläche ABP (die senkrecht zu E steht), in Bezug auf E, also in Bezug auf die Mittellinie KP, ist gleich

$$\frac{lb^3}{48} = \frac{b^3}{48}\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2} = \frac{b^3}{96}\sqrt{b^2 + 4h^2}.$$

Auch solcher Flächen sind zwei vorhanden.

Für den Pyramidenmantel ist also das Trägheitsmoment in Bezug auf die Mittelebene

$$T_m = \frac{2b^3}{32}\sqrt{b^2 + 4h^2} + \frac{2b^3}{96}\sqrt{b^2 + 4h^2}$$

oder

$$T_m = \frac{b^3}{12}\sqrt{b^2 + 4h^2}.$$

Das axiale Trägheitsmoment in Bezug auf die Höhenlinie ist doppelt so grofs, also

$$T_p = \frac{b^3}{6}\sqrt{b^2 + 4h^2}.$$

§ 171) **Dieselbe Aufgabe für den Mantel der senkrechten Pyramide mit regelmäfsigem n-Eck als Grundfläche.**

Hier beginnt man besser mit dem Trägheitsmoment in Bezug auf die Höhenlinie. Setzt man in der vorigen Figur die Seite AB wiederum gleich b, dagegen $PQ = \varrho$, d. h. gleich dem Radius des der Grundfläche einbeschriebenen Kreises, so hat das Trägheitsmoment der Fläche ABP in Bezug auf die Achse PP_1 den Wert

$$T = \frac{1}{\sin\alpha}\,\frac{b\varrho^3}{4} + \frac{lb^3}{48},$$

denn es ist gleich der Summe zweier Axialmomente in Bezug auf die Ebenen E und PQP_1. Hier ist

$$\sin\alpha = \frac{\varrho}{l} = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + h^2}},$$

also wird

$$T = \frac{b\varrho^3}{4} \frac{\sqrt{\varrho^2+h^2}}{\varrho} + \frac{b^3}{48}\sqrt{\varrho^2+h^2}$$

$$= b\sqrt{\varrho^2+h^2}\left[\frac{\varrho^2}{4}+\frac{b^2}{48}\sqrt{\varrho^2+h^2}\right].$$

Solcher Flächen sind n vorhanden, also ist das Trägheitsmoment des Mantels in Bezug auf die Höhenlinie

$$T_p = n\,b\sqrt{\varrho^2+h^2}\left[\frac{\varrho^2}{4}+\frac{b^2}{48}\sqrt{\varrho^2+h^2}\right]$$

$$= u\sqrt{\varrho^2+h^2}\left[\frac{\varrho^2}{4}+\frac{b^2}{48}\sqrt{\varrho^2+h^2}\right].$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf jede durch die Achse gelegte Ebene ist halb so grofs.

Der Radius ϱ hat den Wert

$$\varrho = \frac{b}{2\tan\frac{\pi}{n}}.$$

§ 172) Dieselbe Aufgabe für den Mantel des senkrechten Kreiskegels zu lösen. Man hat in der Formel für T_p den Umfang $u = 2\pi\varrho$, die Seite $b = 0$ zu setzen. So ergiebt sich

$$T_{p_4} = 2\varrho\pi\sqrt{\varrho^2+h^2}\cdot\frac{\varrho^2}{4} = \frac{\pi\varrho^3}{2}\sqrt{\varrho^2+h^2} = \frac{\pi\varrho^3}{2}\,l$$

$$= \frac{\pi\varrho^4}{2}\,\frac{1}{\cos\beta},$$

wo β der Winkel zwischen ϱ und l ist.

In Bezug auf jede Hauptschnittsebene ist das Trägheitsmoment halb so grofs.

Bemerkung. Nach denselben Methoden läfst sich das Trägheitsmoment des Mantels in Bezug auf die Grundebene des Kegels und der „regelmäfsigen Pyramide“ bestimmen, ebenso in Bezug auf die durch die Spitze oder durch den Schwerpunkt gelegte parallele Ebene. Endlich

läfst sich auch das Trägheitsmoment für die gesamte Oberfläche des Kegels oder der regelmäfsigen Pyramide leicht berechnen, da nur noch das Polar- bezw. Axialmoment der Grundfläche zu addieren ist.

§ 173) **Aufgabe. Das Trägheitsmoment des Kantenkomplexes der „regelmäfsigen" Pyramide in Bezug auf die Höhenlinie zu ermitteln.**

Die Lösung soll dem Leser überlassen bleiben. Für das Trägheitsmoment der Geraden in Bezug auf eine Ebene, gegen die sie die Neigung α hat, ist ebenfalls $T = \frac{T_1}{\sin\alpha}$, wobei T_1 das Moment der auf die Normale projizierten Geraden ist.

§ 174. **Aufgabe. Das Trägheitsmoment für den Körper, die Oberfläche, den Kantenkomplex und für die Eckpunkte des regelmäfsigen Tetraeders, Hexaeders, Oktaeders, Dodekaeders, Ikosaeders in Bezug auf eine der Hauptachsen zu berechnen.**

Die Lösung bleibe dem Leser überlassen.

§ 175) **Das Trägheitsmoment für drei Kreislinien desselben Halbmessers r, deren Ebenen einander rechtwinklig schneiden und durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt gehen in Bezug auf eine der Schnittlinien zu berechnen.**

Auflösung. Für den einen Kreis handelt es sich um $T_p = lr^2 = 2\pi r \cdot r^2 = 2\pi r^3$, für jeden der beiden anderen um die Hälfte, d. h. um $T_1 = \pi r^3$, im ganzen um

$$T_a = (2\pi r^3) + 2(\pi r^3) = 4\pi r^3.$$

§ 176) **Dieselbe Aufgabe für die entsprechenden Kreisscheiben.**

Auflösung. Für die eine Scheibe handelt es sich um $T_u = \frac{\pi r^4}{2}$, für jede der beiden anderen um die Hälfte davon, im ganzen um $T = \pi r^4$.

In dem folgenden Paragraph werden einige Resultate mitgeteilt, deren elementare Entwickelung man in der „Ingenieur-Mathematik“ des Verfassers findet. Andere werden hier abgeleitet, besonders solche für Oberflächen, die in dem genannten Buche im Hinblick auf die geringere technische Verwertbarkeit nicht berücksichtigt wurden.

§ 177). **Einige Resultate.**

a) Für den **Rechteckskörper** mit den Seiten a, b, c ist in Bezug auf die parallelen Schwerpunktsebenen (xy, yz, zx)

$$T_{xy} = \frac{abc^3}{12}, \qquad T_{yz} = \frac{bca^3}{12}, \qquad T_{zx} = \frac{cab^3}{12};$$

für die Mittellinien sind die Axialmomente

$$T_x = \frac{cab^3}{12} + \frac{abc^3}{12} = \frac{abc}{12}(b^2 + c^2) = \frac{J}{12}(b^2 + c^2),$$

$$T_y = \frac{abc^3}{12} + \frac{bca^3}{12} = \frac{abc}{12}(c^2 + a^2) = \frac{J}{12}(c^2 + a^2),$$

$$T_z = \frac{bca^3}{12} + \frac{cab^3}{12} = \frac{abc}{12}(a^2 + b^2) = \frac{J}{12}(a^2 + b^2).$$

Für den Schwerpunkt ist das Polarmoment zweiter Ordnung (wenn d die Diagonale ist)

$$T_p = \frac{abc}{12}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{J}{12} d^2.$$

Mittlerer Trägheitsradius $\varrho_m = d\sqrt{\frac{1}{12}}$.

b) Für den **senkrechten Kreiscylinder** ist in Bezug auf die horizontale Schwerpunktsebene

$$T_{xy} = \frac{\pi r^2 h^3}{12} = \frac{Jh^2}{12},$$

für jeden Hauptschnitt (z. B.)

$$T_{zx} = T_{yz} = \frac{Jr^2}{4},$$

für die Drehungsachse

$$T_z = \frac{\pi r^4}{2} h = \frac{J r^2}{2},$$

für die x- und y-Achse

$$T_x = T_y = \frac{J}{12}(3r^2 + h^2).$$

Für den Schwerpunkt ist das Polarmoment zweiter Ordnung

$$T_p = \frac{J}{12}(h^2 + 6r^2).$$

Mittlerer Trägheitsradius $\varrho_m = \sqrt{\frac{h^2 + 6r^2}{12}}$.

c) Für den Hohlcylinder ist in Bezug auf die Drehungsachse

$$T = \frac{J}{2}(r^2 + r_1^2).$$

d) Das Prisma, dessen Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck ist.

Balanciert der Körper als solcher erster Ordnung auf seiner Schneide, und ist das Rechteck der oben liegenden Grundfläche durch die Tiefe a und die Grundlinie b der Dreiecke bestimmt, so ist in Bezug auf die untere Grundfläche

$$T_u = G\frac{h^3}{4} = J \cdot \frac{h^2}{2},$$

in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gelegte Horizontalebene

$$T_{xy} = \frac{J h^2}{18} = \frac{G h^3}{36},$$

für die beiden senkrechten Koordinatenebenen, die durch den Schwerpunkt gelegt sind

$$T_{yz} = \frac{h b^3}{48} a = \frac{J b^2}{24},$$

$$T_{zx} = \frac{J a^2}{12}.$$

Für die durch den Schwerpunkt gelegten Koordinatenachsen

$$T_x = \frac{J}{36}(2h^2 + 3a^2),$$

$$T_y = \frac{J}{72}(3b^2 + 4h^2),$$

$$T_z = \frac{J}{24}(2a^2 + b^2).$$

Das Polarmoment für den Schwerpunkt ist

$$T_p = \frac{J}{72}(6a^2 + 3b^2 + 4h^2).$$

Mittlerer Trägheitsradius in Bezug auf S ist

$$\varrho_m = \sqrt{\frac{6a^2 + 3b^2 + 4h^2}{72}}.$$

e) Drehungsparabolid, auf dem Scheitel balancierend.

In Bezug auf die berührende Grundebene ist

$$T_u = \frac{Gh^3}{4} = \frac{Jh^2}{2},$$

für die durch den Schwerpunkt (der die Höhe $\frac{2h}{3}$ hat) gehende Horizontalebene

$$T_{xy} = \frac{Jh^2}{18} = \frac{Gh^3}{36}.$$

In Bezug auf die durch den Schwerpunkt gelegten Koordinatenachsen

$$T_z = \frac{Ghr^2}{6} = \frac{Jr^2}{3},$$

$$T_x = T_y = \frac{J}{18}(h^2 + 3r^2).$$

In Bezug auf die senkrechten Hauptschnitte

$$T_{xz} = T_{yz} = \frac{Jr^2}{6}.$$

Das polare Trägheitsmoment in Bezug auf den Schwerpunkt

$$T_p = \frac{J}{18}(h^2 + 6r^2).$$

Mittlerer Trägheitsradius in Bezug auf S ist

$$\varrho_m = \sqrt{\frac{h^2 + 6r^2}{18}}.$$

f) Senkrechter Kreiskegel, auf der Spitze balancierend.

$$T_u = \frac{Gh^3}{5},$$

für die drei Schwerpunkts-Koordinatenebenen

$$T_{xy} = \frac{3}{80}Jh^2, \quad T_{yz} = T_{zx} = \frac{3Jr^2}{20},$$

für die Koordinatenachsen

$$T_z = \frac{3Jr^2}{10}, \quad T_x = T_y = \frac{3J}{80}(4r^2 + h^2),$$

$$T_p = \frac{3J}{80}[h^2 + 8r^2].$$

Mittlerer Trägheitsradius in Bezug auf S ist

$$\varrho_m = \sqrt{\frac{3}{80}(h^2 + 8r^2)}.$$

g) Symmetrisch parabolischer Cylinder von Tiefe b und oberer Breite a.

$$T_u = \frac{3Jh^2}{5};$$

für die Schwerpunktsebenen:

$$T_{xy} = \frac{3}{80}Jh^2,$$

$$T_{yz} = \frac{1}{28}Ja^2,$$

$$T_{zx} = \frac{1}{12}Jb^2;$$

Fig. 66.

für die Schwerpunktsachsen:

$$T_x = \frac{J}{240}(9h^2 + 20b^2),\quad T_y = \frac{J}{560}(21h^2 + 20a^2),$$

$$T_z = \frac{J}{84}(7b^2 + 3a^2).$$

$$T_p = \frac{J}{1680}[63h^2 + 60a^2 + 140b^2],$$

mittlerer Trägheitsradius

$$\varrho_m = \sqrt{\frac{63h^2 + 60a^2 + 140b^2}{1680}}.$$

h) Kugel.

$$T_x = T_y = T_z = \frac{2}{5}Jr^2,\quad T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = \frac{1}{5}Jr^2,\quad T_p = \frac{3}{5}Jr^2.$$

Mittlerer Trägheitsradius

$$\varrho_m = r\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

§ 178) Kugelabschnitt, auf Scheitel balancierend. Querschnitt in Höhe z ist

$$\pi x^2 = \pi z(2r - z) = \pi(2rz - z^2).$$

Inhalt

$$J = \pi\left[2r\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3}\right] = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h),$$

statisches Moment für untere Ebene

$$M_u = \pi\left[2r\frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4}\right] = \frac{\pi h^3}{12}[8r - 3h],$$

Schwerpunktshöhe

$$h_s = \frac{M_u}{J} = \frac{h}{4}\,\frac{8r - 3h}{3r - h}.$$

Trägheitsmoment für untere Ebene

$$T_u = \pi\left[2r\frac{h^4}{4} - \frac{h^5}{5}\right] = \frac{\pi h^4}{10}[5r - 2h] = \frac{3h^2}{10}\,\frac{5r - 2h}{3r - h}\,J.$$

Trägheitsmoment für horizontale Schwerpunktsebene

$$T_{xy} = T_u - h_s^2 J = \frac{\pi h^4}{10}[5r - 2h] - \frac{h^2}{16}\frac{(8r-3h)^2}{(3r-h)^2}\cdot\frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$$

$$= \frac{\pi h^4}{240(3r-h)}\left[(120r - 48h)(3r-h) - 5(8r-3h)^2\right]$$

oder

$$T_{xy} = \frac{\pi h^4}{240(3r-h)}[40r^2 - 24rh + 3h^2]$$

$$= \frac{h^2}{80}\frac{40r^2 - 24rh + 3h^2}{(3r-h)^2}J.$$

In Höhe z ist

$$\frac{\pi x^4}{2} = \frac{\pi}{2}[4r^2z^2 - 4rz^3 + z^4],$$

also

$$T_z = \frac{\pi}{2}\left[4r^2\frac{h^3}{3} - 4r\frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5}\right] = \frac{\pi h^3}{30}[20r^2 - 15rh + 3h^2]$$

$$= \frac{h}{10}\frac{20r^2 - 15rh + 3h^2}{3r-h}J,$$

ferner

$$T_{yz} = T_{zx} = \frac{1}{2}T_z,\quad T_x = T_y = T_{xy} + T_{zx},\quad T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx},$$

also

$$T_p = \frac{\pi h^3}{240(3r-h)}[40r^2h - 24rh^2 + 3h^3 + 8(20r^2 - 15rh + 3h^2)(3r-h)],$$

oder

$$T_p = \frac{\pi h^3}{240(3r-h)}[480r^3 - 480r^2h + 168rh^2 - 21h^3)$$

$$= \frac{h}{80}\frac{480r^3 - 480r^2h + 168rh^2 - 21h^3}{(3r-h)^2}J.$$

$$\varrho_m = \sqrt{\frac{T_p}{J}}$$

§ 179) **Kugelschicht**, gegeben durch r, h_2 und h_1. Aus den Differenzen zweier Segmente folgt:

1) $$J = \frac{\pi}{3}\left[3r(h_2^2 - h_1^2) - (h_2^3 - h_1^3)\right],$$

2) $$M_u = \frac{\pi}{12}\left[8r(h_2^3 - h_1^3) - 3(h_2^4 - h_1^4)\right],$$

3) $$h_s = \frac{M_u}{J} = \frac{1}{4}\,\frac{8r(h_2^3 - h_1^3) - 3(h_2^4 - h_1^4)}{3r(h_2^2 - h_1^2) - (h_2^3 - h_1^3)},$$

4) $$T_u = \frac{\pi}{10}\left[5r(h_2^4 - h_1^4) - 2(h_2^5 - h_1^5)\right],$$

5) $$T_{xy} = T_u - h_s^2 J,$$

6) $$T_z = \frac{\pi}{30}\left[20r^2(h_2^3 - h_1^3) - 15r(h_2^4 - h_1^4) + 3(h_2^5 - h_1^5)\right] = r_m^2 J,$$

7) $$T_{xz} = T_{yz} = \frac{1}{2}T_z,$$ 8) $$T_x = T_y = T_{xy} + T_{zx},$$

9) $$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx},$$ 10) $$\varrho_m = \sqrt{\frac{T_p}{J}}.$$

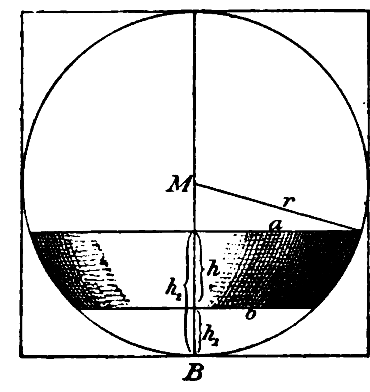


Fig. 67.

In den Formeln 1), 2), 4), 6) läfst sich allerdings $(h_2 - h_1)$ absondern und in 3) heben. Dadurch aber werden die Ausdrücke weniger übersichtlich.

Man suche die Formeln für den Fall umzuarbeiten, dafs die mefsbaren Gröfsen a, b und h gegeben sind. (Setzt man dann $b = 0$, so erhält man eine andere Form für die Resultate der vorigen Aufgabe.)

§ 179) Kugelmantel.

$$T_p = (4\pi r^2) . r^2 = 4\pi r^4 = F r^2.$$

$$T_{xy} = T_{yz} = T_{zx} = \frac{4}{3}\pi . r^4 = F \cdot \frac{r^2}{3}.$$

$$T_x = T_y = T_z = \frac{8}{3}\pi r^4 = \frac{2}{3} F r^2.$$

Dies alles ergiebt sich von T_p aus als selbstverständlich.

Will man dies, um dann zur Kalotte überzugehen, mit Hilfe der Schichtenmethode ableiten, so bedenke man, dafs die Schicht sich bezüglich der Fläche ebenso verhält, wie die entsprechende des Berührungscylinders, denn es handelt sich bei beiden um $2\pi r \frac{h}{n}$, was jedoch die Querschnittsformel $q = 2\pi r$ giebt $\left(2\pi x \cdot \frac{r}{x}\right)$. Dieses q hat in Bezug auf die Grundfläche das Trägheitsmoment $2\pi r z^2$, demnach ist für die Kugelfläche

$$T_u = 2\pi r \frac{h^3}{3} = 2\pi r \frac{8 r^3}{3} = \frac{16\pi r^4}{3}.$$

Für die durch den Schwerpunkt gehende Horizontalebene ist also

$$T_{xy} = \frac{16\pi r^4}{3} - 4\pi r^2 . r^2 = \frac{4\pi}{3} r^4,$$

und ebenso grofs sind T_{yz} und T_{zx}.

Will man auch die halb so grofsen T_x u. s. w. ableiten, so geschieht dies folgendermafsen. Der Querschnitt q giebt in Bezug auf die z-Achse das Trägheitsmoment

$$q x^2 = 2\pi r . z(2r - z) = 4\pi r^2 z - 2\pi r z^2,$$

also ist für die ganze Kugelfläche

$$4\pi r^2 \frac{h^2}{2} - 2\pi r \frac{h^3}{3} = 4\pi r^2 \frac{4r^2}{2} - 2\pi r \frac{8r^3}{3} = \frac{8\pi}{3} r^4$$

$$= T_z = T_x = T_y.$$

§ 180) Kugelkalotte. Selbstverständlich ist hier $T'_p = 2\pi r h . r^2 = 2\pi r^3 h$ in Bezug auf den Kugel-Mittelpunkt, also wird, da der Schwerpunkt der Kalotte von diesem um $e = r - \frac{h}{2}$ entfernt ist, in Bezug auf diesen

$$T_p = 2\pi r^3 h = e^2 F = 2\pi r h - \left(\frac{2r-h}{2}\right)^2 . 2\pi r h$$

$$= \frac{\pi r h^2}{2}(4r - h).$$

Nach der Schichtenmethode ergiebt sich (aus $2\pi r z^2$ für den Querschnitt)

$$T_u = 2\pi r \frac{h^3}{3},$$

also für die horizontale Schwerpunktsebene $\left(\text{in Höhe } \frac{h}{2}\right)$

$$T_{xy} = 2\pi r \frac{h^3}{3} - 2\pi r h . \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{\pi r h^3}{6}.$$

In Bezug auf die Z-Achse folgt aus $qx^2 = 4\pi r^2 z - 2\pi r z^2$

$$T_z = 4\pi r^2 \frac{h^2}{2} - 2\pi r \frac{h^3}{3} = \frac{2\pi}{3} r h^2 (3r - h).$$

Halb so grofs sind

$$T_{zy} = T_{zx} = \frac{\pi}{3} r h^2 (3r - h),$$

so dafs

$$T_x = T_{zx} + T_{xy} = \frac{\pi}{3} 3 r h^2 - \frac{\pi}{3} r h^3 + \frac{\pi r h^3}{6} = \frac{\pi r h^2}{6}(6r - h)$$

und T_y ebenso grofs ist.

($T_{xy} + T_{yz} + T_{zx}$ giebt wie oben $T_p = \frac{\pi r h^2}{2}(4r - h)$; $T_x + T_y + T_z$ giebt $2\,T_p$).

§ 181) Kugelzonenfläche, gegeben durch r, h_2 und h_1. Selstverständlich ist wiederum in Bezug auf den Kugel-

mittelpunkt $T'_p = (2\pi r h) r^2 = 2\pi r^3 h$, wo $h = h_2 - h_1$ ist. Die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte ist

$$r - \frac{h_1 + h_2}{2},$$

also ist für den Schwerpunkt

$$T_p = 2\pi r^3 (h_1 - h_2) - \left(\frac{r - h_1 - h_2}{2}\right)^2 2\pi r (h_1 - h_2),$$

was sich entsprechend vereinfachen läfst.

Die Schichtenmethode giebt (mit Hilfe der Kalottenformel)

$$T_u = \frac{2\pi r}{3} (h_2^3 - h_1^3).$$

Für die horizontale Schwerpunktsebene wird also

$$T_{xy} = \frac{2\pi r}{3} (h_2^3 - h_1^3) - \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)^2 2\pi r (h_2 - h_1)$$

$$= 2\pi r (h_2 - h_1) \left[\frac{h_2^2 + h_2 h_1 + h_1^2}{3} - \frac{h_2^2 + 2 h_2 h_1 + h_1^2}{4}\right]$$

$$= \frac{\pi r (h_2 - h_1)}{6} [h_2^2 - 2 h_2 h_1 + h_1^2] = \frac{\pi r}{6} (h_2 - h_1)^3.$$

Wie oben folgt

$$T_z = \frac{2\pi r}{3} (3 r h_2^2 - h_2^3) - \frac{2\pi r}{3} (3 r h_1^2 - h_1^3)$$

$$= \frac{2\pi r}{3} [3 r (h_2^2 - h_1^2) - (h_2^3 - h_1^3)],$$

wobei sich noch $(h_2 - h_1)$ aus der Klammer ziehen läfst.

Halb so grofs sind T_{zy} und T_{zx}. Also ist auch $T_x = T_y = T_{xy} + T_{zx}$ und endlich auch $T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx}$ bekannt.

§ 182) Körper der Drehungscyklide mit den Radien ϱ und r. Nach des Verfassers Ingenieurmathematik I, § 126 und § 376 ist

$$T_s = 2\varrho r^2 \pi^2 \left(\varrho^2 + \frac{3}{4} r^2\right) = J\left(\varrho^2 + \frac{3}{4} r^2\right) = \frac{J}{4}\left(4\varrho^2 + 3r^2\right),$$

also

$$T_{xs} = T_{ys} = \frac{J}{2}\left(\varrho^2 + \frac{3}{4} r^2\right) = \frac{J}{8}\left(4\varrho^2 + 3r^2\right),$$

$$T_{xy} = \frac{\varrho \pi^2 r^4}{2} = \frac{J}{4} r^2,$$

$$T_x = T_y = T_{xy} + T_{xs} = J\left(\frac{\varrho^2}{2} + \frac{5}{8} r^2\right) = \frac{J}{8}\left(4\varrho^2 + 5r^2\right),$$

$$T_p = T_{xy} + T_{ys} + T_{sx} = J\left(\varrho^2 + r^2\right), \qquad \varrho_m = \sqrt{\varrho^2 + r^2}.$$

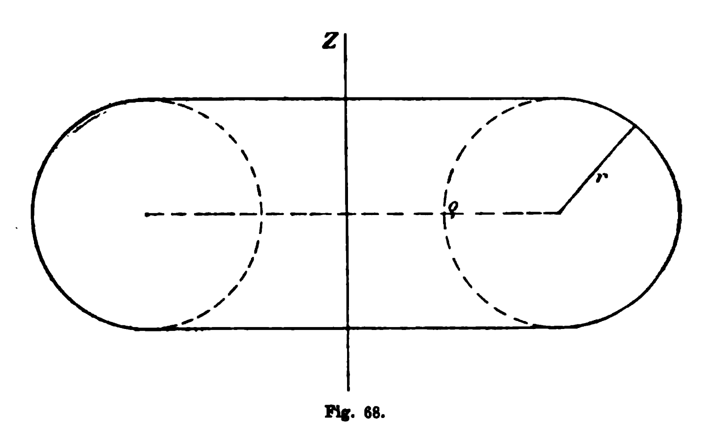


Fig. 68.

§ 183) **Mantelfläche der Drehungscyklide.** Schwieriger ist die Mantelfläche zu erledigen. Für sie soll T_s nach einfacher Methode berechnet und dann die Fläche selbst nach der Schichtenmethode behandelt werden, wobei sich die Guldinsche Flächenformel als richtig ergeben wird. Dann soll das Trägheitsmoment T_{xy} berechnet werden, was ohne eine Reihenbetrachtung nicht zu gehen scheint. Bei der Berechnung von T_s werden sich zwei vereinfachende Sätze ergeben.

Jedes Kreisteilchen s giebt bei der Drehung um die Z-Achse einen Streifen von der Fläche

$$2\pi s\left[\varrho + \sqrt{r^2 - z^2}\right] = 2\pi s\left[\varrho + \xi\right],$$

dessen Trägheitsmoment in Bezug auf diese Drehungsachse gleich

$$2\pi s(\varrho+\xi)(\varrho+\xi)^2 = 2\pi s(\varrho+\xi)^3$$
$$= 2\pi s(\varrho^3+3\varrho^2\xi+3\varrho\xi^2+\varrho^3)$$

ist. Das gesamte Trägheitsmoment ist also

$$T_s = 2\pi\Sigma s(\varrho+\xi)^3$$
$$= 2\pi\varrho^3\Sigma s + 6\pi\varrho^2\Sigma s\xi + 6\pi\varrho\Sigma s\xi^2 + 2\pi\Sigma s\xi^3.$$

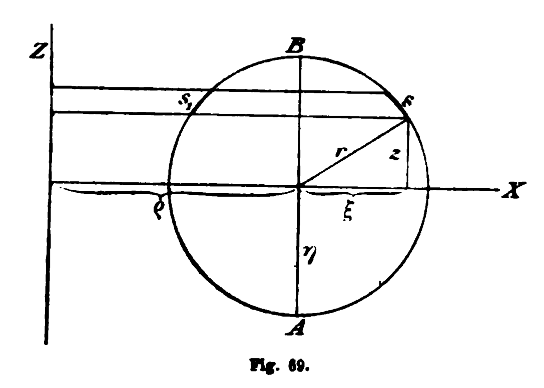


Fig. 69.

Da nun infolge der Symmetrie gegen AB zu jedem Teilchen s ein gleich grofses $s_1 = s$ gehört, welches den Anteil

$$2\pi s(\varrho-\xi)^3 = 2\pi s(\varrho^3-3\varrho^2\xi+3\varrho\xi^2-\xi^3)$$

giebt, so wird $6\pi\varrho^2\Sigma s\xi = 0$ und $2\pi\Sigma s\xi^3 = 0$. (Der erste dieser Ausdrücke Σ war das statische Moment in Bezug auf AB und mufste schon deshalb gleich Null sein. (Dasselbe gilt im Symmetriefalle auch vom Faktor $\Sigma s\xi^3$, dem statischen Momente dritter Ordnung.) Es bleibt also nur stehen

$$T_s = 2\pi\varrho^3\Sigma s + 6\pi\varrho\Sigma s\xi^2,$$

oder, da $\Sigma s = u$ und $\Sigma s\xi^2$ gleich dem Trägheitsmomente t_η in Bezug auf AB oder η ist,

$$T_s = 2\pi\varrho^3 u + 6\pi\varrho t_\eta.$$

Setzt man noch $2\pi\varrho u = F$ (Mantelfläche) und $t_\eta = \varrho_1^2 u$, also $\varrho_1 = \sqrt{\frac{t_\eta}{u}}$ (Trägheitsradius des Umfangs in Bezug auf die Achse AB, also $6\pi\varrho t_\eta = 6\pi\varrho\varrho_1^2 u$), so ist endlich

$$1)\qquad T_s = F(\varrho^2 + 3\varrho_1^2).$$

Diese Formel gilt aber für beliebig gestaltete Guldinsche Drehungsflächen, sobald sie nur eine Symmetrielinie AB haben, die parallel zur Drehungsachse ist.

[Macht man ferner dieselbe Betrachtung für den zu s und s_1 gehörigen Parallelstreif f, so findet man für die entsprechenden Guldinschen Drehungskörper die Formel

$$2)\qquad T_s = J(\varrho^2 + 3\varrho_1'^2),$$

wo ϱ_1' der Trägheitsradius der erzeugenden Fläche in Bezug auf die Symmetrielinie AB ist.]

Für die Cyklide ist in Gleichung 1) zu setzen

$$\varrho_1^2 = \frac{t_\eta}{u} = \frac{\pi r^3}{2\pi r} = \frac{r^2}{2}, \qquad F = 2\pi\varrho u = 4\pi^2\varrho r,$$

also wird

$$3)\qquad T_s = 4\pi^2\varrho r\left(\varrho^2 + \frac{3r^2}{2}\right) = 2\pi^2\varrho r(2\varrho^2 + 3r^2).$$

Daher ist

$$T_{xs} = T_{ys} = \pi^2\varrho r(2\varrho^2 + 3r^2).$$

Um T_{xy} zu berechnen, hat man jeden Flächenstreif $2\pi s(\varrho + \xi)$ mit y^2 zu multiplizieren, so dafs es sich handelt um

$$T_{xy} = 2\pi\Sigma s(\varrho + \xi)y^2 = 2\pi\varrho\Sigma s y^2 + 2\pi\varrho\Sigma s\xi y^2.$$

Hier fällt, wie vorher, die mit ξ behaftete Summe aus Symmetriegründen fort, und so bleibt stehen

$$T_{xy} = 2\pi\varrho\Sigma s y^2 = 2\pi\varrho t_x,$$

wo t_x das Trägheitsmoment des Umfangs in Bezug auf die X-Achse ist. Nun ist aber $t_x = r^3\pi$, also wird

$$T_{xy} = 2\pi\varrho t_x = 2\pi^2\varrho r^3.$$

Nun wird

$$T_y = T_x = T_{xy} + T_{xz} = 2\pi^2 \varrho r^3 + \pi^2 \varrho r (2\varrho^2 + 3r^2)$$
$$= \pi^2 \varrho r (2\varrho^2 + 5r^2)$$

und

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = 2\pi^2 \varrho r^3 + 2\pi^2 \varrho r (2\varrho^2 + 3r^2)$$
$$= 4\pi^2 \varrho r (\varrho^2 + 2r^2).$$

Das Beispiel ist eins der lehrreichsten für mechanische Anwendungen.

Wie schon angedeutet, gelten die wesentlichen Resultate und die Methode überhaupt für Guldinsche Flächen bezw. Körper, deren erzeugende Fläche eine zur Drehungsachse parallele Symmetrielinie hat. Deshalb soll das Ganze für solche im Zusammenhange noch einmal dargestellt werden.

§ 184) Guldinsche Körper, deren erzeugende Fläche eine Symmetrieachse CD parallel zur Drehungsachse hat. Als Figur kann die der Drehungscyklide benutzt werden. Jedes Flächenteilchen f hat von der Z-Achse einen Abstand $\varrho + \xi$, wobei ξ von der Symmetrielinie aus gemessen wird. Dreht es sich um die Z-Ebene, so hat der entstehende Ringkörper den Inhalt $2\pi(\varrho + \xi)f$, und sein Trägheitsmoment in Bezug auf die XY-Ebene ist

$$2\pi(\varrho + \xi) f y^2 = 2\pi \varrho f y^2 + 2\pi \xi f y^2.$$

Der Gesamtkörper hat also das Moment

$$T_{xy} = 2\pi \varrho \Sigma f y^2 + 2\pi \Sigma \xi f y^2.$$

Nun gehört aber der Symmetrie wegen zu jedem $2\pi \xi f y^2$ ein Element $-2\pi \xi f y^2$, die zweite Summe ist also gleich Null. So bleibt nur stehen

$$T_{xy} = 2\pi \varrho \Sigma f y^2 = 2\pi \varrho t_{xy},$$

wenn man mit t_{xy} das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die XY-Ebene (oder x-Achse) versteht.

Ferner ist nach § 183 $T_z = J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2)$, wo J und ϱ die angegebene Bedeutung haben. Daraus folgt

$$T_{xz} + T_{zx} = \frac{1}{2} J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2),$$

$$T_x = T_y = T_{xz} + T_{yz} = \frac{1}{2} J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2) + 2\pi\varrho\, t_{xy}$$
$$= 2\pi\varrho \left[\frac{F}{2}(\varrho^2 + \varrho_1^2) + t_{xy}\right],$$
$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2) + 2\pi\varrho\, t_{xy}$$
$$= 2\pi\varrho\,[F(\varrho^2 + \varrho_1^2) + t_{xy}].$$

§ 185) Mantelfläche solcher Körper. Jedes Randteilchen s giebt bei der Drehung eine Fläche $2\pi(\varrho + \xi)s$, welche in Bezug auf die XY-Ebene das Trägheitsmoment

$$2\pi(\varrho + \xi)sy^2 = 2\pi\varrho s y^2 + 2\pi\xi s y^2$$

hat, so dafs das gesamte Trägheitsmoment wird

$$T'_{xy} = 2\pi\varrho\, \Sigma s y^2 + 2\pi\, \Sigma \xi s y^2.$$

Da zu jedem Randelemente $2\pi\xi s y^2$ ein symmetrisches $-2\pi\xi s y^2$ gehört, wird die letztere Summe gleich Null, also bleibt nur stehen

$$T'_{xy} = 2\pi\varrho\, \Sigma s y^2 = 2\pi\varrho\, t'_{xy},$$

wo t'_{xy} das Trägheitsmoment der Umrandung in Bezug auf die XY-Ebene (oder x-Achse) bedeutet. Ferner ist nach § 183

$$T'_z = F(\varrho^2 + 3\varrho_1^2),$$

wo F die Mantelfläche des Körpers, ϱ_1 Trägheitsradius der Umrandung in Bezug auf die Symmetrielinie bedeutet. Jetzt ist wieder

$$\frac{1}{2} T'_z = T'_{xz} = T'_{yz}, \quad T'_x = T'_{xz} + T'_{xy}, \quad T'_p = T'_{xy} + T'_{yz} + T'_{zx}.$$

§ 186) Als hierher gehörige Beispiele, bei denen die Körper und die Mantelflächen behandelt werden können, seien unter Voraussetzung geeigneter Stellung genannt, Ringkörper, deren erzeugende Fläche durch regelmäfsige Vielecke, durch zwei konzentrische Kreise, durch zwei excentrische Kreise einer Schar, durch zwei Kreise eines Büschels, durch ein symmetrisches Parabelsegment, durch ein Segment der Kettenlinie, durch cardioidische Kurven u. dergl. begrenzt wird.

Auch Kantenkomplexe und die Eckpunkte symmetrischer Körper gehören hierher.

Sollen nur die Körper behandelt werden, so können z. B. auch symmetrische Hyperbelsegmente, symmetrische Ellipsensegmente, ganze Ellipsen und konzentrische Ellipsen u. dergl. herangezogen werden.

§ 187) Das Trägheitsmoment T_s eines körperlichen Schraubengewindes in Bezug auf die Drehungsachse ist gleich dem des dem Gewinde entsprechenden Guldinschen Drehungskörpers. Auch das Trägheitsmoment eines Umgangs in Bezug auf jede Normalebene zur Achse kann berechnet werden. Die entsprechenden Normalschnitte sind nämlich flächengleich, und jeder hat in Bezug auf eine Ebene XY das Trägheitsmoment Fz^2, so dafs es sich von der XY-Ebene aus um

$$\sum_0^{y_1} Fz^2 = F\sum_0^{y_1} z^2 = F\frac{z_1^3}{3}$$

handelt. Es ist also auch

$$T_{sx} = T_{sy} = \frac{1}{2}\,T_s$$

bekannt, ebenso

$$T_x = T_{xy} + T_{sx} \text{ und } T_p = T_{xy} + T_{ys} + T_{sx}.$$

Auf die Flächen des Gewindes ist aber die Methode nicht anwendbar.

Von Interesse sind dabei diejenigen Gewindeflächen, bei denen es sich um symmetrische Flächen nach Art der oben behandelten handelt. Ein Übungsbeispiel soll gegeben werden, welches den verallgemeinerten Schraubenröhrenflächen angehört.

§ 188) Eine verallgemeinerte Schraubenröhrenfläche habe als (senkrechtes) Hauptschnittprofil einen Kreis. Die Trägheitsmomente des Körpers sollen für einen Umgang untersucht werden.

Für einen Umgang ist der Inhalt $J = 2\pi\varrho\,(r^2\pi) = 2\pi^2\varrho r^2$, denn er ist gleich dem der entsprechenden

Cyklide. Reicht das Gewinde von der Ebene XY aus bis zur Ganghöhe h, d. h. ist es durch Horizontalschnitte begrenzt, so ist jede horizontale Schnittfläche

$$F_1 = \frac{J}{h} = \frac{2\pi^2 \varrho r^2}{h}.$$

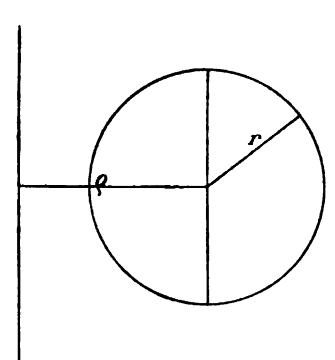


Fig. 70.

Das Trägheitsmoment der Kreisfläche in Bezug auf die senkrechte Gerade ist gleich $\frac{\pi r^4}{4}$, also der Trägheitsradius

$$\varrho_1 = \frac{\pi r^4}{4} \cdot \frac{1}{\pi r^2} = \frac{r^2}{4}.$$

Demnach ist, wie bei der Cyklide

$$1) \qquad T_z = J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2)$$
$$= 2\pi^2 \varrho r^2 \left(\varrho^2 + \frac{3r^2}{4}\right).$$

Dagegen ist

$$T_{xy} = \frac{2\pi^2 \varrho r^2}{h} \sum_0^h z^2 = \frac{2\pi^2 \varrho r^2}{h} \cdot \frac{z_1^3}{3} = \frac{2\pi \varrho r^2}{h} \frac{h^3}{3},$$

oder

$$2) \qquad T_{xy} = \frac{2\pi \varrho r^2 h^2}{3}.$$

Wiederum ist

$$T_{xz} = T_{yz} = \tfrac{1}{2} T_z, \qquad T_x = T_{xy} + T_{xz} = T_y,$$
$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx}.$$

Selbstverständlich kann Formel 2) auch auf den in der Höhe $\frac{h}{2}$ liegenden Schwerpunkt bezogen werden, der in der Achse liegt. Für ihn ist

$$3) \qquad T'_y = T_{xy} - \frac{h^2}{4} F = \frac{2\pi^2 \varrho r^2}{h} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4}\right)$$
$$= \frac{2\pi^2 \varrho r^2}{h} \frac{h^3}{12} = \frac{\pi^2 \varrho r^2 h^2}{6}.$$

§ 189) Damit mögen die ausgeführten Beispiele vorläufig abgeschlossen sein. Die von Kegelschnittsflächen begrenzten Flächen werden unten behandelt. Hinsichtlich der mechanischen, technischen und kosmischen Übungsbeispiele, sei auf Ingenieurmathematik Bd. I hingewiesen. Dort werden unter anderem folgende Beispiele behandelt: Theorie der Atwood'schen Fallmaschine unter Berücksichtigung der Trägheitsmomente. Ein Cylinder, um den zwei Fäden gewickelt sind, die festgehalten werden, rollt sich infolge der Schwerkraft von diesen ab; der verlangsamte Fall ist zu untersuchen, ebenso die Fadenspannung. Der Cylinder rollt sich von den Fäden ab, indem er sich auf schiefer Ebenen abwärtsbewegt. Die Fadenspannung giebt Grenzwerte für die gleitende Reibung an und zeigt, von wo ab der freie Cylinder auf schiefer Ebene gleitet und zugleich rollt. Der Cylinder rolle unter Achsenlagerung auf zwei parallelen schiefen Ebenen ab. Er werde durch eine Zugkraft auf der Ebene vorwärts getrieben, es wird untersucht, wann Rollen und Gleiten zugleich stattfindet. Entsprechende Aufgaben werden für beliebig gestaltete Körper, z. B. auch für die Kugel untersucht. An einem über eine Rolle gelegten Faden hänge ein Gewicht und ein abrollender Cylinder der besprochenen Art; alle Bewegungen werden untersucht.

Berechnung der Bewegungsenergie des Erdballes $E = m\frac{v^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2}$, das Problem der Verlangsamung der Erddrehung seit Hipparch. Welchen Einfluſs übt ein auf die Erde aufschlagendes Meteor auf die Erddrehung aus. Ein numerisches Beispiel wird durchgeführt, auch die für den Anfang der Bewegung bestehende freiwillig ruhende „Drehungsachse" untersucht. Zunahme der Erddrehung bei Zusammenziehung des Radius durch Abkühlung. Der Abplattungskoeffizient nimmt dabei ab, nimmt aber nicht zu, womit die Abschleuderungstheorie (Kant-Laplace) widerlegt ist. Die Schwungradstheorie wird ausführlich behandelt im Zusammenhang mit der Kurbelbewegung. Hierher gehört noch die Theorie der Schwingungen für Hebelwagen und anderer physischer Pendel.

Alle genannten Übungsbeispiele mechanischer Art führen auf einfache Resultate und können auf sämtliche hier

behandelten Gebilde der ebenen und räumlichen Geometrie ausgedehnt werden, so dafs z. B. auch für die analytische Mechanik eine Überfülle von Übungsbeispielen mit einfach gestalteten Resultaten vorliegt, z. B. auch für die Kreiseltheorie im Sinne von Poinsot, Klein und Sommerfeld.

§ 190) Bemerkung. Wie es in der Ebene für Punktsysteme, Systeme von Linien und für Flächen und Flächensysteme in Bezug auf jeden Punkt zwei Trägheitsellipsen giebt, die von Poinsot und die von Clebsch-Culmann, die für den Fall, dafs es sich um den Schwerpunkt handelt, zu Centralellipsen werden, so giebt es im Raume für jedes Punktsystem, Liniensystem, Flächensystem, Körpersystem in Bezug auf jeden Punkt zwei Trägheitsellipsoide, das von Poinsot und das von Clebsch-Culmann, die für den Fall, dafs der Bezugspunkt der Schwerpunkt ist, zu Centralellipsoiden werden.

Da erst der folgende Abschnitt sich mit den zu den Kegelschnittsflächen (Flächen zweiten Grades) gehörigen Körpern beschäftigen soll, sollen diese Ellipsoide erst später zur Behandlung kommen.

c) Einige Methoden für angenäherte Berechnung, besonders die erweiterte Simpsonsche Regel.

§ 191) Wo die elementaren Hilfsmittel (oder auch die der Differential- und Integralrechnung*) versagen, mufs man zu Annäherungsmethoden greifen, die entweder in der Benutzung von konvergenten Reihen bestehen, deren Glieder einzeln behandelt werden können, oder in gewissen Annäherungsformeln. Unter den letzteren sind folgende die gebräuchlichsten: a) Die Formel für das arithmetische Mittel der Querschnitte. Bei dieser berechnet man die

*) Man bedenke, dafs im allgemeinen schon die Theorie der elliptischen Integrale nötig wird, sobald unter der Quadratwurzel rationale Ausdrücke höheren als zweiten Grades vorkommen, dafs man bei höheren Wurzeln aus rationalen Ausdrücken höheren Grades zu Reihenentwickelungen seine Zuflucht nehmen mufs, bei denen die Summierungen nicht auf geschlossene Ausdrücke führen, so dafs nur angenäherte Resultate erzielt werden können.

Flächen von n (horizontalen) Querschnitten, die in gleichen Abständen auf einander folgen. Von diesen Querschnitten sucht man das arithmetische Mittel und multipliziert dieses mit der Höhe. b) Eine gröfsere Genauigkeit erhält man dadurch, dafs man berücksichtigt, dafs jeder Querschnitt zu zwei Schichten gehört, die beiden Grenzquerschnitte aber nur zu einer Schicht. Sind die beiden letzteren F_0 und F_n, die übrigen $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ die zugehörigen Höhen $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}, y_n$, so folgt als Inhalt

$$J = \frac{y_n - y_0}{2n}[F_0 + F_n + 2(F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-1})].$$

Diese Formel kann man als die des verbesserten arithmetischen Mittels bezeichnen.

c) Die erweiterte Simpsonsche Regel, die bei derselben Anzahl der Querschnitte noch genauere Resultate giebt und sehr gebräuchlich ist.

Man berechne eine ungerade Anzahl von Querschnitten, z. B. $(2n+1)$, so dafs man eine gerade Anzahl von Schichten, z. B. $2n$ Schichten erhält, was n Doppelschichten giebt. Auf jede Doppelschicht wende man die einfache Simpsonsche Regel an. Ist z. B. $\frac{h}{n}$ die Höhe der untersten Doppelschicht, so ist für diese der Inhalt

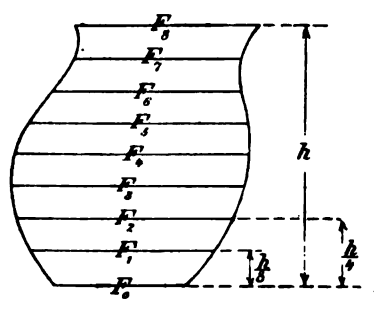


Fig. 71.

$$J_1 = \frac{h}{6n}[F_0 + 4F_1 + F_2],$$

für die folgende ebenso

$$J_2 = \frac{h}{6n}[F_2 + 4F_3 + F_4],$$

für die letzte

$$J_n = \frac{h}{6n}[F_{2n-2} + 4F_{2n-1} + F_{2n}].$$

Der Gesamtinhalt wird demnach

$$J = \frac{h}{6n}[F_0 + F_{2n} + 2(F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n-2}) \\ + 4(F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1})].$$

Dabei ist berücksichtigt, dafs die Glieder F_0 und F_{2n} nur einmal vorkommen, die übrigen Glieder mit geradzahligem Index zweimal, die mit ungeradzahligem Index je viermal.

§ 192) Handelt es sich statt um einen Körper um eine ebene Fläche, so erkennt man leicht, warum die Genauigkeit eine gröfsere sein mufs. Die unter b) angegebene Formel giebt nämlich dann im allgemeinen nur in dem Falle ein genaues Resultat, wenn jede Schicht ein geradlinig begrenztes Trapez ist. Die Simpsonsche Regel aber giebt für jede Doppelschicht dann genaue Resultate, wenn die zugehörige Begrenzung von der Form $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ ist, was eine ganze Reihe von Parabeln gemischter Ordnung bis zum dritten Grade giebt, welche die geradlinigen Begrenzungen als besonderen Fall enthält. Durch je drei Grenzpunkte lassen sich nämlich unendlich viele Parabeln dritter Ordnung legen (vergl. die elementar zu behandelnde Interpolationsformel von Lagrange).*) Man hat also eine Auswahl unter beliebig vielen Kurven, von denen sich irgend eine der wirklichen Grenzkurve am genauesten anschmiegen wird. (Durch zwei Punkte läfst sich nur eine Gerade legen, dafür aber unendlich viele Parabeln zweiter Ordnung. Durch drei Punkte lassen sich unendlich viele Parabeln dritter Ordnung, nur eine Parabel zweiter Ordnung, selbstverständlich auch zwei aufeinander folgende Gerade legen.) Für Körper gilt entsprechendes auf Grund von Analogie-Schlüssen oder strengerer Untersuchung.

§ 193) Geeignete Beispiele geben die durch Umdrehung der Parabeln höherer als dritter Ordnung entstehenden Drehungskörper, die nach der Schichtenformel genau berechnet werden können, so dafs man bei der Vergleichung der Resultate der unter a), b) und c) angegebenen Be-

*) Vergl. z. B. Band III des „Methodischen Lehrbuchs" des Verfassers, Seite 123.

rechnungsmethoden z. B. für acht Schichten das Mafs der Annäherung leicht beurteilen kann. Ebenso geeignet sind die durch Umdrehung der logarithmischen Linien, der Kettenlinien, der cyklischen Kurven, der Kegelschnitte (um bequem oder unbequem liegende Achsen) entstehenden Drehungskörper, von denen viele mit Hilfe der entsprechenden Reihen und der Anwendung der Schichtenmethode auf diese auch genau berechnet werden können.

Dafs nicht nur Körperinhalte, sondern auch Inhalte gewisser gekrümmter Flächen und Momente verschiedener Ordnung (z. B. Planmomente erster und zweiter Ordnung, Axialmomente erster und zweiter Ordnung, Polarmomente erster und zweiter Ordnung, Centrifugalmomente) für solche Gebilde mit Hilfe der drei Formeln angenähert berechnet werden können, ist nach den obigen Beispielen von selbst klar.

Man versuche aus dem bereits Gegebenen geeignete Übungsbeispiele ausfindig zu machen. — Hier soll nicht näher auf den Gegenstand eingegangen werden.

Zweiter Abschnitt.

Anwendungen der bisherigen Berechnungsmethoden auf die Kegelschnittsflächen (Flächen zweiten Grades) und auf die mit ihnen zusammenhängenden Körper.

α) Das Ellipsoid, sein Inhalt und seine Hauptmomente.

§ 194) Inhaltsberechnung aus den Hauptachsen nach Cavalieri oder auf Grund der Affinität. Die Inhalte des Würfels mit der Kante a und der Kugel mit Radius a verhalten sich wie $a^3 : \frac{4}{3} a^3 \pi$ oder wie $1 : \frac{4}{3} \pi$. „Erweitert" man den Würfel in der Richtung der einen Gruppe von Horizontalkanten mit Hilfe eines konstanten Faktors $\frac{b}{a}$, in der Richtung der senkrechten Kanten mit Hilfe des Faktors $\frac{c}{a}$, so geht er über in einen Rechteckskörper mit den Kanten a, b, c. Macht man dasselbe bei der Kugel, so geht sie über in ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c. Die Inhalte beider Körper behalten dabei ihr Verhältnis bei, also wird der des Ellipsoids das $\frac{4}{3} \pi$ fache von dem des Rechteckskörpers, d. h. es ist

$$J = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Statt vom Würfel auszugehen, kann man im Anschlufs an Bd. II, § 413 und 415 den Cylinder zum Ausgangspunkte machen.

§ 195) Inhaltsberechnung aus drei konjugierten Halbachsen und ihren Richtungen nach denselben Methoden. Man verwandle den obigen Rechteckskörper durch Cavalierische Verschiebung zunächst in ein senkrechtes Parallelflach mit den Grundkanten a und $b_1 = \frac{b}{\sin\beta_1}$, wobei β_1 der Winkel ist, den a und b_1 mit einander bilden, also in ein Prisma mit derselben Grundfläche $G = ab_1 \sin\beta_1 = ab$; darauf dieses durch Horizontalverschiebung (nach sonst beliebiger Richtung) in ein schiefes Prisma von derselben Höhe c und der Seitenkante $c_1 = \frac{c}{\sin\gamma_1}$, also von demselben Inhalte $J = Gc = a b_1 \sin\beta_1 \,.\, c_1 \sin\gamma_1 = abc$ (wobei γ_1 der Winkel ist, den c_1 mit der Grundfläche bildet). Macht man dieselben Verschiebungen am Ellipsoid, so nehmen dessen Halbachsen a, b, c dieselben Längen a, b_1, c_1 an, auch erhalten sie dieselben Richtungen, und zwar werden diese zu konjugierten Richtungen Das Inhaltsverhältnis für beide Körper aber bleibt dasselbe, wie vorher. Folglich (wenn man noch a_1 statt a schreibt):

Der Inhalt eines Ellipsoids mit den konjugierten Halbachsen a_1, b_1, c_1 ist das $\frac{4}{3}\pi$fache vom Inhalte des Parallelflachs aus Kanten, die nach Länge und Richtung dieselben sind.

Für den Inhalt eines solchen Parallelflachs sind aber die Formeln in Bd. II, §§ 302 und 305 angegeben, also ist die Aufgabe für das Ellipsoid allgemein gelöst.

Hat das Parallelflach die Kanten a_1, b_1, c_1 und bildet a_1 mit b_1 den Winkel β_1, c_1 dagegen mit der von a_1 und b_1 gebildeten Ebene den Winkel γ_1, so hat das Prisma nach obigem den Inhalt $J_1 = a_1 b_1 c_1 \sin\beta_1, \sin\gamma_1$, das Ellipsoid mit den gleich langen und gleich gerichteten Achsen also den Inhalt

$$1)\qquad J = \frac{4}{3}\pi\, a_1 b_1 c_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1 .$$

Die Richtungen der Achsen können aber auch anders gegeben sein. Bildet a_1 mit b_1 den Winkel C, b_1 mit c_1 den Winkel A, c_1 mit a_1 den Winkel B, und setzt man $\frac{A+B+C}{2}=s$, so ist der Inhalt des Parallelflachs (nach Bd. II, § 302)

$$J_1 = 2\,a_1 b_1 c_1 \sqrt{\sin s \sin(s-A)\sin(s-B)\sin(s-C)}$$
$$= 2\,a_1 b_1 c_1\,\mathfrak{A},$$

wo $\mathfrak{A}$ die Amplitude der Ecke bedeutet. Demnach ist der Inhalt des Ellipsoids auch

$$2)\quad J = \frac{8}{3}\pi a_1 b_1 c_1 \sqrt{\sin s \sin(s-A)\sin(s-B)\sin(s-C)}$$
$$= \frac{8}{3}\pi a_1 b_1 c_1\,\mathfrak{A}.$$

Diese Formel hat vor der vorigen den Vorzug, symmetrisch zu sein.

Sind die Winkel α, β, γ der Ecke gegeben, die also von den Ebenen (Seiten) längs der Kanten a_1, b_1, c_1 gebildet werden, und setzt man $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\sigma$, so ist der Inhalt des Parallelflachs (nach Bd. II, § 305)

$$J_1 = \frac{4\,a_1 b_1 c_1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\cdot[-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)]$$
$$= \frac{4\,a_1 b_1 c_1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\,\mathfrak{A}'^2,$$

wobei $\mathfrak{A}'$ die Koamplitude der Ecke bedeutet. Das Ellipsoid hat also dann den Inhalt

$$3)\quad J = \frac{16}{3}\pi a_1 b_1 c_1 \frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$
$$= \frac{16}{3}\pi a_1 b_1 c_1 \frac{\mathfrak{A}'^2}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

Bemerkung. Konjugierte Durchmesser und konjugierte Mittelpunktsschnitte des Ellipsoids erhält man fogendermafsen: Ein erster Mittelpunktsschnitt giebt eine Ellipse, die ihm

parallelen Tangentialebenen geben durch die Berührungspunkte den zugehörigen Durchmesser. Ein zweiter beliebig durch den letzteren gelegter Mittelpunktsschnitt giebt eine zweite Ellipse, die ihm parallelen Tangentialebenen durch die Berührungspunkte einen zweiten zugehörigen Durchmesser. Durch die beiden Durchmesser wird die Ebene des dritten Schnittes bestimmt, zu dem wieder ein Durchmesser gehört. (Weil dies für die Kugel gilt, gilt es durch Affinität für das Ellipsoid.) So erhält man drei konjugierte Mittelpunktsschnitte und zugleich drei konjugierte Durchmesser. — Wird dem Parallelflach ein Ellipsoid einbeschrieben, welches die sechs Ebenen in den Mittelpunkten berührt, so sind diese Ebenen konjugierte Ebenen. Man kann also auch vom Würfel mit der einbeschriebenen Kugel ausgehen und auf dieses Gebilde eine allgemeine Affinitätstransformation anwenden.

§ 196) Die Aufgabe des § 194 mit Hilfe der Schichtenformel zu lösen. Die Kugel mit dem Radius a hat im senkrechten Abstande z_1 vom Mittelpunkte die horizontale Querschnittsfläche $q_1 = \pi x^2 = \pi(a^2 - z_1^2)$; das durch die horizontale „Erweiterung" mit Hilfe des Faktors $\frac{b}{a}$ entstehende Drehungsellipsoid hat dort einen elliptischen Horizontalschnitt von der Fläche $q_2 = \pi(a^2 - z_1^2)\frac{b}{a}$. Erweitert man den neuen Körper in senkrechter Richtung mittels des Faktors $\frac{c}{a}$, so hat man den Querschnitt q_2 erst in der Höhe $z = z_1 \frac{c}{a}$. In der Höhe z also hat das Ellipsoid den Querschnitt

$$1)\quad q_z = \pi(a^2 - z_1^2)\frac{b}{a} = \pi\left(a^2 - z^2\frac{a^2}{c^2}\right)\frac{b}{a} = \pi ab - \pi\frac{ab}{c^2}z^2.$$

Nach der Methode der Schichtenformel erhält die Parallelschicht von $z = 0$ bis z den Inhalt

$$2)\quad \overset{z}{\underset{0}{J}} = \pi ab\frac{z}{1} - \pi\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{z^3}{3} = \pi abz\left(1 - \frac{z^2}{3c^2}\right)$$
$$= \frac{\pi abz(3c^2 - z^2)}{3c^2}.$$

(Damit ist also ein gewisser Zonenkörper bestimmt, was später benutzt werden soll.) Setzt man $z = c$, so erhält man das Halbellipsoid mit dem Inhalte

3) $$\overset{c}{\underset{0}{J}} = \pi\, abc\left(1 - \frac{c^2}{3c^2}\right) = \frac{2}{3}\pi\, abc.$$

Der Inhalt des ganzen Ellipsoids ist also, wie vorher

$$J = \frac{4}{3}\pi\, abc.$$

§ 197) Dieselbe Aufgabe mit Hilfe der Simpsonschen Regel zu lösen. Nach § 196 Gleichung 1) ist der Querschnitt $q_z = \pi\, ab - \pi\frac{ab}{c^2}z^2$ in Bezug auf z vom zweiten Grade. Er gehört also zum Geltungsbereiche der Simpsonschen Regel. [Man weifs dies auch ohne besondere Berechnung, denn durch die Cavalierischen Erweiterungen wird der Grad der Querschnittsformeln nicht geändert. Bei der Kugel handelt es sich um $q_1 = \pi(a^2 - z_1^2)$.] Die Höhe des ganzen Ellipsoids ist $h = 2c$. Der Unterschnitt U hat den Wert Null, der Oberschnitt O ebenfalls. Der Mittelschnitt ist $M = \pi\, ab$. Der Inhalt wird also

$$J = \frac{h}{6}(U + O + 4M) = \frac{2c}{6}(0 + 0 + 4\pi\, ab) = \frac{4}{3}\pi\, abc.$$

Bemerkung. Ganz ebenso folgt mit Hilfe dieser Regel der in § 195 über das Parallelflach und das zugehörige Ellipsoid ausgesprochene allgemeine Satz.

§ 198) Berechnung mit Hilfe der analytischen Geometrie. Die Gleichung des senkrechten durch a und c gelegten Schnittes ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, die halbe Querlinie in der Höhe z ist also

1) $$x = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - z^2}.$$

Die Gleichung des durch b und c gelegten Schnittes ist $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, also ist die halbe Querlinie in der Höhe z

2) $$y = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - z^2}.$$

Der Inhalt des elliptischen Horizontalschnitts in der betreffenden Höhe ist demnach

$$3)\quad q_z = \pi x y = \pi \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - z^2} \cdot \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - z^2} = \frac{\pi a b}{c^2}(c^2 - z^2)$$

$$= \pi a b - \pi \frac{a b}{c^2} z^2.$$

Daraus folgt nach der Schichtenformel ebenso, wie aus Gleichung 1) des § 196 der Inhalt

$$J = \frac{4}{3} \pi a b c.$$

Bemerkung. Der Leser versuche ebenso mit Hilfe der analytischen Geometrie den Inhalt aus den konjugierten Achsen a_1, b_1, c_1 und ihren Richtungen zu berechnen.

§ 199) Schwerpunkte von Halbellipsoiden und statische Momente der letzteren. Die Halbkugel hat in Bezug auf die ebene Grundfläche den Schwerpunktsabstand $\frac{3}{8} r$. Das halbe Ellipsoid, von der Ebene (a, b) begrenzt, hat den Schwerpunkt im Abstande $\frac{3}{8} c$ von dieser; von der Ebene (b, c) begrenzt, im Abstande $\frac{3}{8} a$ von dieser; von der Ebene (c, a) begrenzt, im Abstande $\frac{3}{8} b$ von dieser. Auch die konjugierten Mittelpunktsschnitte geben halbe Ellipsoide, die jedoch schräg über den Schnitten stehen. Der Schwerpunkt des durch die Ebene (a_1, b_1) begrenzten Halbellipsoid hat den Schwerpunkt auf dem dritten konjugierten Halbmesser c_1 an der Stelle, die von ihm $\frac{3}{8} c_1$ abschneidet. Ähnlich ist es mit den anderen Ebenen. Bildet c_1 mit der Ebene (a_1, b_1) den Winkel γ_1, so ist der Abstand des Schwerpunktes von dieser $h_s = \frac{3}{8} c_1 \sin \gamma_1$, das statische Moment des halben Ellipsoids in Bezug auf diese Ebene also

$$M = h_s J = \frac{3}{8} c_1 \sin\gamma_1 \cdot \frac{2}{3} a_1 b_1 c_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1$$

$$= \frac{1}{4} a_1 b_1 c_1^2 \sin\beta_1 \sin^2\gamma_1,$$

wobei β_1 der Winkel zwischen a_1 und b_1 ist. Sind die Achsen a, b, c gegeben und $\beta_1 = \gamma_1 = 90^0$, so ist das betreffende Moment $M = \frac{1}{4} a b c^2$.

§ 200) Statisches Moment und Schwerpunkt des von $z = 0$ bis z reichenden Zonenkörpers. Nach § 196 war der Querschnitt im senkrechten Abstande z von der horizontalen Mittelpunktsebene $q_z = \pi a b - \pi \frac{ab}{c^2} z^2$. Das statische Moment dieses Querschnitts in Bezug auf die genannte Ebene ist also

$$q_z' = \left(\pi a b - \pi \frac{ab}{c^2} z^2\right) z = \pi a b z - \frac{\pi a b z^3}{c^2}.$$

Nach der Schichtenformel ist das statische Moment des Zonenkörpers von $z = 0$ bis z in Bezug auf die Mittelpunktsebene

1) $$\overset{z}{\underset{0}{M}} = \pi a b \frac{z^2}{2} - \frac{\pi a b}{c^2} \frac{z^4}{4} = \pi a b z^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4 c^2}\right).$$

[Für $z = c$ bestätigt sich die Schlufsformel des § 199.]

Aus $h_z \overset{z}{\underset{0}{J}} = \overset{z}{\underset{0}{M}}$ folgt nun als Schwerpunktsabstand der Parallelschicht von der Mittelpunktsebene

$$h_z = \frac{\overset{z}{\underset{0}{M}}}{\overset{z}{\underset{0}{J}}} = \frac{\dfrac{\pi a b z^2 (2 c^2 - z^2)}{4 c^2}}{\dfrac{\pi a b z (3 c^2 - z^2)}{3 c^2}} = \frac{3}{4} z \frac{2 c^2 - z^2}{3 c^2 - z^2}$$

Dem Leser sei es überlassen, das Betreffende für den Fall der konjugierten Halbachsen abzuleiten.

§ 201) Das Planmoment zweiter Ordnung (Trägheitsmoment) des dreiachsigen Halbellipsoids und seiner Parallelschicht von 0 bis z in Bezug auf

seine Grundfläche. Der Querschnitt $q_z = \pi ab - \pi \frac{ab}{c^2} z^2$ hat in Bezug auf diese Grundfläche das Trägheitsmoment

$$q''_z = \pi\, ab\, z^2 - \pi \frac{ab}{c^2} z^4;$$

Demnach handelt es sich von $z = 0$ bis z um das Trägheitsmoment

$$1)\quad \overset{z}{\underset{0}{T}} = \pi\, ab \frac{z^3}{3} - \pi \frac{ab}{c^2} \frac{z^5}{5} = \frac{\pi\, ab\, z^3 (5c^2 - 3z^2)}{15 c^2}$$

$$= \overset{z}{\underset{0}{J}} \frac{z^2}{5} \cdot \frac{5c^2 - 3z^2}{3c^2 - z^2}.$$

Dies ist das Trägheitsmoment der Parallelschicht von 0 bis z in Bezug auf die horizontale Mittelpunktsebene.

Setzt man $z = c$, so wird für das Halbellipsoid das betreffende Trägheitsmoment

$$2)\quad \overset{c}{\underset{0}{T}} = \frac{2}{15} \pi\, abc^3 = \overset{c}{\underset{0}{J}} \frac{c^2}{5},$$

für das ganze Ellipsoid in Bezug auf die horizontale Mittelpunktsebene wird das Trägheitsmoment

$$3)\quad \overset{c}{\underset{-c}{T}} = \frac{4}{15} \pi\, ab\, c^3 = \overset{c}{\underset{-c}{J}} \frac{c^2}{5}.$$

Entsprechendes gilt hinsichtlich der anderen Achsen.

Der „Trägheitsabstand" für die Parallelschicht ist nach 1)

$$1^*)\quad z_t = \sqrt{\frac{\overset{z}{\underset{0}{T}}}{\overset{z}{\underset{0}{J}}}} = \sqrt{\frac{z^2}{5} \cdot \frac{5c^2 - 3z^2}{3c^2 - z^2}},$$

für das Halbellipsoid nach Gleichung 2)

$$2^*)\quad z_t = \sqrt{\frac{\overset{c}{\underset{0}{T}}}{\overset{c}{\underset{0}{J}}}} = \sqrt{\frac{c^2}{5}} = c\sqrt{\frac{1}{5}}.$$

Der Leser versuche diese Resultate aus denen für die Kugel durch Affinität abzuleiten.

§ 202) **Entsprechende Axialmomente.** Die Summe von zwei Planmomenten zweiter Ordnung in Bezug auf Ebenen, die einander rechtwinklig schneiden, giebt das Axialmoment zweiter Ordnung in Bezug auf die Schnittlinie als Achse. Das Ellipsoid hatte in Bezug auf die Ebene (a, b) das Planmoment zweiter Ordnung $T = J\frac{c^2}{5}$, also in Bezug auf die Ebene (a, c) das Planmoment zweiter Ordnung $T' = J\frac{b^2}{5}$. Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse a ist also

$$1)\qquad T_a = \frac{J}{5}(b^2 + c^2) = \frac{4}{15}\pi\, abc\,(b^2 + c^2).$$

Für die anderen Achsen ist

$$2)\qquad T_b = \frac{J}{5}(c^2 + a^2) = \frac{4}{15}\pi\, abc\,(c^2 + a^2),$$

$$3)\qquad T_c = \frac{J}{5}(a^2 + b^2) = \frac{4}{15}\pi\, abc\,(a^2 + b^2).$$

Die zugehörigen Trägheitsradien sind

$$4)\qquad r_a = \sqrt{\frac{T_a}{J}} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{5}},$$

$$5)\qquad r_b = \sqrt{\frac{T_b}{J}} = \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{5}},$$

$$6)\qquad r_c = \sqrt{\frac{T_c}{J}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}.$$

Die Energie des um die Achse a sich drehenden Ellipsoids vom spezifischen Gewicht 1 ist im absoluten Mafssystem

$$7)\qquad E_a = T_a\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{J}{5}(b^2 + c^2)\frac{\vartheta^2}{2}$$

$$= \frac{4}{15}\pi\, abc\,(b^2 + c^2)\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{2}{15}\pi\, abc\,(b^2 + c^2)\,\vartheta^2.$$

Entsprechend sind die Formeln für das um die anderen Achsen sich drehende Ellipsoid. ϑ ist dabei die am Radius 1 gemessene Drehungsgeschwindigkeit. (Winkelgeschwindigkeit.) Für das technische Maſssystem multipliziere man das Resultat für das spezifische Gewicht p' mit dem Faktor $\frac{p'}{g}$.

Der Leser versuche auch diese Formeln durch Affinität aus den für die Kugel geltenden oder auch mit Hilfe der Schichtenformel abzuleiten. (Die Simpsonsche Regel ist hier und in § 201 nicht mehr brauchbar.)

§ 203) Das Polarmoment zweiter Ordnung des Ellipsoids in Bezug auf den Mittelpunkt ist die Summe der Planmomente für die drei Symmetrieebenen, also

$$T_p = \frac{J}{5}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{4}{15}\pi\, a b c\,(a^2 + b^2 + c^2).$$

Der zugehörige Trägheitsradius ist

$$\varrho_p = \sqrt{\frac{T_p}{J}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{5}}.$$

Bemerkung. Nach dem Verschiebungssatze

$$T_1 = T + e^2 J$$

kann man die Trägheitsmomente in Bezug auf andere Ebenen bezw. Achsen, die zu den vorigen parallel sind, leicht berechnen. (Dasselbe gilt vom Polarmomente.) Haben jedoch die neuen Ebenen bezw. Geraden andere Lage bezw. Richtung, so treten die schon in § 15 behandelten Centrifugalmomente in die Formel ein und das Ellipsoid von Poinsot bezw. das von Clebsch-Culmann tritt in Kraft.

§ 204) Die mechanische Energie des um die Achse a sich drehenden Ellipsoids soll im technischen Maſssystem für Meter und Tonnen ausgedrückt werden.

Nach Formel 7) des § 202 war

1) $$E_a = \frac{J}{5}(b^2 + c^2)\frac{\vartheta^2}{2}.$$

Beim homogenen Ellipsoid vom spezifischen Gewichte p' wird die Energie

2) $$E_a = \frac{Jp'}{5}(b^2 + c^2)\frac{\vartheta^2}{2}.$$

Dies gilt für das absolute Maſssystem. Für das technische Maſssystem wird

$$3)\quad E'_a = \frac{J p'}{g}(b^2 + c^2)\frac{\vartheta^2}{10} = \frac{2}{15}\pi abc(b^2 + c^2)\frac{p'}{g}\vartheta^2.$$

Beispiel. Es sei $a = 4$m, $b = 3$m, $c = 2$m, das spezifische Gewicht $p' = 8$, die Winkelgeschwindigkeit gleich 2π (eine Umdrehung für die Sekunde), dann ist

$$E'_a = \frac{2}{15}\pi 4 . 3 . 2 . (9 + 4)\frac{8}{9,81}\cdot 4\pi^2 = \frac{6656}{5 . 9,81}\pi^3$$

$$= \frac{1331,2}{9,81}\pi^3$$

oder

$$E_a = 4207,5 \text{ Metertonnen.}$$

Bemerkung: Die Dimension des Ausdrucks E_a bestimmt sich im Sinne der Technik folgendermaſsen: $abc . p'$ ist das Gewicht in Tonnen, bei $\frac{b^2 + c^2}{g}$ handelt es sich um $\frac{l^2}{l} = l^1$, d. h. um die Längeneinheit in Metern.

§ 205) Beispiel: Für den Erdball ist $a = 6377397 = \sim 6377000$ m, $b = c = 6356079 = \sim 6356000$m. Das spezifische Gewicht werde als $5,6$ angenommen, die Winkelgeschwindigkeit aus dem Sterntage abgeleitet als $\vartheta = \frac{2\pi}{86164}$. Wie groſs ist die Drehungsenergie in Metertonnen? Wie groſs ist die Gesamtenergie.

Auflösung.

$$E_c = \frac{2}{15}\pi a c^2 (a^2 + b^2)\frac{p'}{g}\vartheta^2$$

$$= \frac{2}{15} 6377000 . 6356000^2 . (6377000^2 + 6356000^2)\frac{5,6}{9,81}\cdot\frac{4\pi^3}{86164^2}$$

$$= \frac{44,8\pi^3}{15 . 9,81 . 86184^2}\cdot(6377000^2 + 6356000^2) 6377000 . 6356000^2$$

$$\doteq 26554 . 10^{21} \text{ Metertonnen.}$$

Zu dieser Drehungsenergie kommt noch die der fortschreitenden Bewegung $\frac{m v^2}{2}$, also, wenn das mittlere $v = 30000\,m$ angenommen wird,

$$\frac{4}{3}\frac{\pi}{9,81}ac^2.5,6\cdot\frac{v^2}{2} = \frac{336\,.\,10^7\pi}{9,81}\cdot 6377000\,.\,6356000^2$$

$$= 27194\,.\,10^{26} \text{ Metertonnen.}$$

Schreibt man statt des letzteren $2719400000\,.\,10^{21}$, so würde man durch Addition der Drehungsenergie erhalten $2719426554\,.\,10^{21}$, wovon jedoch nur die fünf ersten Stellen brauchbar sind, so dafs es bei $27194\,.\,10^{26}$ Metertonnen verbleibt. Die Drehungsenergie fällt demnach nur schwach ins Gewicht. Drückt man die Energie in mkg aus, und dividiert man durch 425, so erhält man die Anzahl der Kalorien, welcher jede dieser Bewegungen äquivalent ist.

§ 206) Aufgabe. Man denke sich ein Ellipsoid (von den Achsen a, b, c) aufgehängt am Endpunkte der Achse a. Wie grofs ist die reduzierte Länge dieses physischen Pendels und welches ist seine Schwingungsformel, wenn die Schwingungen in der Ebene (a, b) erfolgen?

Auflösung. Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse c ist nach § 202

$$T_c = \frac{J}{5}(a^2 + b^2),$$

für die gewählte Schwingungsachse aber ist es nach dem Verschiebungssatze

$$1)\qquad T'_c = \frac{J}{5}(a^2 + b^2) + a^2 J = \frac{J}{5}(6\,a^2 + b^2).$$

Das statische Moment in Bezug auf dieselbe Achse ist

$$2)\qquad M = J\,.\,a.$$

Die reduzierte Pendellänge ist

$$3)\qquad l' = \frac{T_c}{M} = \frac{\frac{J}{5}(6\,a^2 + b^2)}{J a} = \frac{6\,a^2 + b^2}{5\,a}.$$

Die Schwingungsdauer ist

$$4)\qquad t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{6\,a^2 + b^2}{5\,a\,g}},$$

wobei g die Fallbeschleunigung ist. Die Länge der Halbachse c ist demnach für beide Formeln gleichgültig.

Beispiel. Sind die Halbachsen $a = 4$, $b = 3$, c beliebig grofs, so ist

$$l = \frac{6 \cdot 4^2 + 3^2}{5 \cdot 4} = \frac{105}{20} = 5{,}25 \text{ m},$$

die Schwingungsdauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{5{,}25}{9{,}81}} = 2{,}2983 \text{ Sekunden.}$$

Ebenso grofs ist die Schwingungsdauer, wenn man den durch Gleichung 3) bestimmten Punkt der Achse a zum Aufhängepunkte macht.

Der Leser versuche auch die Pendellänge für beliebige Lage des Aufhängepunktes auf der Achse a oder deren Verlängerung zu lösen.

§ 207) Angenommen, das ruhig freischwebende Ellipsoid mit senkrechter Hauptachse a erhält am Endpunkte der letzteren einen horizontalen Stofs in der Richtung der Achse der b, der etwa durch eine normal zur Stofsrichtung stehende Radschaufel aufgenommen wird, so erhält der Mittelpunkt M eine fortschreitende Bewegung, aufserdem aber dreht sich das Ellipsoid um die Achse c. Dabei liegt auf der Achse ein Punkt P, der im Anfang keine Geschwindigkeit erhält, weil die positive und die aus der Drehung entspringende negative Bewegung einander für den ersten Augenblick aufheben. Auch dieser Punkt P liegt, wie die Mechanik elementar

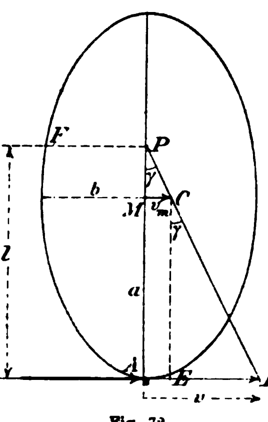


Fig. 72.

zeigt, in der Entfernung $l = \frac{T_c}{M}$ von A, so dafs $AP = \frac{6a^2 + b^2}{5a}$ ist. Hat die durch den Stofs hervorgebrachte Geschwindigkeit für A den Betrag v, so ist die Geschwindigkeit für M von der Gröfse $v_m = v\frac{l-a}{l}$, die Winkelgeschwindigkeit der Drehung aber, gemessen am Radius 1, ist $\gamma = \frac{v}{l}$.

Würde der Stofs bei F in der Richtung nach P erfolgen, so jedoch, dafs er bei F gegen eine dort angebrachte Normalfläche zur Stofsrichtung trifft (damit keine Zerlegung stattfindet), so würde A der zunächst ruhig bleibende Punkt sein. Ist v die Anfangsgeschwindigkeit von P, so erhält der Mittelpunkt M die Geschwindigkeit $v_m = v\frac{a}{l}$, die Winkelgeschwindigkeit dagegen wird wieder $\gamma = \frac{v}{l}$.

Denkt man sich in dem zunächst ruhig bleibenden Punkte eine Drehungsachse parallel zur Achse c, so würde diese bei dem Stofse keine Erschütterung erleiden, was z. B. für Hammerwerke mit schwingendem Hammer wichtig ist. Die richtig angebrachte Drehungsachse wird nämlich sehr wenig beansprucht. Die etwa zu hoch liegende Achse würde einen negativen Stofs erhalten, die zu tief liegende einen positiven Stofs. Bei einem pendelnd aufgehängten Körper nennt man die Stofsstelle, die keine Erschütterung erhält, den Mittelpunkt des Stofses.

§ 208) Stofsaufgabe. Der den Stofs aufnehmende Punkt eines ruhig freischwebenden Ellipsoides liege irgendwo auf der senkrecht eingestellten Achse A, aber wiederum so, dafs die aufnehmende Fläche normal zur Stofsrichtung ist. Sonst soll alles wie vorher sein, jedoch soll der Körper durch den Stofs einer Masse m, die mit der Geschwindigkeit v_1 aufprallt, herbeigeführt werden. Wo liegt der zunächst ruhig bleibende Punkt P, und wie grofs werden die Geschwindigkeiten?

Auflösung. Ist T_A das Trägheitsmoment des Ellipsoids in Bezug auf den Punkt A, also, wenn $MA = e$ ist,

$$T_A = T_e + e^2 J = \frac{J}{5}(a^2 + b^2) + e^2 J = \frac{J}{5}(a^2 + b^2 + 5e^2),$$

und das statische Moment für A ebenso $M_A = Je$, so ist die gesuchte Entfernung

$$AP = l = e + e_1 = \frac{T_A}{M_A} = \frac{\frac{J}{5}(a^2 + b^2 + 5e^2)}{Je} = \frac{a^2 + b^2 + 5e^2}{5e}.$$

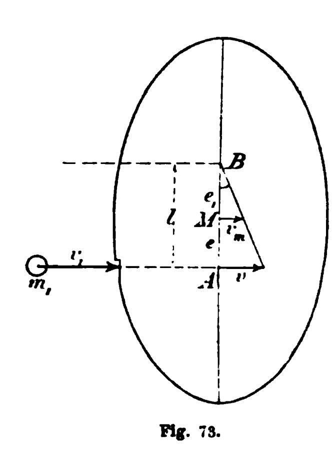


Fig. 73.

Das geometrische Trägheitsmoment in Bezug auf den nun bekannten Punkt P ist

$$T_P = T_e + e_1^2 J$$
$$= \frac{J}{5}(a^2 + b^2 + 5e_1^2),$$

das mechanische also beim spezifischen Gewichte p' würde sein

$$T'_P = \frac{Jp'}{5g}(a^2 + b^2 + 5e_1^2),$$

wo $g = 9{,}81$ m ist, wenn alles andere ebenfalls in Metern gegeben ist.

Es fragt sich nun, welche punktförmige Masse m_2 in A dasselbe mechanische Trägheitsmoment in Bezug auf P hat, wie das Ellipsoid. Aus $m_2 l^2 = T'_P$ folgt $m_2 = \frac{T'_P}{l^2}$. Gegen diese „reduzierte Masse" prallt m_1 mit der Geschwindigkeit v_1 an. Die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stofse ist dort bei unelastischen Massen nach bekannter Formel

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + 0}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2},$$

oder

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + \frac{T'_P}{l^2}} = \frac{m_1 v_1 l^2}{m_1 l^2 + T'_P}.$$

Demnach wird beim Ellipsoid der Punkt A diese Geschwindigkeit v erhalten, der Mittelpunkt M dagegen die fortschreitende Geschwindigkeit

$$v_m = v\frac{e_1}{l} = v\frac{l - e}{l}.$$

Die Drehungsgeschwindigkeit des Ellipsoids endlich wird (für den Radius 1)

$$\gamma = \frac{v}{l}.$$

Hier sind nur noch die obigen Werte einzusetzen.

Der Leser berechne noch die Energie $m_2 . \frac{v^2}{2} + T'_M \frac{\vartheta^2}{2}$ des Ellipsoids nach dem Stofse, wobei $T'_M = \frac{Jp'}{5g}(a^2 + b^2)$ ist. Dazu addiere er die Energie der Masse m_1, d. h. $E_1 = \frac{m_1 v^2}{2}$ nach dem Stofse. Durch Subtraktion dieser Energiesumme von der vor dem Stofse vorhandenen $\frac{m_1 v_1^2}{2}$ erhält er die bei dem Stofse verloren gegangene Energie. — Aufserdem möge der vollkommen elastische Stofs untersucht werden.

Natürlich kann auch die Masse m_1 als $m_1 = \frac{p_1}{g}$ gegeben sein, wobei p_1 das Gewicht ist. Das ruhig freischwebende Ellipsoid ist zunächst nur eine Abstraktion. Für Versuchszwecke reicht es aber aus, den Körper an einem sehr langen Faden z. B. in einer hohen Halle (z. B. Kirche, Theater) aufzuhängen und die Stöfse parallel zu einer der Horizontalachsen zu geben. Nicht zu grofse Ausschläge des Mittelpunktes kann man dann als geradlinig auffassen, auf eine kleinere Strecke hin als Beharrungsbewegung.

Man kann das Ellipsoid im Anschlufs an die elementaren Lehrbücher auch als Beispiel für das ballistische Pendel betrachten, wobei zwei Fälle zu betrachten sind, erstens der, bei dem die anprallende Kugel nach dem Stofse herabfällt, zweitens der, bei dem sie z. B. durch Eindringen in die Masse, mit dem Ellipsoid verbunden bleibt.

Ist zur Aufnahme des Stofses keine Normalfläche angebracht, so mufs der Stofs in einen Normalstofs und einen Tangentialstofs zerlegt werden. Die Aufgabe wird dann komplizierter, weil der eine Teil nicht mehr parallel zu einer Hauptachse wird.

[Die Aufgaben dieser Art sind von kosmischem Interesse, da jeder Fall von Meteorsteinen gegen die Erde oder einen anderen als Drehungsellipsoid oder dreiachsiges Ellipsoid (z. B. Geoid) betrachteten Weltkörper eine fortschreitende und drehende Bewegung ergiebt, die mit den bereits vorhandenen Bewegungen nach Poinsots Drehungstheorie zusammenzusetzen sind. Denkt man sich einen isolierten Weltkörper durch allmähliches Zusammentreffen kleiner kosmischer Massen entstanden, so ist sein augenblicklicher Bewegungszustand im wesentlichen eine Folge der einzelnen Zusammenstöfse. Denn die Kant-Laplacesche Loslösungstheorie von einem Nebelball wird wohl bald ganz vor der Kritik verschwinden.

Der Leser versuche, den Energieverlust bei solchem Zusammenstofse unelastischer Art zu berechnen und in Meterkilogrammen darzustellen, worauf die Division durch 425 den Höchstbetrag an Kalorien gefunden wird, der durch den Stofs erzeugt werden kann. (Man denke an das Aufleuchten neuer Fixsterne, wie „nova Persei", die nach einiger Zeit auch als von spiraligem Nebel umgeben erscheinen.)

§ 209) Aufgabe. An einem Ellipsoid befinde sich wie vorher eine auf der Halbachse a beliebig liegende Drehungsachse parallel zu c. Wo mufs das pendelnde Ellipsoid von einer Masse m_1 mit Geschwindigkeit v_1 gestofsen werden, damit die Pendelgeschwindigkeit ein Maximum werde?

Auflösung. Ist $PM = e_1$ und erfolgt alles in der oben beschriebenen Weise, so ist folgendermafsen zu rechnen. Der Punkt A der Achse befinde sich in der Entfernung l von P, dann ist die dorthin reduzierte Masse des Ellipsoids

$$1)\quad m_A = \frac{T_P'}{l^2} = \frac{1}{l^2}\,\frac{p'}{g}\,T_P = \frac{1}{l^2}\,\frac{p'J}{g}\,(a^2 + b^2 + 5e_1^2).$$

Die Geschwindigkeit von A nach dem Stofse wird

2) $$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_A} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + \frac{T'_P}{l^2}},$$

die Winkelgeschwindigkeit also

3) $$\gamma = \frac{v}{l} = \frac{m_1 v_1}{m_1 l + \frac{T'_P}{l}}.$$

Dies wird ein Maximum, wenn der Nenner ein Minimum ist.

Aus der Elementargeometrie ist nun bekannt, dafs unter allen Rechtecken desselben Inhalts das Quadrat den kleinsten Umfang hat, also auch den kleinsten halben Umfang. Demnach ist bei konstantem $xy = \varkappa$ der Wert von $x + y$ am kleinsten, wenn $x = y$ ist. Die Glieder $m_1 l$ und $\frac{T'_P}{l}$ geben nun das konstante Produkt $m_1 l \cdot \frac{T'_P}{l} = m_1 T'_P$, also ist die Summe $m_1 l + \frac{T'_P}{l}$ ein Minimum, sobald $m_1 l = \frac{T'_P}{l}$ oder

4) $$l = \sqrt{\frac{T'_P}{m_1}}$$

ist. Hat also der Punkt A diese Entfernung von P, so ist die Winkelgeschwindigkeit γ ein Maximum. Der betreffende Punkt heifst der Stofspunkt.

Der Leser untersuche, wie grofs bei solchem Stofs der Energieverlust ist und wieviel Wärme dieser bedeutet. (Anwendung auf den Erdball und auf ihn stürzende Meteore.) Auch berechne er die Verhältnisse für den vollkommen elastischen Stofs.

β) Segmente, Parallelschichten, Sektoren und Zonenpyramiden des Ellipsoids.

§ 210) Die Grundfläche des Segmentes sei parallel zur Symmetrieebene (a, b) des Ellipsoids und habe von dieser den Abstand z_1. Der Inhalt soll berechnet werden.

Auflösung. Nach § 196 ist für die von 0 bis z_1 reichende Parallelschicht

$$\overset{z_1}{\underset{0}{J}} = \pi\, ab\, z_1 - \pi \frac{ab}{c^2} z_1^3.$$

Der Inhalt des Halbellipsoids ist

$$\overset{c}{\underset{0}{J}} = \frac{2}{3} \pi\, abc.$$

Für das **kleinere** der durch die Schnittebene gebildeten Segmente ist daher

$$1)\quad \overset{c}{\underset{z_1}{J}} = \frac{2}{3}\pi abc - \left(\pi ab z_1 - \pi \frac{ab}{c^2} z_1^3\right) = \frac{\pi ab}{3c^2}\left[2c^3 - 3z_1 c^2 + z_1^3\right],$$

für das größere dagegen

$$1^*)\quad \overset{z_1}{\underset{-c}{J}} = \frac{2}{3}\pi abc + \left(\pi ab z_1 - \pi \frac{ab}{c^2} z_1^3\right) = \frac{\pi ab}{3c^2}\left[2c^3 + 3z_1 c^2 - z_1^3\right].$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Es ist aber zweckmäfsig, die Höhe $h_c = c - z_1$ einzuführen, so dafs in den Formeln für z_1 der Ausdruck $c - h_c$ zu setzen ist. Die erste geht dadurch über in

$$2)\quad \overset{c}{\underset{z_1}{J}} = \frac{\pi ab}{3c^2}\left[2c^3 - 3c^2(c - h_c) + (c - h_c)^3\right] = \frac{\pi ab h_c^2}{3c^2}\left[3c - h_c\right].$$

Die zweite wird damit gleichlautend, wenn man $h_c' = c + z_1$, die gröfsere Höhe einführt. (Für $a = b = c = r$ erhält man die bekannte Formel für das Kugelsegment.) Für den Fall, dafs die Grundfläche den anderen Ebenen parallel ist, findet man

$$\overset{a}{\underset{x_1}{J}} = \frac{\pi\, bc\, h_a^2}{3a^2}\left[3a - h_a\right], \qquad \overset{b}{\underset{y_1}{J}} = \frac{\pi\, ca\, h_b^2}{3b^2}\left[3b - h_b\right].$$

§ 211) **Das Segment sei durch einen ganz beliebigen Schnitt gebildet, zu dem der konjugierte Durchmesser $2a_1$ gehöre, von dem der n^{te} Teil abgeschnitten sei. Der Inhalt soll berechnet werden.**

Auflösung. Für das Kugelsegment ist, wenn seine Höhe gleich h gesetzt wird, der Inhalt

$$S_1 = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

Setzt man für h den Ausdruck $\frac{2r}{n}$ ein, so wird

$$S_1 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2r}{n}\right)^2\left[3r - \frac{2r}{n}\right] = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{3n-2}{n^3},$$

während der Kugelinhalt ist $J_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Wird also von der Kugel ein Segment von der Höhe $h = \frac{2r}{n}$ abgeschnitten, so ist der Inhalt des Segmentes

$$S_1 = \frac{3n-2}{n^3} J_1.$$

Wird vom Ellipsoid ein Segment so abgeschnitten, dafs seine Grundfläche die zu einem beliebigen Durchmesser $2a_1$ konjugierte Lage hat und von diesem Durchmesser den n^{ten} Teil abschneidet, so ist aus Affinitätsgründen ebenso

$$S = \frac{3n-2}{n^3} . J = \frac{3n-2}{n^3}\frac{4}{3}\pi abc.$$

(Wird z. B. der dritte Teil vom Durchmesser abgeschnitten, so wird der Inhalt des Segments $S = \frac{28}{81}\pi abc.$)

§ 212) Die horizontale Parallelschicht des Ellipsoids zu bestimmen, wenn die Schnittebenen vom Scheitel die Abstände h_c und h_c' haben (von denen der erstere der gröfsere ist).

Auflösung. Der Inhalt wird

$$J = \frac{\pi ab}{3c^2} h_c^2 (3c - h_c) - \frac{\pi ab}{3c^2} h_c'^2 (3c - h_c')$$

oder

$$J = \frac{\pi ab}{3c^2}\left[h_c^2 (3c - h_c) - h_c'^2 (3c - h_c')\right].$$

Die Formel kann noch umgestaltet werden.

§ 213) Die Parallelschicht eines Ellipsoids zu berechnen, die dadurch entsteht, dafs von einem beliebigen Durchmesser durch zwei Ebenen von zu ihm konjugierter Lage der n^{te} und der n_1^{te} Teil (in demselben Sinne) abgeschnitten werden.

Auflösung.

$$J_p = \frac{3n-2}{n^3} J - \frac{3n_1-2}{n_1^3} J = J\left[\frac{3n-2}{n^3} - \frac{3n_1-2}{n_1^3}\right].$$

oder

$$J_p = \frac{4}{3}\pi abc\left[\frac{3n-2}{n^3} - \frac{3n_1-2}{n_1^3}\right].$$

(Ist z. B. $n=5$, $n_1=6$, so wird $J_p = \frac{404}{10125}\pi abc$.)

Die zuletzt angewandte Methode ist von besonderer Einfachheit für den Sektor.

§ 214) Den Sektor des Ellipsoids zu bestimmen, der dadurch entsteht, dafs die beliebig liegende Segmentfläche vom konjugierten Durchmesser den n^{ten} Teil abschneidet.

Auflösung. Setzt man bei einem Kugelsektor die Segmenthöhe $h = \frac{2r}{n}$, so wird der Inhalt des Sektors

$$S_1' = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2 \frac{2r}{n} = \frac{4}{3}\pi r^3 . \frac{1}{n} = \frac{1}{n} J_1,$$

so dafs es sich um den n^{ten} Teil des Kugelinhalts J handelt. Für das Ellipsoid wird aus Affinitätsgründen der Inhalt des Sektors

$$S' = \frac{1}{n} J = \frac{1}{n}\frac{4}{3}\pi abc.$$

(Macht man z. B. $n = \frac{4}{3}\pi$, so wird der Sektorinhalt $S' = abc$.)

Legt man also durch ein Ellipsoid parallele Ebenen derart, dafs der konjugierte Durchmesser in gleiche Teile zerlegt wird, und verbindet man die Punkte aller elliptischen Schnitte mit dem Mittelpunkte des Ellipsoids, so haben sämtliche Zonen-

pyramiden (bezw. Sektoren) denselben Inhalt. Der Satz ist eine Folge des Satzes, dafs bei der Kugel Zonen von derselben Höhe flächengleich sind.

§ 215) **Die horizontale Parallelschicht des Ellipsoids von $z=0$ bis z hat in Bezug auf die untere Grenzfläche welche Planmomente erster und zweiter Ordnung, welchen Schwerpunktsabstand und welchen Trägheitsabstand?**

Auflösung. Die Fläche hatte in Höhe z den Querschnitt $q_z=\pi ab-\pi \frac{ab}{c^2} z^2$. Dessen statisches Moment in Bezug auf die genannte Grundfläche ist also

$$q_z'=\pi abz-\pi \frac{ab}{c^2} z^3,$$

demnach ist das gesuchte **statische Moment**

$$\overset{s}{\underset{0}{M}}=\pi ab\frac{z^2}{2}-\pi\frac{ab}{c^2}\frac{z^4}{4}=\frac{\pi abz^2}{4c^2}\left[2c^2-z^2\right].$$

Der **Schwerpunktsabstand** ist

$$h_s=\frac{\overset{s}{\underset{0}{M}}}{\overset{s}{\underset{0}{J}}}=\frac{\frac{\pi abz^2}{4c^2}(2c^2-z^2)}{\frac{\pi abz}{3c^2}(3c^2-z^2)}=\frac{3}{4}z\frac{2c^2-z^2}{3c^2-z^2}.$$

Der Querschnitt hat in Bezug auf die Grundfläche das Trägheitsmoment

$$q_z''=\pi abz^2-\pi\frac{ab}{c^2}z^4,$$

das Trägheitsmoment der Parallelschicht wird also

$$\overset{s}{\underset{0}{T}}=\pi ab\frac{z^3}{3}-\pi\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{z^5}{5}=\frac{\pi abz^3}{15c^2}\left[5c^2-3z^2\right].$$

Der mittlere Trägheitsabstand wird also

$$z=\sqrt{\frac{T}{J}}=\sqrt{\frac{\frac{\pi abz^3}{15c^2}(5c^2-3z^2)}{\frac{\pi abz}{3c^2}(3c^2-z^2)}}=\sqrt{\frac{z^2}{5}\cdot\frac{5c^2-3z^2}{3c^2-z^2}}.$$

§ 216) Der Leser löse noch die entsprechenden Aufgaben für Segmente und Sektoren von einfacher und von allgemeiner Lage. Bei der letzteren ist der Winkel γ zu beachten, den der Durchmesser mit der konjugierten Ebene bildet.

Durch Behandlung beliebig liegender Segmente gelangt man auch zu den Formeln für nicht parallel begrenzte Zonenkörper.

§ 217) Für die von 0 bis z reichende horizontale Parallelschicht des Ellipsoids das Trägheitsmoment in Bezug auf die z Achse zu ermitteln.

Auflösung. Der in der Höhe z liegende elliptische Schnitt hat die Halbachsen

$$x = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - z^2}, \qquad y = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - z^2}.$$

Das polare Trägheitsmoment der Ellipsenfläche in Bezug auf ihren Mittelpunkt ist aber hier gleich

$$\frac{\pi x y}{4}(x^2 + y^2) = \frac{\pi}{4}\frac{ab}{c^2}(c^2 - z^2)\left[\frac{a^2}{c^2}(c^2 - z^2) + \frac{b^2}{c^2}(c^2 - z^2)\right],$$

also

$$q_z = \frac{\pi}{4}\frac{ab}{c^2}\frac{(c^2 - z^2)^2}{c^2}(a^2 + b^2)$$

$$= \frac{\pi}{4}\frac{ab}{c^4}(a^2 + b^2)(c^4 - 2c^2z^2 + z^4).$$

Nach der Schichtenformel wird für den Körper

$$T_z = \frac{\pi}{4}\frac{ab}{c^4}(a^2 + b^2)\left[c^4\frac{z}{1} - 2c^2\frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\right]$$

$$= \frac{\pi}{60}\frac{ab}{c^4}(a^2 + b^2)z\left[15c^4 - 10c^2z^2 + 3z^4\right].$$

Der Leser suche noch andere Trägheitsmomente zu entwickeln und sie nach dem schon berechneten Schwerpunkt zu verlegen, auch für T_z den Trägheitsradius zu bestimmen.

Auch hier lassen sich Anwendungen auf Segmente und Sektoren von einfacher Lage machen.

Auf physikalische Anwendungen, die sich auf physische Pendel, Schwingungspunkt, Aufhängepunkt, Reversionspendel, Stofstheorie u. dergl. beziehen, sei auch hier aufmerksam gemacht.

γ) Die ähnlich begrenzte Ellipsoidschicht von endlicher und unendlich kleiner Dicke.

§ 218) Die ähnlich begrenzte Ellipsoidschicht von endlicher Dicke. Sind die beiden Grenzflächen des Hohl-Ellipsoids konzentrisch und ähnlich, und setzt man die Halbachsen der äufseren Fläche $a_1 = mc_1$, $b_1 = nc_1$, $c_1 = c_1$, so mufs man die der inneren $a_2 = mc_2$, $b_2 = nc_2$, $c_2 = c_2$ setzen. Der Inhalt des ganzen Ellipsoids ist dann

$$J_1 = \frac{4\pi}{3} a_1 b_1 c_1 = \frac{4\pi}{3} mc_1 nc_1 c_1 = \frac{4\pi}{3} mnc_1^3,$$

der des inneren Ellipsoids ist

$$J_2 = \frac{4\pi}{3} mnc_2^3,$$

also der des Hohlellipsoids

$$1) \qquad J = J_1 - J_2 = \frac{4\pi}{3} mn(c_1^3 - c_2^3).$$

Nun ist

$$c_1^3 - c_2^3 = (c_1 - c_2)(c_1^2 + c_1c_2 + c_2^2) = d_c(c_1^2 + c_1c_2 + c_2^2),$$

wobei d_c die Dicke bei der Halbachse c ist, also kann man auch schreiben

$$2) \qquad J = \frac{4\pi}{3} mnd_c(c_1^2 + c_1c_2 + c_2^2).$$

§ 219) Demnach lassen sich auch die verschiedenen Momente des Körpers ohne weiteres hinschreiben. So war das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Bezug auf die horizontale Mittelpunktsebene

$$\overset{+c}{\underset{-c}{T}} = \frac{4}{15} \pi a_1 b_1 c_1^3 = \frac{4\pi}{15} mnc_1^5,$$

also ist es für den Hohlkörper

$$3)\qquad T = \frac{4\pi}{15} mn(c_1^5 - c_2^5),$$

wofür man auch schreiben kann

$$4)\qquad T = \frac{4\pi}{15} mnd_c(c_1^4 + c_1^3 c_2 + c_1^2 c_2^2 + c_1 c_2^3 + c_2^4).$$

In derselben Weise lassen sich alle übrigen Momente erster und zweiter Ordnung, die Trägheitsradien, die Schwerpunkte u. dergl. ohne weiteres hinschreiben.

Die Absicht dieser Betrachtungen liegt aber darin, daſs sich von hier aus eine interessante Infinitesimal-Untersuchung mit endlichen Hilfsmitteln durchführen läſst, die jetzt vorgenommen werden soll.

§ 220) **Die ähnlich begrenzte Ellipsoidschicht von unendlich kleiner Dicke.** Ist die Dicke d_c unendlich klein, so folgt aus Gleichung 2)

$$5)\qquad J = \frac{4\pi}{3} mnd_c 3c_1^2 = 4\pi mnd_c c_1^2,$$

denn für die Grenze wird $c_1 = c_2$, also geht $c_1^2 + c_1 c_2 + c_2^2$ über in $3c_1^2$.

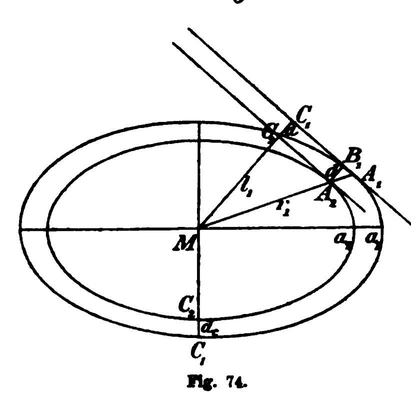


Fig. 74.

Dabei ist die Dicke für jeden Punkt A proportional dem Abstande der zugehörigen Tangentialebene vom Mittelpunkte M. In Figur 74 ist nämlich die Dicke d des Ellipsoids bei A_1 und A_2 nicht etwa gleich A_1A_2 oder h, sondern für die Grenze gleich dem Abstande d der Tangentialebenen in A_2 und A_1. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt

$$A_2B_1 : A_2A_1 = MC_1 : MA_1$$

oder

$$d : h = l_1 : r_1.$$

Ist also $h_1 = \frac{1}{n} r_1$, so ist auch $d_1 = \frac{1}{n} l_1$. Damit ist die behauptete Proportionalität nachgewiesen.

Macht man überall die Dicke gleich dem entsprechenden $\frac{1}{n} l_1$, so ist natürlich auch die Dicke bei der Achse c_1 gleich $\frac{1}{n} c_1$.

Wird nun c als die einzige Variabele z aufgefafst, und läfst man im Sinne der Schichtenformel die unendlich kleine Dicke d_c weg, so hat man für die der Länge z der kleinsten Halbachse entsprechenden Schicht

$$6) \qquad q_z = 4\pi m n z^2,$$

und daraus folgt nach der Schichtenformel für das ganze Ellipsoid

$$7) \qquad \overset{z_1}{\underset{0}{J}} = 4\pi m n \frac{z_1^3}{3} = \frac{4\pi}{3} m n z_1^3 = \frac{4\pi}{3} a b c.$$

Denkt man sich also das Ellipsoid in lauter ähnlich begrenzte ellipsoidische Schichten zerlegt, so läfst sich die Schichtenformel auf die Untersuchung anwenden.

In ähnlicher Weise folgt für das Trägheitsmoment in Bezug auf die horizontale Mittelpunktsebene aus Gleichung 4)

$$8) \qquad q_z'' = \frac{4}{15} \pi m n 5 z^4 = \frac{4}{3} \pi m n z^4.$$

Nach der Schichtenformel folgt daraus für das ganze Ellipsoid

$$9) \qquad \overset{z}{\underset{0}{T}} = \frac{4}{3} \pi m n \frac{z_1^5}{5} = \frac{4}{15} \pi m n z_1^5 = \frac{4}{15} \pi a_1 b_1 c_1^3.$$

§ 221) Untersuchung einer Ellipsoidfläche mit einer Massenbelegung, die in jedem Punkte proportional dem Abstande der Tangentialebene vom Mittelpunkte ist und im Endpunkte der kleinsten Halbachse c den Betrag δ_c für die sehr klein zu denkende Flächeneinheit hat.

An Stelle der Dicke d_c ist δ_c getreten, daher wird die Gesamtmasse m der Belegung für die Ellipsoidfläche mit den Achsen a, b, c nach Gleichung 5)

10) $$m = 4\pi\, mn\, \delta_c\, c^2 = 4\pi\, ab\, \delta_c.$$

Ebenso wird das Trägheitsmoment dieser Flächenbelegung in Bezug auf die Mittelpunktsebene nach Gleichung 8)

11) $$T = \frac{4\pi}{3} mn\delta c^4 = \frac{4\pi}{3} abc^2.$$

In derselben Weise sind die sonstigen Momente für diese Belegung zu bestimmen.

Die Untersuchung der homogenen Belegung der Ellipsoidfläche ist weit schwieriger. Die hier behandelte Belegung ist aber wichtig für die Potentialtheorie (auf Grund des Newtonschen Gesetzes) und für die Lehre von der Influenzelektrizität, da in der Elektrizitätstheorie Belegungen solcher Art zur Untersuchung kommen.

Damit ist der Weg zu einer weiteren Gruppe von Übungsbeispielen eröffnet, die an sich zwar keinen besonderen Wert haben, aber geeignet sind, die neueren Anschauungsweisen über gewisse physikalische Theorieen zu veranschaulichen und somit das Verständnis zu erleichtern. (Vergl. die Ingenieurmathematik des Verfassers, Band II, Seite 409 bis 417.)

§ 222) Man kann z. B. auch **Ellipsoidkörper** untersuchen, für welche die spezifische Masse (oder das spezifische Gewicht) auf den ähnlichen Ellipsoidschichten in dieser Weise verteilt ist. Nach 10) wird dann für die $c = z$ entsprechende ellipsoidische Schicht

$$q_z = 4\pi\, mn\, \delta_z z^2.$$

Ist z. B. für die Entfernung 1 auf der Z-Achse $\delta = \varkappa$ gedacht, so ist für die Entfernung z auf derselben Achse $\delta_z = \varkappa z$, also wird für jede Schicht

$$q'_z = 4\pi\, mn\, (\varkappa z)\, z^2 = 4\pi\, mn\, \varkappa\, z^3,$$

also wird die Masse für dieses ganze nicht homogene Ellipsoid

$$m_z = 4\pi\, mn\, \varkappa \frac{z^4}{4} = \pi\, abc^2 \varkappa.$$

In ähnlicher Weise wird das Trägheitsmoment der ellipsoidischen Einzelschicht in Bezug auf den horizontalen Mittelpunktsschnitt nach Gleichung 8)

$$q_z'' = \frac{4}{3}\pi mn\,\delta_z z^4 = \frac{4}{3}\pi mn\,(\varkappa z)\,z^4 = \frac{4}{3}\pi mn\,\varkappa z^5,$$

also wird das Trägheitsmoment für den ganzen Körper

$$T = \frac{4}{3}\pi mn\varkappa\frac{z_1^6}{6} = \frac{2\pi}{9}mn\varkappa z_1^6 = \frac{2\pi}{9}abc^4\varkappa.$$

Hier also handelt es sich um Körper, bei denen die Dichte der Massenverteilung auf jedem Halbmesser r proportional dem Abstande vom Mittelpunkte M ist, wobei aber für jeden Halbmesser der Faktor von r ein besonderer ist und von dem Winkel $A_1 A_2 B_1$ abhängt, unter dem der Radius die Flächennormale schneidet. Dieser Winkel ist aber für jeden Radius in seiner ganzen Länge derselbe.

Der Leser behandle auch die sonstigen Momente für einen solchen Körper, auch die Trägheitsradien u. dergl., die Schwerpunkte für den halben Körper u. s. w. Die Untersuchungen lassen sich auch auf Segmente, Parallelschichten, Sektoren u. s. w. solcher Körper ausdehnen.

Noch sei bemerkt, dafs die Zunahme der Dichtigkeit auf der Z-Achse nicht dem Gesetze $\delta = \varkappa z$ allein unterworfen werden kann, sondern auch anderen Gesetzen wie $\delta = \varkappa z^n$, oder auch $\delta = a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots$, wobei auch Potenzen mit beliebigen rationalen Exponenten eingeschaltet werden können, die also auch negativ sein können. So ist z. B. auch $\delta = \frac{\varkappa}{z}$ oder $\delta = \frac{\varkappa}{z^2}$ von Interesse, weil dieses auf Zunahme der Dichtigkeit nach innen führt.

δ) Das einmantelige Hyperboloid, seine Segmente, Parallelschichten und Sektoren.

§ 223) Figur 75 stellt einen senkrechten Kreiscylinder quadratischen Querschnitts und vom Radius a dar, dem der Diagonalkegel und die zugehörige Kugel einbeschrieben ist. Aufserdem ist ihm die gleichseitige Hyperbel

$$x^2 - z^2 = a^2$$

anbeschrieben. Bei dieser ist der Querschnitt in der Höhe z

1) $$q_z = \pi x^2 = \pi (a^2 + z^2),$$

so dafs nach der Schichtenformel der Inhalt der von 0 bis z reichenden Parallelschicht des Drehungshyperboloids ist

2) $$\overset{z}{\underset{0}{J}} = \pi \left[a^2 \frac{z}{1} + \frac{z^3}{3}\right] = \frac{\pi}{3} z \left[3a^2 + z^2\right].$$

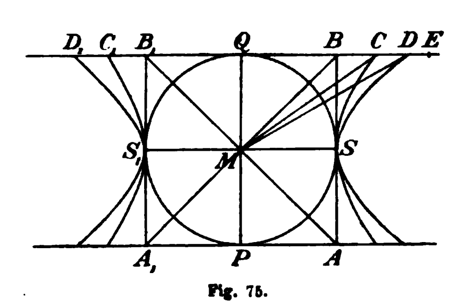


Fig. 75.

Für $z = a$ wird demnach

$$\overset{a}{\underset{0}{J}} = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

Der Inhalt des ganzen Körpers ist also

3) $$J = \frac{8}{3} \pi a^3,$$

oder das Doppelte des Kugelinhalts.

Die Inhalte der vier Körper verhalten sich also wie $1:2.3:4$.

§ 224) Man kann diese Reihe beliebig fortsetzen. Will man z. B. das Drehungshyperboloid anbeschreiben, dessen Inhalt der 5-fache von dem des Kegels ist, so setze man nach der Simpsonschen Regel

$$\frac{h}{6}\left[U + O + 4M\right] = 5 \cdot \frac{2}{3} \pi a^3$$

oder, da $U = 0$ ist,

$$\frac{h}{3}\left[O + 2M\right] = \frac{2a}{3}\left[\pi x_1^2 + 2\pi a^2\right] = \frac{5 \cdot 2}{3} \pi a^3$$

also

$$\pi x_1^2 = 5\pi a^2 - 2\pi a^2 = 3\pi a^2.$$

Demnach mufs der Radius des Oberschnittes sein $x_1 = a\sqrt{3}$. Die neue Hyperbel ist nun leicht anzubeschreiben.

Dieselbe Berechnung für den n-fachen Inhalt führt auf $x_1 = a\sqrt{n-2}$. Allgemein folgt, macht der Reihe nach

$$QB = a\sqrt{3-2},\ QC = a\sqrt{4-2},\ QD = a\sqrt{5-2},$$
$$QE = a\sqrt{6-2}, \ldots,\ a\sqrt{n-2}, \ldots$$

so erhält man bezw. das 3-fache, 4-fache, 5-fache, 6-fache, ... n-fache, ... des einbeschriebenen Kegels.

Darin liegt eine interessante Erweiterung des bekannten Archimedischen Satzes, die auch für gebrochene n gilt. (Man vergleiche damit das in Bd. II Seite 306 bis 309 Gesagte und erweitere die dortigen Bemerkungen.) Für ganzes n ergiebt sich folgende einfache Konstruktion. Man mache $QC = MB$, $QD = MC$, $QE = MD$ und fahre damit beliebig weit fort, dann erhält man alle einmanteligen Drehungshyperboloide, welche die Archimedische Proportion $1:2:3$ beliebig weit als $1:2:3:4:5:\ldots:n\ldots$ fortsetzen.

(Mit Drehungsparaboloiden läfst sich Analoges nach innen hin erreichen, $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}\ldots$)

§ 225) Unterwirft man das Gebilde einer Cavalierischen Erweiterung in senkrechter Richtung mit Hilfe des Faktors $\frac{c}{a}$, senkrecht gegen die Ebene der Zeichnung einer solchen mit dem Faktor $\frac{b}{a}$, so geht die Kugel in ein Ellipsoid von den Achsen a, b, c über, das erste der Hyperboloide in ein solches von den Halbachsen a, b und c, das folgende in ein solches von den Halbachsen a, b und $\frac{n}{a}KD_1$, das folgende in ein solches mit den Halbachsen a, b und $\frac{n}{a}KD_2$ u. s. w. Werden alle für die Höhe $2c$ der Zeichnung berechnet, so sind die Inhalte der Reihe nach

$$4\frac{2}{3}\pi abc,\quad 5\frac{2}{3}\pi abc,\quad 6\frac{2}{3}\pi abc,\quad 7\frac{2}{3}\pi abc.$$

Unterwirft man es jetzt denselben beiden horizontalen Cavalierischen Verschiebungen, die in § 196 angewandt

wurden, so erhält man ein Ellipsoid mit den Halbachsen $a_1 = a$, $b_1 = \frac{b}{\sin\beta}$, $c_1 = \frac{c}{\sin\gamma}$, wo β wieder der Winkel zwischen a_1 und b_1, γ der Winkel zwischen c_1 und der Ebene (a_1, b_1) ist, und alle Hyperboloide werden wieder Hyperboloide, für die a_1, b_1 und c_1 konjugierte Richtungen haben. Die Inhalte werden dieselben wie vorher und lassen sich schreiben

$$4\frac{2}{3}\pi a_1 b_1 c_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1, \quad 5\frac{2}{3}\pi a_1 b_1 c_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1,$$

$$6\frac{2}{3}\pi a_1 b_1 c_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1, \ldots$$

nur ist jetzt c_1 nur für das erste Hyperboloid Halbachse, nicht für die anderen. Für diese geben die Bilder der $D_1, D_2, \ldots$ die Achsenlängen der betreffenden Richtung an. Dagegen ist $\pm c = \pm c_1 \sin\gamma_1$ der Abstand der die Schichten begrenzenden Horizontalebenen. Natürlich kann man auch die symmetrischen Schreibweisen wählen.

§ 226) **Berechnung beliebiger Hyperboloidschichten aus den Hauptachsen a, b, c nach der Schichtenformel.** Nach der Gleichung des senkrechten durch a gelegten hyperbolischen Hauptschnittes, welche lautet

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ist die halbe Querlinie in der Höhe z

$$x = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 + z^2}.$$

Für den durch b gelegten Hauptschnitt ist ebenso

$$y = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + z^2},$$

der elliptische Querschnitt hat also die Fläche

1) $$q_z = \pi x y = \pi \frac{ab}{c^2}(c^2 + z^2).$$

Die Parallelschicht von 0 bis z hat demnach den Inhalt (nach der Schichtenformel)

$$2)\qquad \overset{z}{\underset{0}{J}} = \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2 z + \frac{z^3}{3}\right] = \frac{\pi abz}{3c^2}\left[3c^2 + z^2\right].$$

(Für $z = c$ ergiebt sich $\frac{4}{3}\pi abc$, was mit dem in § 225 gesagten übereinstimmt, da es sich hier nur um die halbe Höhe handelt.)

Wird jedoch die Parallelschicht durch Ebenen begrenzt, die in den Höhen z_1 und z_2 liegen, so ist der Inhalt

$$\overset{z_2}{\underset{z_1}{J}} = \frac{\pi ab}{c^2}\left[c^2 z_2 + \frac{z_2^3}{3}\right] - \frac{\pi ab}{c^2}\left[c^2 z_1 + \frac{z_1^3}{3}\right],$$

oder

$$3)\qquad \overset{z_2}{\underset{z_1}{J}} = \frac{\pi ab}{3c^2}\left[3c^2(z_2 - z_1) + (z_2^3 - z_1^3)\right]$$

$$= \frac{\pi ab(z_2 - z_1)}{3c^2}\left[3c^2 + z_2^2 + z_2 z_1 + z_1^2\right].$$

§ 227) Berechnung beliebiger Hyperboloidschichten aus den zugehörigen konjugierten Halbmessern $a_1 = a$, $b_1 = \frac{b}{\sin\beta_1}$, $c_1 = \frac{c}{\sin\gamma_1}$.

Der Querschnitt ist, wenn wieder β den Winkel zwischen a_1 und b_1, γ den Winkel zwischen c_1 und der Ebene (a_1, b_1) bedeutet, von der Form

$$1)\qquad q_z = \pi\frac{ab}{c^2}(c^2 + z^2) = \frac{\pi a_1 b_1 \sin\beta_1}{c_1^2 \sin^2\gamma_1}\left[c_1^2 \sin^2\gamma_1 + z^2\right],$$

also ist nach der Schichtenformel für die Parallelschicht von 0 bis zu beliebigem z

$$2)\qquad \overset{z}{\underset{0}{J}} = \frac{\pi a_1 b_1 \sin\beta_1}{c_1^2 \sin^2\gamma_1}\left[c_1^2 \sin^2\gamma_1\, z + \frac{z^3}{3}\right]$$

$$= \frac{\pi a_1 b_1 \sin\beta_1}{3c_1^2 \sin^2\gamma_1}\left[3c_1^2 \sin^2\gamma_1\, z + z^3\right].$$

Demnach ist für die durch z_2 und z_1 bestimmte horizontale Parallelschicht

$$\overset{z_2}{\underset{z_1}{J}} = \frac{\pi a_1 b_1 \sin\beta_1}{3c_1^2 \sin^2\gamma_1}[3c_1^2 \sin^2\gamma_1 z_2 + z_2^3]$$
$$- \frac{\pi a_1 b_1 \sin\beta_1}{3c_1^2 \sin^2\gamma_1}[3c_1^2 \sin^2\gamma_1 z_1 + z_1^3]$$

oder

$$3)\quad \overset{z_2}{\underset{z_1}{J}} = \frac{\pi a_1 b_1 \sin\beta_1}{3c_1^2 \sin^2\gamma_1}[3c_1^2 \sin^2\gamma_1 (z_2 - z_1) + (z_2^3 - z_1^3)]$$

oder

$$3^*)\quad \overset{z_2}{\underset{z_1}{J}} = \frac{\pi a_1 b_1 \sin\beta_1 (z_2 - z_1)}{3c_1^2 \sin^2\gamma_1}[3c_1^2 \sin^2\gamma_1 + z_2^2 + z_2 z_1 + z_1^2].$$

§ 228) Verschiedene Planmomente des dreiachsigen Hyperboloids. Es soll sich hier nur um horizontale Parallelschichten handeln, die von $z = 0$ bis zu einem beliebigen z gehen, denn die allgemeinen Schichten dieser Art lassen sich durch Subtraktion oder Addition aus solchen herstellen, was Schwierigkeiten nicht im Gefolge hat. Ebenso soll es sich nur um die senkrechten Halbachsen a, b, c handeln, da das über andere konjugierte Achsen zu sagende nur eine Umschreibung in $a_1 = a$, $b_1 \sin\beta_1 = b$, $c_1 \sin\gamma_1 = c$ erfordert.

Der Querschnitt

$$q_z = \pi \frac{ab}{c^2}(c^2 + z^2)$$

hat in Bezug auf die Ebene (a, b) das Planmoment erster Ordnung

$$1)\qquad q_z' = \pi \frac{ab}{c^2}\left(c^2 z + \frac{z^3}{3}\right) = \pi \frac{ab}{3c^2}(3c^2 z + z^3),$$

demnach ist das Planmoment erster Ordnung für die von $z = 0$ bis z reichende Schicht in Bezug auf die Grundfläche

$$2)\quad \overset{z}{\underset{0}{M}} = \pi \frac{ab}{3c^2}\left(\frac{3c^2 z^2}{2} + \frac{z^4}{4}\right) = \pi \frac{ab}{12c^2}(6c^2 z^2 + z^4)$$
$$= \frac{\pi a b z^2}{12 c^2}(6c^2 + z^2).$$

Der Schwerpunktsabstand der Schicht ist demnach

$$3)\qquad h_s = \frac{\overset{s}{\underset{0}{M}}}{\overset{s}{\underset{0}{J}}} = \frac{\frac{\pi a b z^2}{12 c^2}(6c^2 + z^2)}{\frac{\pi a b z}{3c^2}(3c^2 + z^2)} = \frac{z}{4}\cdot\frac{6c^2 + z^2}{3c^2 + z^2}.$$

Derselbe Querschnitt giebt als Planmoment zweiter Ordnung in Bezug auf die Grundfläche

$$4)\qquad q_s'' = \pi \frac{ab}{c^2}(c^2 z^2 + z^4),$$

das Planmoment zweiter Ordnung für die Schicht ist also in Bezug auf die Ebene (a, b)

$$5)\qquad \underset{a,b}{T} = \frac{\pi a b}{c^2}\left(c^2 \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\right) = \frac{\pi a b z^3}{15 c^2}(5c^2 + 3z^2).$$

Der Trägheitsmittelpunkt also liegt in der Höhe

$$6)\ h_t = \sqrt{\frac{T}{J}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi a b z^3}{15c^2}(5c^2 + 3z^2)}{\frac{\pi a b z}{3c^2}(3c^2 + z^2)}} = \sqrt{\frac{z^2}{5}\cdot\frac{5c^2 + 3z^2}{3c^2 + z^2}}.$$

Die weniger wichtige Formel für den durch $h_\sigma = \sqrt{\frac{T}{M}}$ charakterisierten Punkt stelle der Leser selbst auf.

Die entsprechenden Planmomente zweiter Ordnung für den Hauptschnitt (a, c) ergeben sich folgendermafsen.

Eine Ellipse mit den Halbachsen x und y hat in Bezug auf die Achse x das Trägheitsmoment $\frac{\pi x y^3}{4}$.

Eine solche Ellipse ist die Querschnittsellipse in der Höhe z, deren Halbachsen nach § 226 sind

$$x = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 + z^2},\quad y = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + z^2}.$$

Ihr Trägheitsmoment in Bezug auf x und damit in Bezug auf die Hauptebene (a, c) ist also

$$7)\qquad q_z''' = \frac{\pi x y^3}{4} = \frac{\pi}{4}\,\frac{a}{c}\sqrt{c^2+z^2}\cdot\frac{b^3}{c^3}\sqrt{c^2+z^2}^{\,3}$$

$$= \frac{\pi a b^3}{4c^4}(c^2+z^2)^2 = \frac{\pi a b^3}{4c^4}(c^4+2c^2z^2+z^4).$$

Demnach ist das **Trägheitsmoment der Parallelschicht** von $z=0$ bis z in Bezug auf die Ebene a, c

$$8)\qquad T_{a,c} = \frac{\pi a b^3}{4c^4}\left(c^4 z + \frac{2c^2z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\right)$$

$$= \frac{\pi a b^3 z}{60c^4}(15c^4 + 10c^2z^2 + 3z^4).$$

Durch Vertauschung von a und b ergiebt sich für die Ebene (b, c) ohne weiteres

$$9)\qquad T_{b,c} = \frac{\pi b a^3}{4c^4}\left(c^4 z + \frac{2c^2z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\right)$$

$$= \frac{\pi b a^3 z}{60c^4}(15c^4 + 10c^2z^2 + 3z^4).$$

§ 229) **Die Axialmomente der Hyperboloidschicht** ergeben sich aus 5), 8), 9) des vorigen Paragraphen durch Addition zu zweien. So ist in Bezug auf die Achse a aus 5) und 8)

$$T_a = T_{a,c} + T_{a,b} = \frac{\pi a b z^3}{15c^2}(5c^2+3z^2)$$

$$+\frac{\pi a b^3 z}{60c^4}(15c^4+10c^2z^2+3z^4),$$

oder

$$1)\quad T_a = \frac{\pi a b z}{60c^4}\left[15b^2c^4 + (2c^2+b^2)\,10c^2z^2 + (4c^2+b^2)\,3z^4\right].$$

Ebenso ist

$$T_b = T_{a,b} + T_{b,c} = \frac{\pi a b z^3}{15c^2}(5c^2+3z^2)$$

$$+\frac{\pi a^3 b z}{60c^4}(15c^4+10c^2z^2+3z^4),$$

oder

$$2)\quad T_b = \frac{\pi abz}{60c^4}[15a^2c^4 + (2c^2 + a^2)\,10c^2z^2 + (4c^2 + a^2)\,3z^4].$$

Aufserdem ist

$$T_c = T_{a,c} + T_{b,c} = \frac{\pi ab(a^2 + b^2)z}{60c^4}[15c^4 + 10c^2z^2 + 3z^4].$$

Letzteres ergiebt sich auch aus dem Polarmomente

$$\frac{\pi xy}{4}(x^2 + y^2) = \frac{\pi ab}{4c^4}(a^2 + b^2)(c^2 + z^2)^2$$

des Ellipsenquerschnitts in der Höhe z.

§ 230) Das Polarmoment der Schicht in Bezug auf den Mittelpunkt des Hyperboloids ist

$$T_p = T_{a,c} + T_{b,a} + T_{c,b} = T_c + T_{a,b}$$

$$= \frac{\pi ab(a^2 + b^2)z}{60c^4}[15z^4 + 10c^2z^2 + 3z^4]$$

$$+ \frac{\pi abc^2z}{60c^4}[20c^2z^2 + 12z^4] = \frac{\pi abz}{60c^4}[15c^4(a^2 + b^2)$$

$$+ 10c^2(a^2 + b^2)z^2 + (a^2 + b^2)3z^4 + 20c^4z^2 + 12c^2z^4]$$

oder

$$T_p = \frac{\pi abz}{60c^4}[15c^4(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2 + 2c^2)\,10c^2z^2$$

$$+ (a^2 + b^2 + 4c^2)\,3z^4].$$

Symmetrie in Bezug auf a, b und c findet nicht statt, weil die Achse c eine Ausnahmestellung einnimmt, denn nur ihre Normalschnitte sind elliptische.

Man versuche auch die Sektoren des Hyperboloids zu behandeln.

§ 231) Für die symmetrische Schicht des Hyperboloids von $-z$ bis $+z$ sind die Werte doppelt so grofs. Diese Schicht eignet sich sehr gut zu Übungsbeispielen aus der Mechanik, weil die Achsen a, b, c u. s. w. als freie Umdrehungsachsen auftreten können, wie es auch beim Ellipsoid

der Fall war. Man berechne z. B. die Energie $E_a = \frac{T_a \vartheta^2}{2}$ bei der Umdrehung um die Achse a, $E_b = \frac{T_b \vartheta^2}{2}$ für die Achse b, $E_c = \frac{T_c \vartheta^2}{2}$ für die Achse c, die Trägheitsradien

$$\varrho_a = \sqrt{\frac{T_a}{J}}, \quad \varrho_b = \sqrt{\frac{T_b}{J}}, \quad \varrho_c = \sqrt{\frac{T_c}{J}}$$

für diese Achsen. Die reduzierten Pendellängen bei Schwingungen um eine Achse, die entweder parallel zu einer der Achsen a, b, c ist, lassen sich ebenfalls leicht berechnen. Endlich sind noch Stofsaufgaben u. dergl. zu empfehlen. Auch Quadranten und Oktanten lassen sich leicht untersuchen.

Segmente im gebräuchlichen Sinne giebt es beim einmanteligen Hyperboloid nicht. Denkt man sich aber die symmetrisch begrenzte Parallelschicht einem Cylinder einbeschrieben, so entsteht ein Restkörper, dessen Horizontalschnitte ähnliche Ellipsen sind. Ist die halbe Höhe gleich z_1, so sind die beiden Grundflächen Ellipsen mit den Halbachsen $x_1 = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 + z_1^2}$ und $y_1 = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + z_1^2}$, der Cylinderinhalt also

$$\pi x_1 y_1 2 z_1 = 2\pi \frac{a b z_1}{c^2}(c^2 + z_1^2),$$

der des Hyperboloids $\frac{2\pi a b z_1}{3c^2}[3c^2 + z_1^2]$, der des Restkörpers also

$$J = \frac{2\pi a b z_1}{3c^2}[3c^2 + 3z_1^2 - 3c^2 - z_1^2] = \frac{4\pi}{3} z_1^3 \cdot \frac{ab}{c^2}.$$

(Ist im besonderen Falle $ab = c^2$, so handelt es sich zugleich um einen Kugelinhalt.)

Der Querschnitt dieses Restkörpers hat in der Höhe z die Fläche

$$q_z = \pi x_1 y_1 - \pi x_z y_z = \pi \left[\frac{ab}{c^2}(c^2 + z_1^2) - \frac{ab}{c^2}(c^2 + z^2)\right]$$

oder

$$q_z = \pi \frac{ab}{c^2} [z_1^2 - z^2].$$

Daraus folgt als Inhalt von $z = 0$ bis z

$$\overset{z}{\underset{0}{J}} = \pi \frac{ab}{c^2} \left[z_1^2 - \frac{z^3}{3}\right],$$

also

$$\overset{+z_1}{\underset{-z_1}{J_0}} = \frac{2\pi ab}{3c^2} [3z_1^3 - z_1^3] = \frac{4\pi ab}{3c^2} z_1^3,$$

wie vorher.

Dieser Restkörper besitzt Segmente, z. B. solche, die durch senkrechte oder schräge Ebenen abgeschnitten werden. Er kann bis ins Unendliche fortgesetzt werden, so dafs die Höhe beliebig grofs sein kann.

Alle Momente erster und zweiter Ordnung, die für ihn oder für seine Schichten oder Segmente von Interesse sind, lassen sich leicht berechnen, sehr bequem mit Hilfe des Cylinders und des Hyperboloids. Dies und die Lösung mechanischer Aufgaben sei dem Leser überlassen, ebenso die Bearbeitung des Falles, wo der Cylinder durch Cavalierische Verschiebung zu einem schrägen, unsymmetrischen Cylinder elliptischer Basis geworden ist, dessen Achsen den konjugierten Achsen des geänderten Hyperboloids entsprechen.

Man versuche auch ähnlich begrenzte hyperbolische Schichten (des Hohl-Hyperboloids) für endliche und unendlich kleine Dicke und daran anschliefsend Hyperbelflächen mit entsprechender Massenbelegung zu behandeln.

ε) Das zweimantelige Hyperboloid, seine Parallelschichten, Segmente u. s. w.

§ 231) Das gleichseitige Drehungshyperboloid mit zwei Mänteln hat in der Lage der Figur einen Hauptschnitt von der Gleichung

$$\zeta^2 - \xi^2 = a^2.$$

Da aber der obere Teil nur in Höhen $\zeta > a$ Schnitte hat, ist es für die Anwendung der Schichtenformel besser,

für diesen die Höhen von S ab zu zählen. Dann wird $z = \zeta - a$, und statt ζ ist einzusetzen $z + a$, für ξ kann man einfach x setzen, und so entsteht als maſsgebende Gleichung

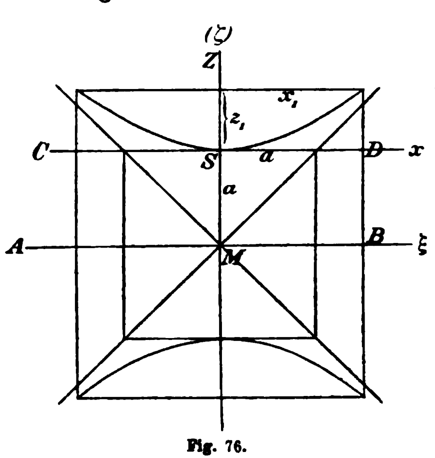


Fig. 76.

$$(z + a)^2 - x^2 = a^2$$

oder

1) $x^2 = 2\,a\,z + z^2$.

Der Querschnitt in Höhe z_1 wird

2) $q_{z_1} = \pi\, x_1^2$
$= \pi\,[2\,a\,z_1 + z_1^2]$.

Das Segment von 0 bis z_1 erhält den Inhalt

3) $\overset{z_1}{\underset{0}{J}} = \pi\left[2\,a\,\frac{z_1^2}{2} + \frac{z_1^3}{3}\right]$
$= \frac{\pi\, z_1^2}{3}\,(2\,a + z_1)$.

In Bezug auf die Ebene xy wird das statische Moment von q_z

4) $$q_z' = \pi\,[2\,a\,z^2 + z^3],$$

also das statische Moment des oberen Segmentes in Bezug auf diese Ebene

5) $$\overset{z}{\underset{0}{M}} = \pi\left[2\,a\,\frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right] = \frac{\pi\, z^3}{12}\,[8\,a + 3\,z].$$

Die Schwerpunktshöhe also

6) $$h_z = \frac{\overset{z}{\underset{0}{M}}}{\overset{z}{\underset{0}{J}}} = \frac{\frac{\pi\, z^3}{12}\,[8\,a + 3\,z]}{\frac{\pi\, z^2}{3}\,[3\,a + z]} = \frac{z}{4}\,\frac{8\,a + 3\,z}{3\,a + z}.$$

Das Trägheitsmoment von q_z in Bezug auf die Ebene xy ist

7) $$q_z'' = \pi\,[2\,a\,z^3 + z^4],$$

also das des Segments

8) $$\overset{z}{\underset{0}{T}} = \pi\left[2\,a\,\frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5}\right] = \frac{\pi}{10}\,[5\,a\,z^4 + 2\,z^5] = \frac{\pi\, z^4}{10}\,[5\,a + 2\,z].$$

Will man das Trägheitsmoment für die entsprechende Schwerpunktsachse haben, so hat man noch zu vermindern um $h_s^2 J$, so daſs man erhält

9) $$T_s = \frac{\pi z^4}{10}[5a + 2z] - \left(\frac{z}{4}\frac{8a+3z}{3a+z}\right)^2 \cdot \frac{\pi z^2}{3}(3a+z),$$

was sich erheblich umformen läſst, da der zweite Posten sich zu $\frac{\pi z^4}{48}\frac{(8a+3z)^2}{3a+z}$ vereinfacht.

Der Leser versuche im Anschluſs an das beim einmanteligen Hyperboloid Gesagte die sonstigen Momente erster und zweiter Ordnung für Segmente und Schichten zu berechnen, da hier der allgemeine Fall behandelt werden soll.

§ 232) Erweitert man das Hyperboloid in der Richtung y mittels $\frac{b}{a}$, in der Richtung z mittels $\frac{c}{a}$, so werden die Gleichungen der Hauptschnitte (ac) und (bc) für die Mittelpunktslage M des Koordinatenanfangs

$$\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{\xi^2}{a^2} = 1, \qquad \frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Da man um c zu verschieben hat, um von S aus zu rechnen, gehen die Gleichungen ähnlich wie vorher in andere über:

1) $$\frac{(z+c)^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \qquad \frac{(z+c^2)}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Demnach wird

2) $$\begin{cases} x^2 = \frac{a^2}{c^2}[(z+c)^2 - c^2] = \frac{a^2}{c^2}[2cz + z^2], \\ y^2 = \frac{b^2}{c^2}[(z+c)^2 - c^2] = \frac{b^2}{c^2}[2cz + z^2]. \end{cases}$$

Der elliptische Querschnitt in der Höhe z wird also

3) $$q_z = \pi xy = \pi\frac{ab}{c^2}(2cz + z^2),$$

der Inhalt des Segmentes von Höhe z wird

$$4)\quad \overset{z}{\underset{0}{J}} = \frac{\pi a b}{c^2}\left(2c\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}\right) = \frac{\pi a b z^2}{3c^2}(3c+z).$$

Das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die Ebene xy wird

$$5)\quad q'_z = \pi \frac{ab}{c^2}(2cz^2 + z^3),$$

das statische Moment in Bezug auf dieselbe Ebene also

$$6)\quad \overset{z}{\underset{0}{M}} = \frac{\pi ab}{c^2}\left(2c\frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right) = \frac{\pi ab z^3}{12c^2}[8c+3z].$$

Die Schwerpunktsachse des Segments wird

$$7)\quad h_s = \frac{\overset{z}{\underset{0}{M}}}{\overset{z}{\underset{0}{J}}} = \frac{\frac{\pi ab z^3}{12c^2}[8c+3z]}{\frac{\pi ab z^2}{3c^2}[3c+z]} = \frac{z}{4}\cdot\frac{8c+3z}{3c+z}.$$

Das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die Ebene xy wird

$$8)\quad q''_z = \frac{\pi ab}{c^2}(2cz^3 + z^4),$$

das Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe Ebene, also T_{xy} oder

$$9)\quad \overset{z}{\underset{0}{T}} = \frac{\pi ab}{c^2}\left(2c\frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5}\right)\frac{\pi ab z^4}{10c^2}[5c+2z].$$

Der mittlere Trägheitsradius also

$$10)\quad h_t = \sqrt{\frac{\overset{z}{\underset{0}{T}}}{\overset{z}{\underset{0}{J}}}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi ab z^4}{10c^2}(5c+2z)}{\frac{\pi ab z^2}{3c^2}(3c+z)}}$$

$$= z\sqrt{\frac{3}{10}\cdot\frac{5c+2z}{3c+z}}.$$

Das kleinste Trägheitsmoment in Bezug auf eine der Horizontalebenen erhält man durch Verlegung nach dem Segmentschwerpunkte, also durch Verminderung um $h_s^2 . J$. Es wird also

$$T_s = \frac{\pi a b z^4}{10 c^2}[5c + 2z] - \left(\frac{z}{4}\frac{8c+3z}{3c+z}\right)^2 \cdot \frac{\pi a b z^2}{3 c^2}[3c + z]$$

oder

$$11) \quad T_s = \frac{\pi a b z^4}{c^2}\left\{\frac{(5c+2z)}{10} - \frac{(8c+3z)^2}{48(3c+z)}\right\}$$

$$= \frac{\pi a b z^4}{c^2} \cdot \frac{40c^2 + 24cz + 3z^2}{240(3c+z)}.$$

Das Trägheitsmoment der Ellipse mit den Achsen x und y ist in Bezug auf die x-Achse

$$T_x = \frac{\pi x y^3}{4}.$$

Hier ist aber

$$x = \frac{a}{c}\sqrt{2cz + z^2}, \qquad y = \frac{b}{c}\sqrt{2cz + z^2},$$

also für den Querschnitt in Höhe z

$$12) \quad q_z = \pi \frac{ab^3}{4c^4}(2cz + z^2)^2 = \pi \frac{ab^3}{4c^4}(4c^2z^2 + 4cz^3 + z^4).$$

Demnach wird das Trägheitsmoment in Bezug auf die Ebene xz für das Segment von 0 bis z

$$13) \qquad T_{xz} = \frac{\pi a b^3}{4c^4}\left(4c^2\frac{z^3}{3} + 4c\frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5}\right)$$

$$= \frac{\pi a b^3 z^3}{60 c^4}(20c^2 + 15cz + 3z^2).$$

Ebenso das in Bezug auf die yz-Ebene

$$14) \qquad T_{yz} = \frac{\pi a b z^3}{60 c^4}(20c^2 + 15cz + 3z^2).$$

In Bezug auf die x-Achse wird das Trägheitsmoment

$$T_x = T_{xy} + T_{xz} = \frac{\pi a b z^4}{10 c^2}(5c + 2z)$$
$$+ \frac{\pi a b^3 z^3}{60 c^4}(20 c^2 + 15 c z + 3 z^2).$$

oder

$$15)\quad T_x = \frac{\pi a b z^3}{60 c^4}[20 b^2 c^2 + 15 c (b^2 + 2 c^2) z + 3 (b^2 + 4 c^2) z^2].$$

Ebenso

$$16)\quad T_y = \frac{\pi a b z^3}{60 c^4}[20 a^2 c^2 + 15 c (a^2 + 2 c^2) z + 3 (a^2 + 4 c^2) z^2],$$

$$17)\quad T_z = \frac{\pi a b (a^2 + b^2) z^3}{60 c^4}[20 c^2 + 15 c z + 3 z^2].$$

Das Polarmoment zweiter Ordnung für den Schnittpunkt der Achsen x, y, z ist $T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = T_z + T_{xy}$ oder

$$18)\qquad T_p = \frac{\pi a b (a^2 + b^2) z^3}{60 c^4}[20 c^2 + 15 c z + 3 z^2]$$
$$+ \frac{\pi a b z^4}{10 c^2}[5 c + 2 z],$$

was sich ebenfalls noch vereinfachen läfst.

Der Leser verschiebe noch alle Bezugsebenen, alle Achsen und den Pol des letzten Moments nach dem Schwerpunkte, wobei die betreffenden Abzüge zu machen sind. Auch versuche er die Ebenen, Achsen und den Pol nach dem Mittelpunkte M des Hyperboloids zu verschieben. Endlich stelle er die Formeln für konjugierte Achsen (wie beim Ellipsoid und beim einfachen Hyperboloid) auf.

Mit Hilfe zweier Segmente werden noch die Parallelschichten erledigt. Auch die Sektoren sind leicht zu behandeln. Dann kann man mit Hilfe der Ausdrücke

$$T_x \frac{\vartheta^2}{2},\qquad T_y \frac{\vartheta^2}{2},\qquad T_z \frac{\vartheta^2}{2}$$

die Energie solcher Hyperboloide berechnen, die um eine der Hauptachsen sich drehen und auch Pendelaufgaben, Stofsaufgaben u. s. w. wie beim Ellipsoid berechnen. Alle diese Beispiele zu wiederholen, ist hier nicht nötig, da die Methode und der Rechnungsgang im wesentlichen übereinstimmen. Dasselbe gilt von den ähnlich begrenzten Hohlhyperboloiden und den Flächen mit entsprechender Massenverteilung.

ζ) Das dreiachsige Paraboloid, das hyperbolische Paraboloid und sonstige Flächen zweiten Grades.

§ 233) Das Drehungsparaboloid ist schon behandelt, es ist also nur noch eine „Erweiterung" mit einem konstanten Faktor in irgend einer Normalrichtung zur Drehungsachse nötig, um das Paraboloid mit elliptischem Querschnitt zu erhalten. Die Berechnung der Segmente und Parallelschichten in geometrischer und mechanischer Hinsicht schliefst sich an das Vorangegangene so einfach an, dafs diese Übungsaufgaben dem Leser überlassen bleiben können. Dies gilt auch von der Behandlung der Schräglagen mit konjugierten Richtungen nach dem Muster der beim Ellipsoid ausgeführten Untersuchungen. Als Hauptachsenrichtungen betrachte man die Normale auf der Tangentialebene im Scheitelpunkte und die Richtungen der gröfsten und kleinsten Achse des elliptischen Parallelschnitts. Den Scheitel wähle man zum Ausgangspunkte der Berechnung (Schnittpunkt der Achsenrichtungen).

Konjugierte Richtungen findet man folgendermafsen. Man mache einen beliebig liegenden elliptischen Schnitt und gebe der Ellipse ein beliebiges Paar konjugierter Durchmesser. Dann lege man an den Körper eine dem Schnitt parallele Tangentialebene. Die Verbindungslinie des Berührungspunktes mit dem Mittelpunkte der Ellipse giebt die dritte konjugierte Achse.

§ 234) Das hyperbolische Paraboloid und seine statischen Momente. Schon in Figur 28 war ein hyperbolisches Paraboloid dargestellt, und zwar in einer Lage, in der seine Gleichung die einfache Form

$z = xy$ hat.*) Nur der Teil über einem Quadrate $ABCD$ mit der Seite 1 war gezeichnet, bezw. mit den Seiten x_1 und y_1, was auf den Inhalt $J = \frac{x_1^2 y_1^2}{4}$ führte. [Zieht man noch die Gerade EA, so hat man die Zeichnung einer Pyramide mit Grundfläche $x_1 y_1$ und der Höhe $x_1 y_1$, also vom Inhalte $J_1 = \frac{x_1^2 y_1^2}{3}$. Zieht man davon ab den Inhalt J, so hat man als Inhalt des stehen bleibenden Halbtetraeders

$$J_2 = J_1 - J = \frac{x_1^2 y_1^2}{12}.]$$

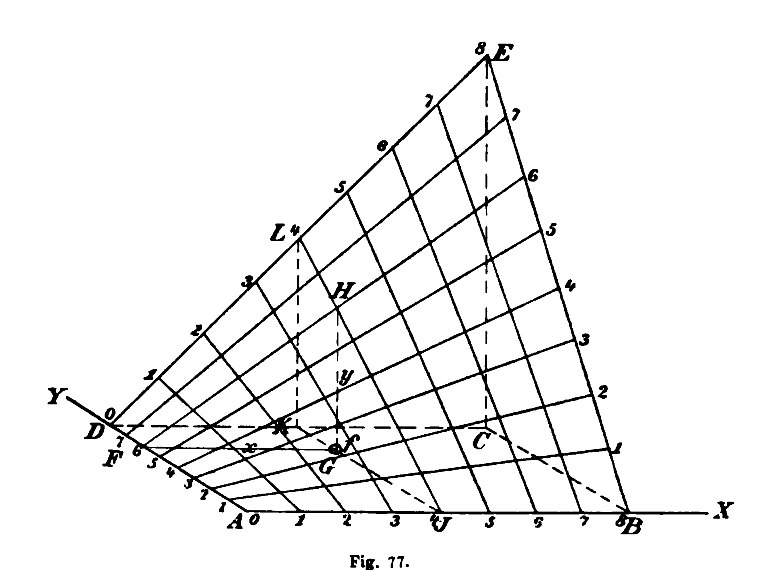


Fig. 77.

Die statischen Momente des gezeichneten Körpers in Bezug auf die Grundfläche sind leicht zu berechnen. Die senkrecht zur X-Achse stehende Parallelschicht hat in Entfernung y den Inhalt $x_1 \cdot \frac{x_1 y}{2} = \frac{x_1^2 y}{2}$. Die Schwerpunkts-

*) In der Figur ist GH mit z statt mit y zu bezeichnen.

höhe dieses Dreiecks ist $\frac{1}{3} x_1 y$, das statische Moment der Schicht also in Bezug auf die Grundfläche ist

$$q'_v = \frac{x_1^2 y}{2} \cdot \frac{1}{3} x_1 y = \frac{x_1^3 y^2}{6}.$$

Das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche ist daher für den ganzen Körper nach der Schichtenformel

1) $$M_{xy} = \frac{x^3}{6} \cdot \frac{y_1^3}{3} = \frac{x_1^3 y_1^3}{18}.$$

Die Schwerpunktshöhe also

2) $$z_s = \frac{M_{xy}}{J} = \frac{\frac{x_1^3 y_1^3}{18}}{\frac{x_1^2 y_1^2}{4}} = \frac{2}{9} x_1 y_1.$$

Das statische Moment derselben Schicht in Bezug auf die Ebene ist von der Gröfse $\frac{x_1^2 y}{2} . y = \frac{x_1^2 . y^2}{2}$. Nach der Schichtenformel ist daher das Moment für $y = 0$ bis y

3) $$M_{xz} = \frac{x_1^2}{2} \cdot \frac{y_1^3}{3} y = \frac{x_1^2 y_1^3}{6}.$$

Der Abstand der Schwerpunktshöhe von der Ebene xz ist also

4) $$y_s = \frac{M_{xz}}{J} = \frac{\frac{x_1^2 y_1^3}{6}}{\frac{x_1^2 y_1^2}{4}} = \frac{2}{3} y_1.$$

Ebenso ist 5) $M_{yz} = \frac{x_1^3 y_1^2}{6}$, und 6) $x_s = \frac{M_{yz}}{J} = \frac{2}{3} x_1$.

Die Lage des Schwerpunkts ist durch die Koordinaten $\frac{2}{3} x_1$, $\frac{2}{3} y_1$, $\frac{2}{9} x_1 y_1$ vollständig bestimmt.

§ 235) Die Trägheitsmomente des hyperbolischen Paraboloids in Bezug auf die Koordinatenebenen und Achsen.

Das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Grundfläche bestimmt sich aus dem der zuerst betrachteten Schicht $\frac{x_1^2 y}{2}$, die ein Dreieck von Grundlinie $g = x_1$ und der Höhe $h = x_1 y$ ist, als $\frac{g h^3}{12} = x_1 . \frac{x_1^3 y^3}{12} = \frac{x_1^4 y^3}{12}$, nach der Summenformel wird für den ganzen Körper

$$1) \qquad T'_{xy} = \frac{x_1^4}{12} \frac{y_1^4}{4} = \frac{x_1^4 y_1^4}{48}.$$

Dieselbe Schicht giebt in Bezug auf die Ebene xz das Trägheitsmoment

$$\frac{g h}{2} . y^2 = \frac{x_1 . x_1 y}{2} . y^2 = \frac{x_1^2}{2} y^3.$$

Für den ganzen Körper folgt

$$2) \qquad T'_{xz} = \frac{x_1^2}{2} \frac{y_1^4}{4} = \frac{x_1^2 y_1^4}{8}.$$

Ebenso ist

$$3) \qquad T'_{yz} = \frac{x_1^4 y_1^2}{8}.$$

Demnach ist für die X-Achse

$$4) \quad T'_x = T_{xy} + T_{xz} = \frac{x_1^4 y_1^4}{48} + \frac{x_1^2 y_1^4}{8} = \frac{x_1^2 y_1^4 (x_1^2 + 6)}{48}.$$

für die anderen Achsen

$$5) \quad T'_y = T_{xy} + T_{yz} = \frac{x_1^4 y_1^4}{48} + \frac{x_1^4 y_1^2}{8} = \frac{x_1^4 y_1^2 (y_1^2 + 6)}{48}.$$

$$6) \quad T'_z = T_{xz} + T_{yz} = \frac{x_1^2 y_1^4}{8} + \frac{x_1^4 y_1^2}{8} = \frac{x_1^2 y_1^2 (y_1^2 + x_1^2)}{8}.$$

Das Polarmoment in Bezug auf den Nullpunkt ist

$$7) \; T'_p = (T_{xy} + T_{yz}) + T_{zx} = T_y + T_{zx} = \frac{x_1^4 y_1^2}{48} (y_1^2 + 6)$$

$$+ \frac{x_1^2 y_1^4}{8} = \frac{x_1^2 y_1^2 [x_1^2 y_1^2 + 6 x_1^2 + 6 y_1^2]}{48}.$$

§ 236) Alle diese Trägheitsmomente sollen jetzt **nach dem Schwerpunkte hin** reduziert werden. Dabei wird

$$T_{xy} = T'_{xy} - \left(\frac{2}{9}x_1 y_1\right)^2 . J = \frac{x_1^4 y_1^4}{48} - \frac{4}{81} x_1^2 y_1^2 . \frac{x_1^2 y_1^2}{4}$$

$$= x_1^4 y_1^4 \frac{27-16}{1296} = x_1^4 y_1^4 \frac{9}{1296}$$

oder

1) $$T_{xy} = \frac{x_1^4 y_1^4}{144}$$

$$T_{yz} = T'_{yz} - \left(\frac{2}{3} x_1\right)^2 J = \frac{x_1^4 y_1^2}{8} - \frac{4}{9} x_1^2 \frac{x_1^2 y_1^2}{4} = x_1^4 y^2 \frac{9-8}{72},$$

oder

2) $$T_{yz} = \frac{x_1^4 y_1^2}{72}.$$

3) $$T_{zx} = T'_{zx} - \left(\frac{2}{3} y_1\right)^2 J = \frac{x_1^2 y_1^4}{72}.$$

Demnach wird

4) $$T_y = T_{xy} + T_{yz} = \frac{x_1^4 y_1^4}{144} + \frac{x_1^4 y_1^2}{72} = \frac{x_1^4 y_1^2 (y_1^2 + 2)}{144}.$$

5) $$T_z = T_{yz} + T_{zx} = \frac{x_1^4 y_1^2}{72} + \frac{x_1^2 y_1^4}{72} = \frac{x_1^2 x_1^2 (x_1^2 + y_1^2)}{72}.$$

6) $$T_x = T_{zx} + T_{xy} = \frac{x_1^2 y_1^4}{72} + \frac{x_1^4 y_1^4}{144} = \frac{x_1^2 y_1^4 (2 + x_1^2)}{144}.$$

Das Polarmoment in Bezug auf den Schwerpunkt ist

$$T_p = T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = T_y + T_{zx} = \frac{x_1^4 y_1^2 (y_1^2 + 2)}{144}$$

$$+ \frac{x_1^2 y_1^4}{72} = \frac{x_1^4 y_1^4 + 2 x_1^4 y_1^2 + 2 x_1^2 y_1^4}{144}$$

oder

7) $$T_p = \frac{x_1^2 y_1^2 [x_1^2 y_1^2 + 2 x_1^2 + 2 y_1^2]}{144}$$

Die entsprechenden Trägheitsabstände und Trägheitsradien, Schwingungspunkte u. dergl. sind nun leicht zu berechnen. Dies und die Lösung mechanischer Übungsaufgaben sei dem Leser überlassen.

Zu empfehlen ist noch die Aufgabe, das allgemeine Tetraeder (mit senkrechter Achse) in der Stellung der Fig. 100 in Band I und das daraus entspringende Halbtetraeder in gleicher Weise zu behandeln.

Ferner sei die Aufgabe gestellt, senkrechte Cylinder von beliebiger Grundfläche und Stellung zu untersuchen, die durch die Fläche $z = xy$ begrenzt werden.

Statt der Fläche $z = xy$ die Fläche $\frac{z}{c} = \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b}$ oder $z = \frac{c}{ab} xy = kxy$ zu behandeln, ist eine leichte Übungsaufgabe. Nur wenig komplizierter ist die Bezugnahme auf konjugierte Richtungen.

Man untersuche auch ähnlich begrenzte Hohlparaboloide elliptischer und hyperbolischer Art, die entsprechenden Massenbelegungen auf beiden Arten von parabolischen Flächen und ihren Segmenten, Parallelschichten u. dergl.

§ 237) Sonstige mit Kegelschnittsflächen zusammenhängende Körper, wie senkrechte und schiefe Kreiscylinder, elliptische, parabolische, hyperbolische Cylinder, senkrechte und schiefe Kreiskegel, elliptische, parabolische, hyperbolische Kegel und ihre Schichten und Abschnitte aller Art in entsprechender Weise zu untersuchen, giebt einfache Übungsaufgaben in grofser Zahl.

Nur die Flächen, z. B. schon die des schrägen Kreiscylinders, des elliptischen Cylinders, des schrägen Kreiskegels, des elliptischen Kegels u. s. w. machen Schwierigkeiten, die übrigens auch der höheren Analysis nicht erspart werden, da es sich dort um elliptische und hyperelliptische Integrale handelt. Das elementar zu behandelnde, z. B. die Oberfläche des Paraboloids, kann an der Hand der schon behandelten Voraufgaben in Angriff genommen werden. Wohl aber lassen sich, wie vorher Flächen mit besonderen Massenbelegungen ganz elementar behandeln. Sonst ist wesentlich Neues hier nicht mehr zu vermerken.

η) Einiges über Centrifugalmomente solcher Körper.

§ 238) Ein geometrischer Hilfssatz nebst mechanischen Folgerungen. Zur Behandlung der Centrifugalmomente sei folgender Hilfssatz bewiesen. Schneidet man von einer Ecke eines Parallelogramms aus $\frac{1}{m}$ der einen und $\frac{1}{m_1}$ der anderen Seite ab, so schneidet die Verbindungslinie der Teilpunkte $\frac{1}{m+m_1}$ von der Länge der dortigen Diagonale ab, und letztere teilt die Verbindungslinie im Verhältnis $m_1 : m$.

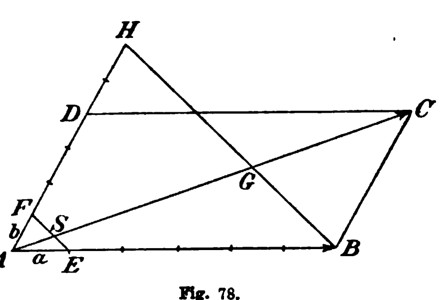


Fig. 78.

Beweis. $AE = a$ sei $\frac{1}{m} AB$, $AF = b \frac{1}{m} AD$, AC die Diagonale von $ABCD$, welche FE in S teilt. Man ziehe noch $BH \parallel EF$, was auf der Diagonale G giebt. Aus der Ähnlichkeit der entsprechenden Dreiecke folgt $HG : GB = AH : BC = mb : m_1 b = m : m_1$. Folglich ist auch $FS : SE = m : m_1$. Damit ist die eine Behauptung bewiesen. — Ferner ist $AG : GC = AH : BC = m : m_1$, also

$$AG : (AG + GC) = m : m + m_1.$$

Nun ist aber $AG = mAS$, also folgt $mAS : AC = m : m + m_1$, folglich ist $AS = \frac{AC}{m + m_1}$. Damit ist die andere Behauptung bewiesen.

Folgerungen. Man denke sich E und F mit Massen m und m_1 belegt und um die in A auf der Ebene von $ABCD$ errichtete Normale, mit der sie starr verbunden sind, mit der Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = 1$ rotierend. Dann ist die eine Centrifugalkraft $ma\vartheta^2 = ma \cdot 1^2$, also wird sie bequem durch $AB = ma$ dargestellt, wenn $AE = a$ ist.

Die andere ist $m_1 b \vartheta^2 = m_1 b 1^2$, also wird sie durch AD dargestellt, wenn $AF = b$ ist. Die Resultante beider Kräfte, die durch EF starr verbunden sind, ist $AC = (m + m_1) AS = (m + m_1) AS \, . \, 1^2$. Letzteres ist aber gleich der Centrifugalkraft der in S angebrachten Masse $(m + m_1)$. Da ferner $FS : SE = m : m_1$ ist, so ist S der Schwerpunkt der beiden Massen. Also geht die Resultante durch den Schwerpunkt und ist gleich der Centrifugalkraft der in diesem angebrachten Masse. Diese kombinierte Masse kann man nun mit einer dritten in derselben Ebene lagernden Masse m_2 kombinieren, was ein entsprechendes Resultat giebt. Fährt man so fort, so folgt z. B. für eine homogene mit Masse belegte ebene Fläche, dafs, wenn sie um eine zu ihr normale Achse rotiert, die Centrifugalkraft nach Gröfse und Richtung gleich der Centrifugalkraft der im Schwerpunkt angebrachten Masse ist.

Ist ein homogener Körper symmetrisch zu einer solchen Ebene, so lassen sich stets je zwei symmetrische Massenteilchen mit ihren Centrifugalkräften ersetzen durch die vereinigte Masse, die im Schnittpunkte der Verbindungslinie und der Ebene angebracht ist. Macht man dies mit allen symmetrischen Teilchen, so ist das Problem auf das vorige zurückgeführt. Folglich:

Hat ein homogener Körper eine Symmetrieebene und dreht er sich um eine zur letzteren normale Achse, so ist die Centrifugalkraft nach Gröfse und Richtung gleich der Centrifugalkraft der im Schwerpunkte vereinigten Masse.

Denkt man sich in irgend welcher Höhenlage eine zur vorigen parallele Ebene, z. B. im Abstande z, so hat die Centrifugalkraft p in Bezug auf diese Ebene ein Centrifugalmoment $p \, . \, z$ im mechanischen Sinne.

§ 239) Anders ist es, wenn die homogen mit Masse belegte ebene Fläche um eine Achse rotiert, die in ihrer Ebene liegt. In diesem Falle werden alle Centrifugalkräfte parallel, die Resultante ist also gleich der Summe der Kräfte und horizontal gerichtet, aber sie geht im allgemeinen nicht durch den Schwerpunkt der Massen. Denkt man sich z. B. in A und A_1 Massen 1, die mit der Drehungsachse PQ fest verbunden sind und von ihr die Entfernungen

x und x_1 haben, so verhalten sich die Centrifugalkräfte $1 . x\vartheta^2$ und $1 x_1 \vartheta^2$ wie x und x_1. Die Resultante $x + x_1$ greift also in einem Punkte P an, der die Verbindungslinie im umgekehrten Verhältnis der Kräfte teilt. Dieser liegt hier tiefer als der Schwerpunkt. Dagegen ist die Gröfse der Centrifugalkräfte so, dafs sie gleich der Centrifugalkraft der in S vereinigten Masse ist. Ebenso ist es, wenn man in A und B Massen m und m_1 anbringt, was Centrifugalkräfte $m x \vartheta^2$ und $m_1 x_1 \vartheta^2$ giebt. Dann teilt die Resultante die Verbindungslinie wieder im umgekehrten Verhältnis der Kräfte. Die Summe der Kräfte $(mx + m_1 x)\vartheta^2$ ist aber ebenso grofs, wie die Centrifugalkraft der im neuen Schwerpunkte vereinigten Masse, denn es ist $mx + mx_1 = (m + m_1) x_s$, wenn x_s der Schwerpunktsabstand ist. Denn der eine Ausdruck ist die Summe der einzelnen statischen Momente in Bezug auf PQ, der andere ist das Gesamtmoment der im Schwerpunkt vereinigten Masse in Bezug auf PQ. Entsprechendes gilt von 3, 4, 5 ... Punkten. Liegen jedoch alle Punkte in einer Parallelen zur Schwerpunktsachse, so geht die Kraft durch den Schwerpunkt.

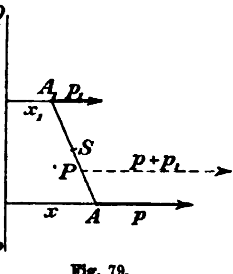


Fig. 79.

Die Höhenlage des Angriffspunktes bestimmt sich dabei allgemein folgendermafsen. Die Abstände der Punkte $A, A_1, A_2 \ldots$ von einer Normalebene zu PQ seien $z, z_1, z_2 \ldots$, dann sind die statischen Momente der Centrifugalkräfte in Bezug auf diese Ebene

$$m x \frac{\vartheta^2}{2} z + m_1 x_1 \frac{\vartheta^2}{2} z_1 + m_2 x_2 \frac{\vartheta^2}{2} z_2 + \ldots$$

$$= \frac{\vartheta^2}{2} (m x z + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 + \ldots).$$

Dieses statische Moment ist gleich dem Momente der Mittelkraft, also gleich

$$\zeta (m x + m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots) \frac{\vartheta^2}{2}.$$

Der Abstand ζ der Mittelkraft von der Bezugsebene ist also

$$\zeta = \frac{m x z + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 + \dots}{m x + m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{Resultante}}.$$

Ist die Resultante gleich Null, was stattfindet, sobald die Achse durch den Schwerpunkt geht, und ist das Centrifugalmoment endlich, so wird ζ unendlich grofs, d. h. es handelt sich um ein Kräftepaar. Im besonderen Falle kann auch dieses gleich Null sein. Dem entsprechen z. B. die Figuren 80, 81. In der einen befindet sich ein Kräftepaar mit dem Momente $p\,e$, in der andern hat das Moment des Kräftepaars den Wert Null.

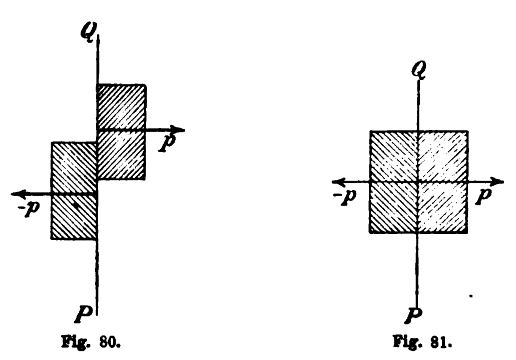


Fig. 80. Fig. 81.

Das allgemeine Resultat ist folgendes: Die Centrifugalkraft einer mit Masse belegten ebenen Fläche, die sich um eine in ihrer Ebene liegende Achse dreht, ist der Stärke nach gleich der Centrifugalkraft der im Schwerpunkte vereinigten Masse, auch ist sie parallel gerichtet zu dieser Kraft. Im allgemeinen geht sie aber **nicht** durch den Schwerpunkt. Ihre Angriffshöhe in Bezug auf eine beliebige Normalebene zur Achse bestimmt sich aus $\zeta = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{Resultante}}$. Ist die Resultante gleich Null, so ist das Centrifugalmoment gleich dem Momente des Kräftepaars.

Folgerung. Zerlegt man einen Körper durch Normalebenen zur Drehungsachse in Scheiben, und

liegen deren Schwerpunkte in einer durch die Drehungsachse gehende Ebene, so ist die Centrifugalkraft des Körpers nach der zuletzt gegebenen Methode zu behandeln, denn für jede Scheibe gilt der Schwerpunktssatz des § 238. Das Kräftepaar hat, wie Fig. 80 zeigt, das Bestreben, die Drehungsachse umzuwerfen, selbst wenn die Kräfteresultante gleich Null ist.

§ 240) Ist der Körper von allgemeiner Gestalt und die Drehungsachse z. B. senkrecht, so lege man durch den Schwerpunkt eine Horizontalebene. Projiziert man alle Massenteilchen auf diese Ebene, so bleibt der Schwerpunkt ungeändert, ebenso jede Centrifugalkraft ihrer Gröfse und Richtung nach. Dadurch findet man im Anschlufs an § 238 die gesamte Centrifugalkraft der Stärke nach als die Centrifugalkraft der im Schwerpunkte vereinigten Masse.

Diese Verlegung der Massen ist aber nur in folgendem Sinne gestattet: Man projiziere jeden Massenpunkt auf die Hilfsebene und bringe dort die Centrifugalkraft gleich und entgegengesetzt gerichtet an. So erhält man eine in jener Ebene liegende Kraft, deren Richtungslinie durch die Drehungsachse geht, und ein Kräftepaar, welches in einer durch die Achse gehenden Ebene wirkt. Die Kräfte werden nach § 238 behandelt, die Kräftepaare, die in einem durch die Achse gehenden Ebenenbüschel liegen, sind nach der bekannten Methode der Mechanik zu einem resultierenden Kräftepaare zu vereinigen. Fallen dann die Resultante und das resultierende Kräftepaar in dieselbe Ebene, so lassen sie sich zu einer Kraft vereinigen, die im allgemeinen nicht durch den Schwerpunkt geht. Liegen sie aber nicht in derselben Ebene, dann ist eine weitere Vereinfachung nicht möglich. — Geht die Drehungsachse durch den Schwerpunkt, so verschwindet die Kraft, aber im allgemeinen nicht das Kräftepaar. Weil sie aber nicht beide in derselben Ebene zu liegen brauchen, kann im allgemeinen das Kräftepaar verschwinden, ohne dafs die Kraft verschwindet, und die Kraft kann verschwinden, ohne dafs das Kräftepaar verschwindet.

Diese Sätze reichen hin, eine Reihe von Centrifugalaufgaben zu lösen. Und wie man von den

barycentrischen Methoden aus Schlüsse auf die Planimetrie und Stereometrie ziehen kann, kann man dies auch von diesen Centrifugalaufgaben aus, so dafs man eine grofse Anzahl von Resultaten für die Übungsbeispiele erhält.

Will man die Centrifugalmomente unmittelbar erhalten, so gebe man jedem Volumenteilchen v auch die Masse v, die Winkelgeschwindigkeit ϑ aber (gemessen am Radius 1) setze man von vornherein gleich 1.

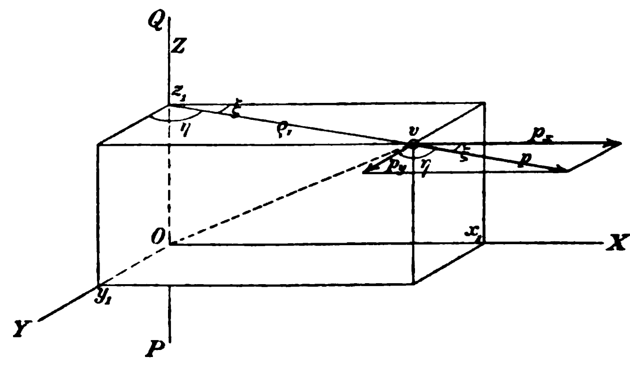


Fig. 82.

§ 241) Centrifugalmoment für ein einziges Massenteilchen v. Man mache die Drehungsachse, mit dem das Teilchen v fest verbunden zu denken ist, zur Z-Achse des Koordinatensystems. Das Teilchen habe die Koordinaten x_1, y_1, z_1, so dafs der Abstand von der Z-Achse $\varrho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ist. Ist $\vartheta = 1$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, so entsteht die Centrifugalkraft

$$p = v\varrho_1 \vartheta^2 = v\varrho_1 1^2 = v\varrho_1,$$

die in Bezug auf die Ebene XY das Centrifugalmoment $v\varrho_1 z$ im mechanischen Sinne hat.

Die Komponente von p in Bezug auf die Richtung der X ist $p_x = p \cos\xi = (v\varrho_1)\cos\xi = v(\varrho_1 \cos\xi) = vx_1$, das Centrifugalmoment dieser Komponente in Bezug auf die Ebene XY ist also $vx_1 z_1$. (In diesem Aus-

drucke können z_1 und x_1 ihre Rolle vertauschen. Man hat also zugleich das Centrifugalmoment $v z_1 x_1$ für die Z-Komponente der Drehung mit Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = 1$ um die X-Achse, bezogen auf die Ebene ZY.)

Für einen Körper ist bei der entsprechenden Drehung um die Z-Achse die aus der Mechanik zu entnehmende Centrifugalkomponente in der Richtung der X zu multiplizieren mit dem Abstande z. Der mathematische Ausdruck $\sum xz$ für den ganzen Körper ist nun nach den vorliegenden Methoden zu bestimmen.

§ 242) Beispiel der Kugel. Die Kugel ist symmetrisch gegen den horizontalen Mittelpunktsschnitt. Folglich ist nach § 238 die Centrifugalkraft von der Gröfse der im Mittelpunkt vereinigten Masse und geht durch diesen Punkt. Ist also r der Radius der Kugel und sind die Koordinaten des Mittelpunktes x_1, y_1, z_1, so ist die Centrifugalkraft unter den obigen Annahmen ($T = 1$, Masse im Volumen v gleich v)

$$p = \frac{4\pi}{3} r^3 . \varrho_1 . 1^2 = \frac{4\pi}{3} r^3 \varrho_1 .$$

Die Komponente in der Richtung x ist

$$p_x = \frac{4\pi}{3} r^3 \varrho_1 \cos \xi_1 = \frac{4\pi}{3} r^3 x_1 .$$

Das Moment dieser Komponente in Bezug auf die Ebene $X Y$ ist

$$p_x . z_1 = \frac{4\pi}{3} r^3 x_1 z_1 = J x_1 z_1 .$$

Demnach ist das stereometrische Centrifugalmoment der Kugel in diesem Falle

$$\sum v x z = \frac{4\pi}{3} r^3 x_1 z_1 = J x_1 z_1 .$$

Man versuche dies auch auf dem Wege der Schichtenformel nachzuweisen, indem man zunächst die Centrifugalkraft und ihr Moment auf die Ebene $X Y$ für jede Einzelschicht untersucht und dann die Summierung für den ganzen Körper durchführt.

§ 243) Beim senkrechten und senkrecht stehenden Cylinder mit Kreis, Ellipse, Kreissegment, Ellipsensegment, Parabelsegment, Hyperbelsegment als Grundfläche, beim senkrechten und senkrecht stehenden Kegel mit solchen Grundflächen, d. h. bei Kegeln, deren Spitze senkrecht über dem Schwerpunkte der Grundfläche liegt (bei der Kugel), beim dreiachsigen Ellipsoid, dreiachsigen einmanteligen Hyperboloid, beide mit einer senkrecht stehenden Hauptachse gedacht, beim zweimanteligen Hyperboloid mit senkrecht stehender durch den Scheitelpunkt gehender Hauptachse, beim entsprechenden elliptischen Paraboloid liegen die Schwerpunkte der Horizontalschichten sämtlich in einer Senkrechten. Demnach geht bei allen die Centrifugalkraft durch den Schwerpunkt, sobald die Z-Achse des Koordinatensystems parallel zur Drehungsachse ist. Sind also die Schwerpunktskoordinaten x_1, y_1, z_1, so ist bei allen das Centrifugalmoment $\Sigma vxz = Jx_1 z_1$, ebenso das Centrifugalmoment $\Sigma vyz = Jy_1 z_1$. Vertauschen aber x und z bezw. y und z ihre Rollen, so hat man dieselben Centrifugalmomente für die Drehung um die X-Achse bezw. Y-Achse des Koordinatensystems.

Damit ist eine grofse Anzahl von Übungsbeispielen mit einfachen Resultaten für die Anwendung der Summenformel erledigt. Das hier fehlende Σxy erhält man z. B. bei der Drehung um die X-Achse und die Komponente in der Y-Richtung.

§ 244) Sind nun die Trägheitsmomente T_x, T_y, T_z für einen solchen Körper in solcher Lage in Bezug auf die Koordinatenachsen bestimmt, so mufs man den in § 18 bewiesenen Satz anwenden und das Trägheitsmoment für eine Achse A berechnen, die durch den Nullpunkt des Koordinatensystems geht und mit dessen Achsen die Winkel α, β, γ bildet, denn dabei wird das Trägheitsmoment in Bezug auf die neuen Achsen

$$T_A = \cos^2\alpha\, T_x + \cos^2\beta\, T_y + \cos^2\gamma\, T_z$$

$$-2\cos\alpha\cos\beta \sum vxy - 2\cos\beta\cos\gamma \sum vyz - 2\cos\gamma\cos\alpha \sum vzx.$$

Entsprechendes gilt übrigens von den Formeln des § 17, wo es sich um die Planmomente zweiter Ordnung handelt, wobei z. B. die Drehung um die Z-Achse auf die Formeln

$$T_{\eta\zeta} = \cos^2\gamma\, T_{yz} + \sin^2\gamma\, T_{zx} + \sin 2\gamma \sum xy,$$
$$T_{\zeta\xi} = \cos^2\gamma\, T_{zx} + \sin^2\gamma\, T_{yz} - \sin 2\gamma \sum xy,$$
$$T_{\eta\xi} = T_{yx}$$

führt.

Dadurch sind zahlreiche Übungsaufgaben für Momente zweiter Ordnung in Bezug auf beliebig liegende Ebenen lösbar gemacht, denn die Verschiebungen der Ebenen oder Achsen führen nur auf einen Zusatz $c^2 J$, wenn man vom Schwerpunkte ausgeht.

Auch horizontale Parallelschichten, Segmente und Sektoren der Kugel und des Ellipsoids und zahlreiche andere Körper lassen sich in entsprechender Weise behandeln.

§ 245) Liegen die Schwerpunkte der zur Drehungsachse normalen Parallelschichten eines homogenen Körpers in einer Geraden, welche die Drehungsachse schräg schneidet, so fällt die Centrifugalaufgabe unter den in § 239 behandelten Fall.

Hierher gehören als einfache Fälle der schräge Kreiscylinder und Kreiskegel, das dreiachsige Ellipsoid, Hyperboloid, Paraboloid mit schrägen Achsen, jedoch so, dafs die horizontalen Parallelschnitte untersucht werden. Hier kommen, da die Schwerpunktsachse konjugierte Richtung gegen die Ebenen der Parallelschnitte hat, die oben behandelten konjugierten Achsen zur Geltung.

Die Angriffshöhe der Resultante fällt dabei nicht mehr mit der Schwerpunktshöhe des Körpers zusammen. Einige Beispiele sollen behandelt werden.

§ 246) Schräger Kreiscylinder, auf der XY-Ebene stehend, jedoch so, dafs seine Mittellinie BC die Z-Achse, die Drehungsachse sein soll, schneidet und gegen die XY-Ebene unter α geneigt sein soll. (Figur 83) Die Höhe des Cylinders sei z_2, der Mittelpunkt der Grundfläche habe die Koordinaten x_1, y_1, $z=0$, der der oberen x_2, y_2, z_2. Der Abstand $\varrho_1 = OB$ ist $\varrho_1 = \sqrt{x_1^2+y_1^2}$, der Abstand $\varrho_2 = KC$

ist $\varrho_2 = \varrho_1 + z_2 \cot\alpha$, der Schwerpunktsabstand ist $\varrho_s = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}$, also das zugehörige $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_s = \frac{y_1 + y_2}{2}$, wobei $x_2 = z_2 \cot\alpha \cos\xi_1$, $y_2 = z_2 \cot\alpha \sin\xi_1$ und $\cos\xi_1 = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$, $\sin\xi_1 = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$. Für die Höhe z ist der Mittelpunktsabstand $\varrho_s = \varrho_1 + z \cot\alpha$; ebenso $x_s = x_1 + z \cot\alpha \cos\xi_1$, $y_s = y_1 + z \cot\alpha \sin\xi_1$.

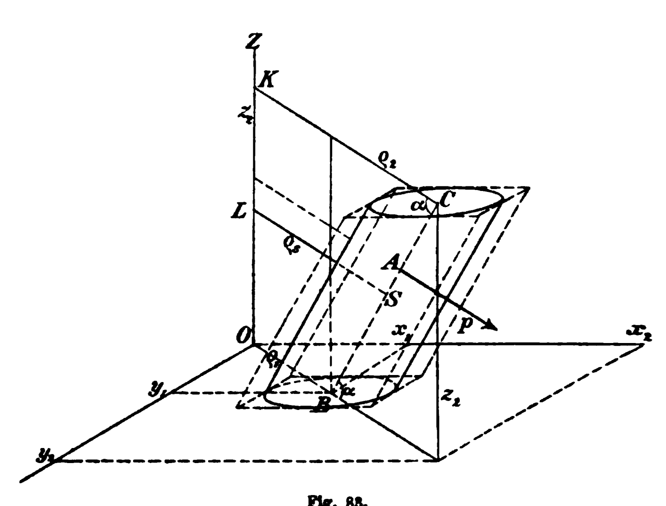


Fig. 88.

Die Centrifugalkraft des ganzen Körpers wird (bei der Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = 1$ und der spezifischen Masse 1)

$$p = (\pi r^2 z_2)\,\varrho_s = J\varrho_s = J\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} = J\left(\varrho_1 + \frac{z_2}{2}\cot\alpha\right),$$

die X-Komponente

$$1) \qquad p_x = (\pi r^2 z_2)\,x_s = J x_s = J\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}\cos\xi_1$$

$$= J\left(x_1 + \frac{z_2}{2}\cot\alpha\cos\xi_1\right).$$

Die Querschnitte des Körpers sind von der Form $q = \pi r^2$, dazu gehört für die Centrifugalkraft der Querschnittsausdruck $q' = \pi r^2 \varrho_s$, als X-Komponente $q'' = \pi r^2 x_s$; als Moment in Bezug auf die XY-Ebene

$$2)\qquad q''' = \pi r^2 x_s z = \pi r^2 z (x_1 + z \cot\alpha \cos\xi_1)$$
$$= \pi r^2 (x_1 z + z^2 \cot\alpha \cos\xi_1).$$

Für den ganzen Körper wird also nach der Summenformel

$$\sum v x z = \pi r^2 \left(\frac{x_1 z_2^2}{2} + \frac{z_2^3}{3} \cot\alpha \cos\xi_1\right),$$

oder

$$3)\qquad \sum v x z = \frac{\pi r^2 z_2^2}{6} (3 x_1 + 2 z_2 \cot\alpha \cos\xi_1)$$

$$= J \frac{z_2}{6} (3 x_1 + 2 z_2 \cot\alpha \cos\xi_1) = J \frac{z_2}{6} (3 x_1 + 2 x_2).$$

Damit ist das betreffende Centrifugalmoment gefunden. Die Angriffshöhe der Centrifugalkraft wird

$$4)\qquad h = \frac{J \frac{z_2}{6} (3 x_1 + 2 z_2 \cot\alpha \cos\xi_1)}{J x_s}$$

$$= \frac{z_2}{6 x_s} (3 x_1 + 2 z_2 \cot\alpha \cos\xi_1) = \frac{z_2}{6 x_s} (3 x_1 + 2 x_2).$$

Will man in 3) nur die gegebenen Werte x_1, y_1, $z_1 = 0$, z_2, r, α haben, so wird

$$3^*)\qquad \sum v x z = \frac{\pi r^2}{6} z_2^2 \left(3 x_1 + 2 z_2 \cot\alpha \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right).$$

$$4^*)\qquad h = \frac{z_2}{3} \cdot \frac{3 x_1 + 2 z_2 \cot\alpha \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y^2}}}{x_1 + z_2 \cot\alpha \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y^2}}}$$

$$= \frac{z_2}{3} \frac{3 x_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + 2 x_1 z_2 \cot\alpha}{x_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + x_1 z_2 \cot\alpha}.$$

§ 247) **Beispiel des schrägen Kreiskegels, dessen Schwerpunktsachse ebenso steht, wie vorher, so dafs er dem vorigen Kreiscylinder einbeschrieben ist. Die Spitze soll in der XY-Ebene liegen.**

Auflösung. Der Schwerpunktsabstand wird $\varrho_s = \frac{\varrho_1 + 3\varrho_2}{4}$, die gesamte Centrifugalkraft

$$p = \pi r^2 \frac{z_2}{3} \cdot \frac{\varrho_1 + 3\varrho_2}{4} = J\frac{\varrho_1 + 3\varrho_2}{4}.$$

Die X-Komponente wird

1) $$p_x = J\frac{\varrho_1 + 3\varrho_2}{4} \cdot \cos\xi_1 = J\frac{x_1 + 3x_2}{4}.$$

Der Abstand für Höhe z wird hier $\varrho_s = \frac{z(\varrho_2 - \varrho_1) + \varrho_1 z_2}{z_2}$, die Querschnittsformel wird $q = \pi r^2 \frac{z^2}{z_2^2}$ hinsichtlich der Centrifugalkraft

$$q' = \frac{\pi r^2}{z_2^2} z^2 \cdot \varrho_s = \frac{\pi r^2 z^2}{z_2^2} \cdot \frac{z(\varrho_2 - \varrho_1) + \varrho_1 z_2}{z_2}$$

$$= \frac{\pi r^2}{z_2^3}[\varrho_1 z_2 z^2 + (\varrho_2 - \varrho_1)z^3];$$

hinsichtlich deren Komponente

$$q'' = \frac{\pi r^2}{z_2^3}[\varrho_1 z_2 z^2 + (\varrho_2 - \varrho_1)z^3]\cos\xi_1;$$

hinsichtlich des Momentes in Bezug auf die Grundebene

$$q'' = \frac{\pi r^2}{z_2^3}[\varrho_1 z_2 z^3 + (\varrho_2 - \varrho_1)z^4]\cos\xi_1.$$

Demnach wird für den ganzen Körper das Centrifugalmoment

$$\sum vxz = \frac{\pi r^2}{z_2^3}\left[\varrho_1 z_2 \frac{z_2^4}{4} + (\varrho_2 - \varrho_1)\frac{z_2^5}{5}\right]\cos\xi_1$$

$$= \frac{\pi r^2}{20}[5\varrho_1 z_2^2 + 4(\varrho_2 - \varrho_1)z_2^2]\cos\xi_1$$

$$= \frac{\pi r^2 z_2}{3} \cdot \frac{3z_2}{20}[5\varrho_1 + 4\varrho_2 - 4\varrho_1]\cos\xi_1$$

$$= \frac{3Jz_2}{20}[\varrho_1 + 4\varrho_2]\cos\xi_1 = \frac{3Jz_2}{20}[x_1 + 4x_2].$$

Damit ist das betreffende Centrifugalmoment gefunden. Die Höhe des Angriffspunktes der Centrifugalkraft ist

$$h = \frac{\frac{3J}{20} z_2 (x_1 + 4x_2)}{J \frac{x_1 + 3x_2}{4}} = \frac{3}{5} z_2 \frac{x_1 + 4x_2}{x_1 + 3x_2}.$$

§ 248) Der Kugeloktant, der in die Dreikantecke des Koordinatensystems gestellt ist. Der Schwerpunkt hat die Koordinaten

$$x_s = \frac{3}{8} r, \quad y_s = \frac{3}{8} r,$$

$$z_s = \frac{3}{8} r.$$

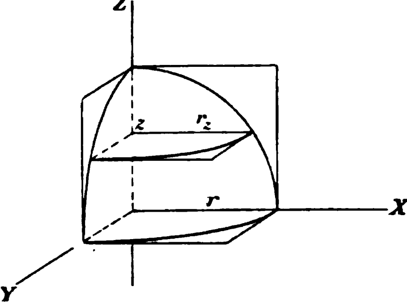


Fig. 84.

Die X-Komponente der Centrifugalkraft wird

$$1) \qquad p_x = \left(\frac{3}{8} r\right) \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{\pi}{16} r^4.$$

Die Schicht hat die Fläche $\frac{\pi}{4} r_z^2 = \frac{\pi}{4}(r^2 - z^2)$ und den Schwerpunktsabstand $x_s = \frac{4 r_z}{3\pi} = \frac{4}{3\pi} \sqrt{r^2 - z^2}$, so dafs die X-Komponente wird

$$q = \frac{\pi}{4}(r^2 - z^2) \frac{4}{3\pi} \sqrt{r^2 - z^2} = \frac{1}{3} \sqrt{r^2 - z^2}^3.$$

Das Moment dieser Komponente in Bezug auf die $X\,Y$-Ebene ist also

$$q' = \frac{1}{3} z \sqrt{r^2 - z^2}^3.$$

Die Summenformel ist hier nur anwendbar, wenn man es versteht, diesen Ausdruck in eine konvergente Reihe zu verwandeln. Man erhält mit Hilfe des binomschen Satzes

$$q' = \frac{1}{3} z (r^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}^3 = \frac{z r^3}{3}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{z r^3}{3}\left[1 - \frac{\frac{3}{2}}{1}\left(\frac{z}{r}\right)^2 + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right)}{1\,.\,2}\left(\frac{z}{r}\right)^4\right.$$

$$\left. - \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{3}{2} - 2\right)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{z}{r}\right)^6 + \ldots\right]$$

$$= \frac{r^3}{3}\left[z - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{1}\frac{z^3}{r^2} + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)}{1\,.\,2}\frac{z^5}{r^4} - \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{z^7}{r^6} + \ldots\right].$$

Diese Reihe konvergiert für $r < z$, also läfst sich auf sie die Schichtenformel anwenden, und dies giebt für den ganzen Körper

$$\frac{r^3}{3}\left[\frac{z_1^2}{2} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{1}\frac{z_1^4}{r^2\,.\,4} + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1\,.\,2}\frac{z_1^6}{r^4\,.\,6}\right.$$

$$\left. - \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{z_1^8}{r^6\,.\,8} + \ldots\right]$$

oder, um wieder auf $\left(\frac{z_1}{r}\right)^2$ u. s. w. zu kommen,

$$\frac{r^5}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{r}\right)^2 - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{1\,.\,2}\frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{r}\right)^4 + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{1}{2}\left(\frac{z}{r}\right)^6\right.$$

$$\left. - \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{r}\right)^8 + \ldots\right].$$

Die Nenner deuten jetzt auf ein mit r^5 zusammenhängendes $\frac{5}{2}$ hin, also schreibe man

$$\frac{r^5}{3.5}\left[\frac{\frac{5}{2}}{1}\left(\frac{z_1}{r}\right)^2-\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\left(\frac{z_1}{r}\right)^4+\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1.2.3}\left(\frac{z_1}{r}\right)^6\right.$$
$$\left.-\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1.2.3.4}\left(\frac{z_1}{r}\right)^8+\cdots\right].$$

Um mit 1 beginnen zu können, füge man $\frac{r^5}{3.5}-\frac{r^5}{3.5}$ hinzu und setze dabei das Minuszeichen aus der Klammer. So erhält man

$$\frac{r^5}{15}-\frac{r^5}{15}\left[1-\frac{\frac{5}{2}}{1}\left(\frac{z_1}{r}\right)^2+\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\left(\frac{z_1}{r}\right)^4\right.$$
$$\left.-\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1.2.3}\left(\frac{z_1}{r}\right)^6+\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1.2.3.4}\left(\frac{z_1}{r}\right)^8\cdots\right]$$

oder endlich

$$2)\qquad \frac{r^5}{15}-\frac{r^5}{15}\left[1-\left(\frac{z}{r}\right)^2\right]^{\frac{5}{2}}=\frac{r^5}{15}\left[1-\left(\frac{r^2-z_1^2}{r^2}\right)^{\frac{5}{2}}\right].$$

Hier hat man für z_1 als gröfste Höhe r zu setzen. Dann fällt der zweite Posten in der Klammer weg, und man erhält als das gesuchte Centrifugalmoment*)

$$3)\qquad \sum vxz=\frac{r^5}{15}.$$

---

*) Man sieht, dafs man zu Reihen-Untersuchungen genötigt wird, die es angezeigt erscheinen lassen, solche Aufgaben der Integralrechnung zu überlassen. Unüberwindlich sind aber die Schwierigkeiten auch für den elementaren Weg nicht. — Die oben entwickelte Integralformel würde sein

$$\frac{1}{3}\int_0^{z=r} dz\,.\,z\sqrt{r^2-z^2}^3=\frac{1}{3}\left|\frac{(r^2-z^2)^{\frac{5}{2}}}{-5}\right|_0^{z=r}$$
$$=\frac{1}{15}\left[\frac{(r^2-r^2)^{\frac{5}{2}}}{-1}-\frac{(r^2-0^2)^{\frac{5}{2}}}{-1}\right]=\frac{(r^2)^{\frac{5}{2}}}{15}=\frac{r^5}{15}.$$

Es ist also damit ein brauchbares Beispiel für die Integration durch Reihen gegeben.

Die Höhe des Angriffspunktes der obigen Komponente wird

4) $$h=\frac{\frac{r^5}{15}}{\frac{\pi}{16}r^4}=\frac{16}{15\pi}r,$$

also rund

$$h=\frac{16}{47,124\ldots}r$$

oder etwa mehr als $\frac{r}{3}$. — Nimmt man $z_1 < r$, so wird Formel 2) für $\sum xz$ mafsgebend und gilt für die horizontale Parallelschicht.

In ganz ähnlicher Weise lassen sich Oktanten des dreiachsigen Ellipsoids, Paraboloids, Hyperboloids behandeln, und zwar auch solche mit schrägstehenden Achsen. Aufserdem sind Oktanten der aus Parabeln höherer Ordnung entstehenden Cylinder und Drehungskörper der elementaren Behandlung fähig.

Damit sollen diese Aufgaben abgeschlossen werden.

ϑ) Die einfachsten Gleichungen der Kegelschnittsflächen, einige Andeutungen und der Satz vom Trägheitsellipsoid.

§ 249) Die einfachste Gleichung des dreiachsigen Ellipsoids. Fallen die Koordinatenachsen X, Y, Z mit den Halbachsen a, b, c zusammen, so hat nach § 198 der in der Höhe z_1 geführte Horinzontalschnitt die Halbachsen

$$x_1=\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z_1^2}\,,\ y_1=\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z_1^2}\,,$$

Die Gleichung dieser Querschnittsellipse ist

$$\frac{x^2}{x_1^2}+\frac{y^2}{y_1^2}=1,$$

oder, wenn man die Werte von x_1 und y_1 einsetzt

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}=1$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{c^2}(c^2-z_1^2).$$

Macht man die willkürlich gewählte Höhe z_1 zur veränderlichen Höhe z, so geht die Gleichung über in

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Diese Gleichung stellt die Bedingung dar, der ein Punkt x, y, z genügen mufs, wenn er auf dem genannten Ellipsoid liegen soll.

Die Gleichung läfst sich auch durch Cavalierische Erweiterung mittels des Faktors $\frac{b}{a}$ in der Richtung y und des Faktors $\frac{c}{a}$ in der Richtung z aus der einfachsten Kugelgleichung

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

leicht ableiten.

§ 250) **Die einfachste Gleichung des einmanteligen dreiachsigen Hyperboloids.** Fallen die Kordinatenachsen wieder mit den Hauptachsen dieser Fläche zusammen, so hat der in der Höhe z_1 geführte Horizontalschnitt nach § 226 die Halbachsen

$$x_1=\frac{a}{c}\sqrt{c^2+z_1^2},\quad y_1=\frac{b}{c}\sqrt{c^2+z_1^2},$$

die Querschnittsellipse hat also die Gleichung

$$\frac{x}{x_1^2}+\frac{y}{y_1^2}=1.$$

Setzt man wie vorher, die Werte von x_1 und y_1 in die Gleichung ein, und verfährt man wie vorher, so wird schliefslich die Gleichung der Hyperboloidfläche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

§ 251) **Einfachste Gleichung des dreiachsigen Hyperboloids mit zwei Mänteln.** Wählt man die in Fig. 85 dargestellte Lage, so hat die senkrechte Hyperbel die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

so dafs der Normalschnitt an der Stelle x_1 die Halbachse

$$1)\quad z_1=c\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2}-1}=\frac{c}{a}\sqrt{x_1^2-a^2}$$

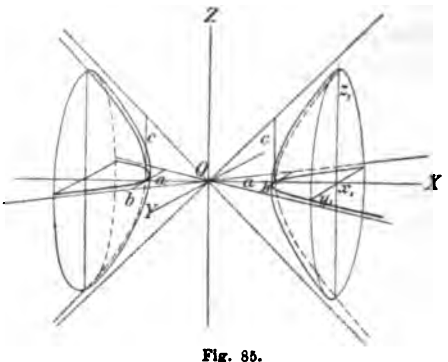


Fig. 85.

giebt. Die horizontale Hyperbel dagegen hat die Gleichung $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ und giebt bei x_1 die Halbachse

$$2)\qquad y_1=b\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2}-1}=\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2-a^2},$$

der elliptische Schnitt hat also die Gleichung

$$\frac{y^2}{y_1^2}+\frac{z^2}{z_1^2}=1.$$

Setzt man die Werte von y_1 und z_1 aus Gleichung 1) und 2) ein, so geht sie, ähnlich wie vorher über in

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{a^2}(x_1^2-a^2)$$

oder

$$-\frac{x_1}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Kehrt man die Vorzeichen um und macht man x_1 veränderlich (als x), so wird die Gleichung der Hyperboloidfläche schliefslich

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

§ 252) **Einfachste Gleichung des elliptischen Paraboloids.** Die Lage sei die in Fig. 86 dargestellte, dann ergiebt sich die Gleichung der in der XZ-Ebene liegenden Parabel aus der Proportion

$$z : z_1 = x^2 : x_1^2$$

als

1) $$x^2 = \frac{x_1^2}{z_1} z,$$

die der in der YZ-Ebene liegenden Parabel entsprechend aus

Fig. 86.

$$z : z_1 = y^2 : y_1^2$$

als

2) $$y^2 = \frac{y_1^2}{z_1} z.$$

Führt man aber die Parameter $p = \frac{x_1^2}{2z_1}$ und $p_1 = \frac{y_1^2}{z_1^2}$, so gehen die Gleichungen über in

1*) $$x^2 = 2pz,$$

2*) $$yz = 2p_1 z.$$

Der Horizontalschnitt in der Höhe z_1 hat nach diesen Gleichungen die Halbachsen

$$x_1 = \sqrt{2pz_1}, \quad y_1 = \sqrt{2p_1 z_1}.$$

Die Gleichung der Schnittellipse läfst sich also schreiben

$$\frac{x^2}{x_1^2} + \frac{y^2}{y_1^2} = 1$$

oder

3) $$\frac{x^2}{2pz_1} + \frac{y^2}{2p_1 z_1} = 1$$

oder

3*) $$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p_1} = 2z_1.$$

Macht man z_1, variabel, und schreibt man es als z, so hat man in 3) und 3*) die Gleichung für die Fläche des elliptischen Paraboloids.

§ 253. **Die einfachste Gleichung des hyperbolischen Paraboloids** war schon in § 234 in der Form

$$z = \varkappa x y$$

dargestellt worden. Die einfachsten Gleichungen der **elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Cylinder und Kegel** und ihrer Sonderfälle suche der Leser selbst aufzustellen. Sämtliche führen auf Gleichungen vom zweiten Grade.

§ 254. **Konfokale Kegelschnitte in der Ebene.** Alle Ellipsen der XY-Ebenen von der Gleichung

$$1)\qquad \frac{x^2}{e^2 + \varkappa^2} + \frac{y^2}{\varkappa^2} = 1,$$

wobei $\varkappa^2$ zwischen o und $+\infty$ liegt, sind konfokal, denn es ist $(e^2 + \varkappa^2) - (o^2 + \varkappa^2) = e^2$, so dafs die Brennpunkte die Lage $\pm e$ haben.

Ist dagegen $\varkappa^2$ zwischen o und $-e^2$ gelegen, so stellt dieselbe Gleichung eine Hyperbel dar, wie sich aus der Schreibweise

$$\frac{x^2}{e^2 + \varkappa^2} - \frac{y^2}{-\varkappa^2} = 1$$

ergiebt, in der beide Nenner positiv sind. Denkt man sich $\varkappa^2$ positiv und als $\varkappa_1^2$ geschrieben, so hat man zu schreiben

$$\frac{x^2}{e^2 - \varkappa_1^2} - \frac{y^2}{\varkappa_1^2} = 1,$$

denn $(e^2 - \varkappa^2) + \varkappa^2 = e^2$.

Verbindet man einen Punkt x, y, in dem sich zwei solche Kurven schneiden, mit den an den Stellen $x = \pm e$, $y = o$ liegenden Brennpunkten, so giebt die Halbierung des von den Radii vectores eingeschlossenen Winkels und die seines Nebenwinkels die Tangenten beider Kurven, und diese stehen auf einander senkrecht. Es handelt sich also um zwei orthogonale Scharen von Ellipsen und Hyperbeln. Jacobi, der etwa gleichzeitig mit Lamé die elliptischen

Koordinaten zuerst aufgestellt hat, schreibt die Doppelschar dieser Kurven in der Form

$$\frac{x^2}{a_1 + \lambda} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda} = 1,$$

wobei für die Ellipsen λ zwischen $-a_2$ und $+\infty$, für die Hyperbeln zwischen $-a_2$ und $-a_1$ liegen mufs.

Sind $x = x_1$ und $y = y_1$ gegeben, so giebt es stets zwei bestimmte Werte von λ, die dieser Gleichung genügen, einen, der eine Ellipse giebt, und einen, der eine Hyperbel giebt.

An Stelle der x_1 und y_1 kann man also diese beiden Werte λ_1 und λ_2 einführen, d. h. statt einen Punkt der Ebene durch die Geraden $x = x_1$ und $y = y_1$ zu bestimmen, kann man ihn auch durch die dem λ_1 entsprechende Ellipse und die dem λ_2 entsprechende Hyperbel bestimmen.

§ 255) Ähnliches geschieht im Raume. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1 + \lambda} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda} + \frac{z^2}{a_3 + \lambda} = 1$$

stellt ein Ellipsoid dar, wenn alle drei Nenner positiv sind, ein einmanteliges Hyperboloid, wenn einer davon negativ ist, ein zweimanteliges Hyperboloid, wenn zwei davon negativ sind. Ist $a_1 > a_2 > a_3$, so ist für positive a die Fläche ein Ellipsoid, sobald λ zwischen $-a_3$ und $+\infty$ liegt; ein einmanteliges Hyperboloid, sobald λ zwischen $-a_2$ und $-a_3$ liegt; ein zweimanteliges, sobald λ zwischen $-a_1$ und $-a_2$ liegt. Alle drei Arten von Flächen sind konfokal, was sich ebenso, wie vorher zeigen läfst. An Stelle der Ortsbestimmung eines Punktes im Raume durch die Ebenen $x = x_1$, $y = y_2$, $z = z_3$ kann man die Bestimmung seiner Lage durch 3 Gröfsen λ_1, λ_2, λ_3 durchführen, welche der obigen Gleichung genügen und je ein Ellipsoid, ein einmanteliges und ein zweimanteliges Hyperloid geben. Die analytische Geometrie zeigt ganz elementar, dafs die Tangentialebenen im gemeinsamen Schnittpunkte der drei Flächen auf einander senkrecht stehen, so dafs ihre Schnittlinien eine rechtwinkelige Dreikantecke bilden. Es handelt sich demnach um drei orthogonale Scharen von Flächen.

Weil dies überall geschieht, läfst sich der Raum durch solche Flächen in ein System kleiner „Rechteckszellen“ einteilen. Diese Zellen werden mit zunehmender Kleinheit schliefslich zu wirklichen kleinen Rechteckskörpern, so dafs die sämtlichen Flächen jeder Zelle als ebene Rechtecke zu betrachten sind. Liegen aber zwei

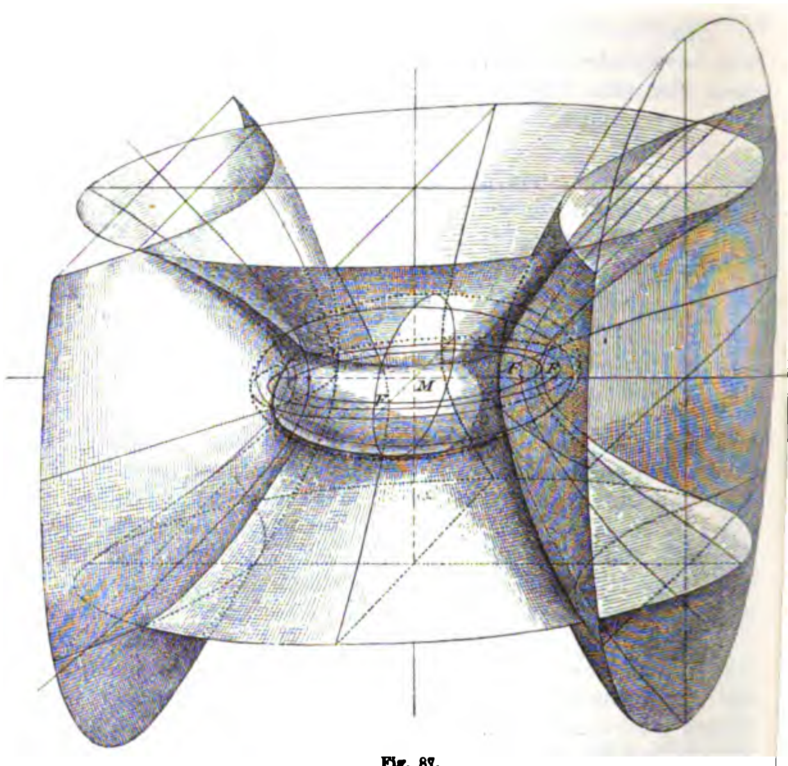


Fig. 87.

parallele Nachbarkanten, die Normalen derselben Fläche sind, in einer Ebene, so schneiden sie sich im Endlichen oder Unendlichen, kreuzen sich aber nicht. Ihre Fufspunkte gehören also einer Krümmungslinie der Fläche an. Die beiden Scharen von Hyperboloiden schneiden also jedes Ellipsoid der Schar in dessen beiden Scharen

von Krümmungslinien. Ebenso wird jedes Hyperboloid der einen (bezw. der anderen) Schar von den Ellipsoiden und den Hyperboloiden der anderen (bezw. der ersten) Schar in den Krümmungslinien geschnitten. Die Krümmungslinien jedes Ellipsoids legen sich um je zwei der von der Fokalhyperbel bestimmten Punkte als „Brennpunkte", um die sog. Nabelpunkte oder Kreispunkte.*) Jeder der drei Hauptschnitte des Ellipsoids wird durch die beiden anderen Flächenscharen in konfokalen Ellipsen und Hyperbeln geschnitten. Entsprechendes gilt von den beiden anderen Flächen. Die Sonderfälle der drei Scharen konfokaler Flächen zweiten Grades sind schon in Bd. I besprochen, besonders der Fall, wo jedes Ellipsoid in eine Kugel übergeht, während die Hyperboloide zu hyperbolischen Kegeln werden. Die Nabelpunkte sind bei der Kugel als zwei Paare von Gegenpunkten, die auf einem Hauptkreise liegen, willkürlich zu bestimmen. (Auch hier gilt die Fadenkonstruktion für die „sphärischen Kegelschnitte".

Nachdem Binet den Satz über das Schneiden der konfokalen Flächen zweiten Grades in den Krümmungslinien gefunden hatte, dehnte Dupin dessen Geltung für alle Arten von je drei orthgonalen Flächen aus. Die angegebene Betrachtung über kleine Rechteckskörper läfst sich nämlich auch für diesen allgemeinsten Fall mit zwingender Kraft wiederholeu.

Die Schlufsbetrachtungen des ersten Bandes können von hier aus zum Teil mit elementaren Hilfsmitteln weitergeführt werden.

§ 256) Wird ein Ellipsoid aus seiner einfachsten Lage gegen das Koordinatensystem entfernt, indem der Mittelpunkt nach einer beliebigen Stelle des Raumes gebracht wird, seine Hauptachse aber in beliebige Lagen gedreht werden, so ist die Gleichung in Bezug auf die alten Koordinaten wieder eine solche vom zweiten Grade. Während aber vorher nur

*) Für diese Kurven gilt die Fadenkonstruktion auf dem Ellipsoid, wobei die Kreispunkte die Rolle der Brennpunkte übernehmen. Die Kurven ermöglichen eine isothermische Einteilung der Ellipsoidfläche. Dadurch fand Jacobi die konforme Abbildung des Ellipsoids auf das ebene Rechteck und auf die ganze Ebene.

Glieder mit x^2, y^2, z^2 und ein konstantes vorhanden waren. sind jetzt auch Glieder mit xy, yz, zx vorhanden, gegebenenfalls auch solche mit x, y und z.

Entsprechendes gilt von den übrigen Flächen zweiten Grades, die oben aufgeführt wurden.

Daher darf man vermuten, dafs alle Gleichungen zweiten Grades zwischen den Variabelen x, y, z auf Kegelschnittsflächen der obigen Art führen. Die analytische Geometrie weist dies in der That nach. Jeder ebene Schnitt führt nämlich auf eine Kurve zweiten Grades, da mit der Gleichung zweiten Grades eine solche vom ersten Grade kombiniert wird. Es handelt also um Kegelschnittsflächen.

Die analytische Geometrie bestimmt auch die Lage der Hauptachsen dieser Flächen aus der Gleichung der Fläche zweiten Grades und giebt Kriterien an, welcher Gruppe von Flächen jede durch eine Gleichung zweiten Grades (für x, y, z von der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx + gx + hy + iz + k = 0)$$

dargestellte Fläche angehört, je nach den vorliegenden Konstanten.

Ist die Gleichung von der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx + k = 0,$$

so handelt es sich um eine Mittelpunktsfläche, deren Mittelpunkt im Nullpunkte des Koordinatensystems liegt, also entweder um ein Ellipsoid oder um ein Hyperboloid der beiden Hauptarten. Giebt man nämlich den sämtlichen Variabelen zugleich entgegengesetzte Zeichen, so bleibt der ganze Ausdruck doch unverändert. Der Nulldunkt mufs also Mittelpunkt sein. Sind auch d, e, f gleich Null, so handelt es sich um eine Gleichung von der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + k = 0,$$

die sich schreiben läfst

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{a}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{b}\right)^2} + \frac{c}{\left(\frac{1}{z}\right)^2} = -k.$$

Dividiert man noch beiderseits durch $-k$, so hat man eine Gleichung von der Form

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}=1,$$

die je nach den Vorzeichen eine der drei Mittelpunktsflächen darstellt, jedoch so, dafs die Koordinatenrichtungen den Hauptachsen entsprechen.

§ 257) Das Trägheitsellipsoid von Poinsot. Diese Bemerkungen hatten nur die Absicht, der Lehre von den Trägheits- und Centrifugalmomenten einen gewissen Abschlufs zu geben. Schon in § 18 wurde gezeigt, dafs man das Trägheitsmoment eines Gebildes in Bezug auf eine beliebig durch den Nullpunkt des Koordinatensystems gelegte Achse berechnen kann, sobald man die Trägheits- und Centrifugalmomente des Gebildes in Bezug auf die Koordinatenachsen x, y, z kennt. Die Berechnung hatte nach den Formeln 13) oder 15) von § 18 zu geschehen. Die eine davon war

$$1) \qquad T=\cos^2\alpha\, T_x+\cos^2\beta\, T_y$$
$$+\cos^2\gamma\, T_z-2\cos\alpha\cos\beta\, C_{xy}-2\cos\beta\cos\gamma\, C_{yz}-2\cos\gamma\cos\alpha\, C_{zx},$$

wobei α, β, γ die Winkel sind, welche die willkürlich gewählte Achse mit den Koordinatenachsen bildet.

Nimmt die Achse T beliebige Lagen an, so ändern sich nur α, β, γ, aber nicht T_x, T_y u. s. w. Man kann bei jenen Änderungen die T und C als Konstante betrachten, die der Reihe nach mit A', B', C', D', E', F' bezeichnet werden mögen.

Für eine bestimmte Lage α_1, β_1, γ_1 der Achse hat man dann das besondere Trägheitsmoment

$$2) \qquad T_1=A'\cos^2\alpha_1+B'\cos^2\beta_1$$
$$+C'\cos^2\gamma_1-2D'\cos\alpha_1\cos\beta_1-2E'\cos\beta_1\cos\gamma_1-2F'\cos\gamma_1\cos\alpha_1.$$

Poinsot wählt nun folgende graphische Darstellung. Er bestimmt für diese Achse den Ausdruck T_1 mit Hilfe der letzten Gleichung, berechnet dann $\sqrt{\frac{1}{T_1}}$ und trägt vom Nullpunkte der Koordinaten ab den letzteren Ausdruck

als die entsprechende Länge auf der Achse ab. Der so bestimmte Endpunkt der letzteren möge die Koordinaten x_1, y_1, z_1 haben. Dann ist

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1}} \cos\alpha, \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1}} \cos\beta_1, \quad z_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1}} \cos\gamma_1,$$

daraus folgt

$$\cos\alpha_1 = x_1\sqrt{T_1}, \quad \cos\beta_1 = y_1\sqrt{T_1}, \quad \cos\gamma_1 = z_1\sqrt{T_1}.$$

Man setze diese Werte in Gleichung 2) ein, dann verwandelt sie sich in

$$T_1 = A' x_1^2 T_1 + B' y_1^2 T_1$$
$$+ C' z_1^2 T_1 - 2D' x_1 y_1 T_1 - 2E' y_1 z_1 T_1 - 2F' z_1 x_1 T_1,$$

oder nach beiderseitiger Division durch T_1 in

$$1 = A' x_1^2 + B' y_1^2 + C' z_1^2 - 2D' x_1 y_1 - 2E' y_1 z_1 - 2F' z_1 x_1.$$

Denkt man sich die Richtung der Bezugsachse variabel, also die α, β, γ variabel, so werden auch die x, y, z veränderlich und man hat die Gleichung

$$3) \quad 1 = A' x^2 + B' y^2 + C' z^2 - 2D' xy - 2E' yz - 2F' zx.$$

Dies ist dann die Gleichung der Fläche, auf der die Endpunkte aller nach dieser Methode begrenzten vom Nullpunkte ausgehenden Achsen liegen. Dies ist aber die Gleichung einer Fläche zweiten Grades, und zwar die Mittelpunktsgleichung einer Mittelpunktsfläche zweiten Grades, weil sie unverändert bleibt, wenn x, y und z gleichzeitig das Vorzeichen wechseln. (Paraboloide elliptischer und hyperbolischer Art sind also im allgemeinen ausgeschlossen.)

Diese Fläche besitzt drei Hauptachsen a, b, c (absolut genommen $a > b > c$), zu denen nach der Konstruktion Trägheitsmomente

$$\sqrt{\frac{1}{A}} = a, \quad \sqrt{\frac{1}{B}} = b, \quad \sqrt{\frac{1}{C}} = c$$

gehören. Dreht man das Koordinatensystem in die Lage dieser Achsen, und nennt man die neuen Koordinaten

ξ, η, ζ, so mufs die Flächengleichung übergehen in die einfachste Form

4) $$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$$

oder

5) $$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1.$$

Wenn nun durch die Koordinatentransformation Gleichung 3) in Gleichung 5) übergegangen ist, so ist der noch zu erwartende Teil

$$-2D\xi\eta - 2E\eta\zeta - 2F\zeta\xi,$$

zu dem noch Glieder mit ξ, η, ζ allein und eine weitere Konstante treten könnten, weggefallen. In dem Oktanten z. B., der nur positive ξ und η hat, mufs jedes Glied für sich weggefallen sein, was dort nur der Fall sein kann, wenn die Centrifugalmomente D, E und F, die konstante Gröfsen sind, den Wert Null haben.

Da übrigens die Trägheitsmomente

$$A = T_\xi = \sum v(\eta^2 + \zeta^2), \quad B = T_\eta = \sum v(\zeta^2 + \xi^2),$$
$$C = T_\zeta = \sum v(\xi^2 + \eta^2)$$

positive Gröfsen sind, so ist Gleichung 5) die Gleichung eines Ellipsoids.

Dies ist das sogenannte Trägheitsellipsoid von Poinsot, welches aber eigentlich schon von Cauchy behandelt worden ist.

Das Resultat ist also folgendes:

Hat ein gegebener Körper in Bezug auf die Achsen eines beliebigen Koordinatensystems die Trägheitsmomente T_x, T_y, T_z und die Centrifugalmomente C_{xy}, C_{yz}, C_{zx}, so läfst sich das Trägheitsmoment in Bezug auf jede beliebige durch den Nullpunkt gehende Achse berechnen.

Trägt man auf jeder der neuen Achsen den Wert $\sqrt{\frac{1}{T}}$ als Länge vom Nullpunkt aus ab, so

liegen die Endpunkte der Achsen auf einem Ellipsoid, dem Poinsoitschen Trägheitsellipsoid, dessen Gleichung von der Form

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 - 2D'xy - 2E'yz - 2F'zx = 1$$

ist, wobei $A', B', \ldots F'$ die obigen Momente sind.

Jeder Halbmesser ϱ dieses Ellipsoids ist gleich dem Ausdrucke $\sqrt{\frac{1}{T}}$, also ist das zugehörige Trägheitsmoment $T = \frac{1}{\varrho^2}$, so dafs jedes Trägheitsmoment eine einfache Darstellung gefunden hat. Das Ellipsoid hat drei Hauptachsen a, b, c, von denen a der gröfste Halbmesser des Ellipsoids ist, c der kleinste. Die zugehörigen Trägheitsmomente sind

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad C = \frac{1}{c^2}.$$

Dabei ist A das kleinste Trägheitsmoment des Körpers, C das gröfste unter allen, die in Bezug auf alle durch den gewählten Nullpunkt gehenden Achsen bestimmt sind.

In Bezug auf die Ellipsoidachsen a, b und c sind die Centrifugalmomente des Körpers gleich Null.

Statt auf den durch den Nullpunkt gelegten Strahlen $\frac{1}{\sqrt{T}}$ abzutragen, hätte man, wie es bisweilen geschieht, auch

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{\frac{T}{J}}} = \sqrt{\frac{J}{T}}$$

abtragen können, was nur das Gröfsenverhältnis beeinflufst. Dabei wäre dann wie in § 114 bei der Trägheitsellipse zu verfahren.

§ 258) Das Centralellipsoid von Poinsot.

Wählt man den Schwerpunkt des Körpers als Nullpunkt des Koordinatensystems, so heifst das Trägheitsellipsoid jetzt

Centralellipsoid. Als Koordinatensystem wählt man am besten das den Achsen a, b, c entsprechende. An diesem ist die mechanische Bedeutung am besten aufzuklären.

T_a ist das kleinste, T_c das gröfste Trägheitsmoment des Körpers. Für gleiche Winkelgeschwindigkeiten bei der Drehung um die Achsen a, oder c oder um irgend welche andern Achsen ist bei der Achse a die Drehungsenergie $T\frac{\vartheta^2}{2}$ am kleinsten, bei der Achse c am gröfsten. Die Centrifugalmomente in Bezug auf die Achsen a, b, c sind gleich Null.

Bei der Drehung um jede dieser Achsen, die zugleich Schwerpunktsachsen sind, ist erstens die Resultante der Centrifugalkräfte gleich Null, zweitens auch das Centrifugalmoment gleich Null. Ruht also die Achse und erteilt man dem Körper eine Drehung um sie, so erhält die frei schwebend zu denkende Achse durch die Drehung keinen Antrieb zu fortschreitender Bewegung, aber auch keinen Antrieb zu einer Richtungsänderung. Sie ist und bleibt freiwillige Drehungsachse oder sog. freie Achse.

Hat die Achse aus sonstigen Gründen (Beharrungsbewegung, freier Fall, parabolische, hyperbolische oder elliptische Bewegung von Weltkörpern u. s. w.) eine fortschreitende Bewegung, so verschiebt sie sich stets parallel zu sich selbst und bleibt Drehungsachse.

Jeder Körper hat ein Centralellipsoid, folglich hat jeder Körper mindestens drei freie Drehungsachsen.

Ist das Centralellipsoid ein Drehungsellipsoid, so besitzt der Körper unendlich viele freie Achsen. Ist z. B. $a = b$, so ist jeder Radius des kreisförmigen Hauptschnitts eine freie Achse. Dazu kommt noch die freie Achse c.

Ist das Centralellipsoid eine Kugel, so ist jeder Radius eine freie Achse.

Bei der Drehung um eine Schwerpunktsachse, die nicht zu den freien gehört, stellt sich ein die

Achse aus ihrer Richtung bringendes Centrifugalmoment ein.

Man erkennt daraus die grundlegende Bedeutung für die Drehungstheorie der Mechanik.

§ 259) Aus der Lehre vom Trägheitsmoment kann man Sätze über das Ellipsoid ableiten, umgekehrt aus der Theorie des Ellipsoids Sätze über das Trägheitsmoment. Ein Beispiel sei dazu gegeben. Aus

$$T_{xy} + T_{xz} = T_x, \quad T_{yz} + T_{yx} = T_y, \quad T_{xz} + T_{zy} = T_z$$

in Bezug auf irgend ein System von Koordinatenachsen folgt durch Addition

$$T_x + T_y + T_z = 2\,(T_{xy} + T_{yz} + T_{zx}) = 2\,T_p.$$

Hier ist T_p das polare Trägheitsmoment, also z. B. für den Schwerpunkt eine konstante Gröfse. In der obigen Schreibweise hat man also

$$A_n + B_n + C_n = \varkappa,$$

wobei $\varkappa$ konstant ist. Für A, B, C kann man aber setzen

$$\frac{1}{a_n^2},\ \frac{1}{b_n^2},\ \frac{1}{c_n^2},$$

so dafs man hat

$$\frac{1}{a_n^2} + \frac{1}{b_n^2} + \frac{1}{c_n^2} = \varkappa.$$

Hier bedeuten a_n, b_n, c_n drei auf einander senkrechte Radien des Trägheitsellipsoids. Die Summe der Reciproken zu den Quadraten dieser Radien ist also konstant, folglich gilt für jedes Ellipsoid der Satz:

Die Summe der Reciproken der Quadrate von je drei aufeinander senkrechten Radien ist eine konstante Gröfse. Die letztere ist $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, wo a, b, c die Hauptachsen des Ellipsoids sind.

Näheres über diesen Gegenstand findet man in den Lehrbüchern der Mechanik und der graphischen Statik, wo höchst interessante Untersuchungen angestellt werden.

§ 260) **Geschichtliches über das Trägheitsmoment und das Centrifugalmoment.** Der Begriff des Trägheitsmoments wurde durch Huygens in die Physik eingeführt, der mit seiner Hilfe die Lehre vom physischen Pendel anbahnte. Der Name dagegen rührt von Euler her. Huygens gelangte bis zum Satze von der Vertauschbarkeit des Aufhängepunktes und Schwingungspunktes. (Vgl. Huygens, Opera varia, Seite 154, Satz 20.) Euler hatte bemerkt, daſs das Trägheitsmoment in der Mechanik bei Drehungen dieselbe Rolle spielt, wie sonst die Masse. So entsprechen einander hinsichtlich der geradlinigen Beschleunigung g und der Winkelbeschleunigung γ bei Drehungen (gemessen am Radius 1 die Formeln für eine Kraft bezw. für mehrere Parallelkräfte am starren Punktsystem

1) $$g = \frac{p}{m} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}},$$

oder

1*) $$g = \frac{\sum p}{\sum m} = \frac{\text{Summe der Einzelkräfte}}{\text{Summe der Einzelmassen}}$$

und für ein oder mehrere Kraftmomente, die an einem starren um eine Achse rotierenden Punktsystem wirken

2) $$\gamma = \frac{p\varrho}{T} = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}},$$

oder

2*) $$\gamma = \frac{\sum p\varrho}{\sum T} = \frac{\text{Summe der Kraftmomente}}{\text{Summe der Trägheitsmomente}}.$$

Ebenso ist die Formel für die Drehungsenergie (für sich drehende Massen) analog der Formel für die kinetische Energie geradlinig bewegter Massen, nämlich

3) $$E = \frac{mv^2}{2},$$ 4) $$E_1 = \frac{T\vartheta^2}{2},$$

bezw.

3*) $$E = \sum m \frac{v^2}{2},$$ 4*) $$E_1 = \sum \frac{T\vartheta^2}{2}.$$

Dabei ist das eine Mal v die Geschwindigkeit der geradlinigen Masse, das andere Mal ϑ die Winkelgeschwindig-

keit der Drehung, gemessen am Radius 1. Die oben behandelten Beispiele geben weitere Analogien.

Später stellte sich das Bedürfnis heraus, den Begriff des Trägheitsmomentes in die Mathematik hereinzuziehen, wobei z. B. an Stelle des Ausdrucks $\sum mr^2$ der Ausdruck $\sum vr^2$ trat, wobei v ein kleines Volumen, statt einer kleinen Masse bedeutet.

Während nun früher für den Raum nur an axiale Trägheitsmomente gedacht wurde, verlangte die Mathematik auch Planmomente und Polarmomente. Die ersteren. für die ich den Namen Planmomente zweiter Ordnung vorgeschlagen habe, wurden von Binet als Trägheitsmomente in Bezug auf eine Ebene bezeichnet, was etwas lang erscheint. Dies geschah in dem „Mémoire sur la théorie der axes conjugués et des moments d'inertie". Journal de l'Éc. polyt. cah. XVI, S. 127.

Dafs man in der Planimetrie nur Axial- und Polarmomente (für ebene Flächen oder Linien) kennt, ist selbstverständlich. Ihre Bedeutung für die Lehren von der Festigkeit (Biegungs-, Knick- und Drehungsfestigkeit), für die Schwerpunktsberechnungen bei abgeschrägten Cylindern, bei Sektoren von Drehungskörpern, für den Angriffspunkt des seitlichen Massendrucks gegen Ebenen, für die Drehungsenergie cylindrischer Körper und für sonstige mechanische Probleme ist in der Ingenieurmathematik des Verfassers durch zahlreiche Beispiele auseinandergesetzt.

Das Trägheitsellipsoid von Poinsot ist eigentlich zuerst von rein räumlichen Gesichtspunkten aus von Cauchy behandelt worden, Exercices de Math., Bd. 2, Seite 93. Poinsot aber erkannte die Bedeutung dieses Ellipsoids für die Drehungsbewegungen. Seine grundlegende Abhandlung ist die „Théorie nouvelle de la rotation des corps". Liouvilles Journal de Math. XVI, wo auf S. 58 das Centralellipsoid eingeführt wird.

Die Bestimmung des Trägheitsmomentes für Achsen von beliebiger Richtung führte auf die Ausdrücke $\sum vxy$, $\sum vyz$, $\sum vzx$, die zunächst als Centrifugalmomente bezeichnet wurden. Später wurden sie von den Engländern

als Deviationsmomente bezeichnet, zuerst von Rankine in dessen Werke „A manual of applied mechanics". In der dritten Ausgabe findet man diese Bezeichnung auf S. 522. Andere verstehen unter Deviationsmoment das resultierende Moment von je zweien der genannten Momente. Hâton de la Goupillière hat in dem „Mémoire sur une théorie nouvelle des masses", Journal de l'École polyt. XXXVII diese Bezeichnung beibehalten.

Weitere Litteratur findet man in der „Ingenieurmathematik" Bd. I. Dort wird auch das sog. zweite Trägheitsellipsoid, welches von Clebsch im 57. Bande des Crell-Journals Seite 401 eingeführt wird, behandelt. Auch in Rouths Mechanik und in Schells Theorie der Bewegung und der Kräfte findet man zahlreiche litterarische Angaben. Hier soll nicht näher auf den Gegenstand eingegangen werden, der doch in höherem Grade der Mechanik angehört.

ι) Schlufsbemerkungen.

§ 261) Die sogenannten barycentrischen Methoden, zu denen die Guldinsche Regel für Drehungskörper und Drehungsflächen, die Sätze über abgeschrägte Prismen und Cylinder und ihre Mantelflächen gehören, lassen sich zusammenfassen als eine Methode der statischen Momente, allgemeiner als eine Methode der Momente erster Ordnung, wobei es sich um Planmomente, Axialmomente und Polarmomente erster Ordnung handelt. Diese Methode erleichtert den Überblick über ein ausgedehntes Gebiet der Planimetrie und Stereometrie.

Ganz ebenso kann die Lehre von den Momenten zweiter Ordnung, bei denen es sich ebenfalls um Planmomente, Axialmomente und Polarmomente räumlicher Gebilde (Punktsysteme, Linien und Liniensysteme, Flächen und Flächensysteme, Körper und Körpersysteme) handelt, und endlich die Lehre von den Centrifugalmomenten benutzt werden, einen entsprechenden Überblick über weite Gebiete der Planimetrie und Stereometrie zu

gewinnen. Das in den beiden Abschnitten dieses Buches Gegebene bringt Beispiele dafür.

Oben sind aber nicht nur Momente erster und zweiter Ordnung behandelt worden, sondern auch Momente n^{ter} Ordnung. Auch solche von der Ordnung Null wurden behandelt.

Die einfache Inhaltsberechnung z. B. mit Hilfe der Schichtenformel (oder der Simpsonschen Regel) war nichts als eine Addition der Momente von der Ordnung Null für die aufeinander lagernden Horizontalschichten. Die Addition der Momente erster Ordnung für diese Schichten führte auf die Berechnung des statischen Momentes des Körpers in Bezug auf die Grundfläche; die der Momente zweiter Ordnung auf die Berechnung des Trägheitsmomentes in Bezug auf die Grundfläche u. s. w. Mit Hilfe dieser Formeln wurden Schwerpunkte, Trägheitsmittelpunkte, „Schwingungspunkte" u. dergl. bestimmt.

Aber auch Axialmomente und Polarmomente verschiedener Ordnung kamen zur Sprache, wobei für die ersteren konzentrische Cylinderschichten, für die anderen konzentrische Kugelschichten in Frage kamen, an deren Stelle gelegentlich auch ähnliche Schichten elliptischer Cylinder und ähnliche Ellipsoidschichten traten oder treten konnten.

Alle diese Untersuchungen könnten zusammengefaſst werden unter dem Namen einer Methode der Momente höherer Ordnung für Untersuchungen auf dem Gebiete der Planimetrie und Stereometrie, der Mechanik u. s. w.

In derselben Weise kann man die Lehre vom Newtonschen und vom logarithmischen Potential in den Dienst der geometrischen und planimetrischen Forschung stellen. In der „Ingenieurmathematik II, Potentialtheorie", hat der Verfasser gezeigt, wie weit man elementar vorgehen kann.

Es eröffnet sich also von hier aus ein Einblick in weitreichende Gebiete der Raumlehre und ihrer Anwendungen, die zum Teil noch unerforscht vor uns liegen, obwohl sie durchaus elementar sind und daher zu den Elementen gehören.

Die höhere Analysis kann selbstverständlich solche Untersuchungen auch ausführen und die geschlossenen Resultate der Differential- und Integralrechnung benutzen, statt die hier bisweilen durchgeführten Reihensummierungen zu verwenden. Aber schliefslich ist sie in den höheren Gebieten doch auch auf Summierungen der Reihen angewiesen, nach denen sich die analytischen Funktionen entwickeln lassen. Und diese Reihen sind doch die Grundlage der gesamten Weierstrafsschen Funktionentheorie. Die Methode der Reihensummierung zu verbannen, würde also eine nicht unbedenkliche Mafsregel sein. Auch ist die Möglichkeit, solche vielfach entbehren zu können, durchaus nicht ausgeschlossen, wie manche Beispiele beweisen.

Jedenfalls ist der hier angedeutete Forschungsweg ein solcher, der sich stets mit dem Wesen der Sache und der Anwendung der elementaren Grundbegriffe beschäftigt. Er zeigt auch, wie etwa die elementare Mathematik sich weiter hätte entwickeln können, wenn die Sprache der Differential- und Integralrechnung nicht zur Einführung gelangt wäre. Es handelt sich dabei um das Arbeiten mit gewissen Vorstellungsbildern, wobei auf die Vorstellungsbilder bezw. Symbole der Differential- und Integralrechnung verzichtet wird. Steiner z. B. verzichtete ganz auf die letzteren und hat trotzdem gewaltige Erfolge erzielt, auch Möbius hat mit den ihm eigenen Methoden Grofses geschaffen. Es würde höchst einseitig sein, alles den Differentialen und Integralen anheimzustellen.

Der Leser versuche also nicht nur die hier gegebenen Elementarmethoden auf sämtliche der behandelten Raumgebilde anzuwenden, sondern auch den Andeutungen entsprechend selbständig auf das Entdecken weiterer Vorstellungsbilder auszugehen.

Der Abschlufs des Buches ist also durchaus nicht ein Abschlufs der Elemente der Stereometrie — denn Baltzer, Steiner, Möbius, von Staudt, Poncelet, Chasles, Carnot und andere, auch die Potentialtheorie hätten noch weiter herangezogen werden können, und die Gleichungen dritten und vierten Grades sind noch gar nicht zur Geltung gekommen — sondern nur ein vorläufiges Abbrechen der Betrachtungen aus rein räumlichen Gründen.

Man betrachte das Ganze als eine Anregung, **die Grenzen der Elementarmathematik weiter und weiter hinauszuschieben, und zwar nicht nur hinsichtlich der Planimetrie und Stereometrie, sondern auch hinsichtlich der Mechanik, der Kartographie, der Geodäsie, der kosmischen Physik, der Potentialtheorie und anderer mathematischer Gebiete und ihrer Anwendungen.**

Dritter Abschnitt.

Nachtrag über Katenoid, Gaufssche Pseudosphäre und Minimalschraubenregelfläche.

§ 262) Nebenstehende Figur stellt eine Kettenlinie vom Parameter $OS = 1$ mit der zugehörigen Evolvente und Evolute dar. Ihre Gleichung ist $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. (Vgl. Bd. III § 122.) Die beiden letzteren Kurven sollen untersucht werden. Aus Raumgründen ist die X-Achse senkrecht gezeichnet worden. BDE ist das in Band III von Seite 127 ab untersuchte charakteristische Dreieck, in dem BD die Tangente der Kettenlinie im Punkte BBE die zugehörige Ordinate, ED die Kathete von der Länge 1, $\overline{BD}$ die Länge der Kettenlinie von B bis S ist. Demnach ist D ein Punkt der Evolvente, DE eine Tangente der letzteren. Diese Tangente hat aber stets die Länge 1, und daraus folgt, dafs die Evolvente der Kettenlinie, die vom Scheitelpunkt S ausgeht, stets eine Traktrix ist. Dazu vergleiche man Band I Seite 303. Alle anderen Evolventen der Kettenlinie sind äquidistante Kurven dieser Traktrix. Da man nach Band III die Kettenlinie mit beliebiger Genauigkeit konstruieren kann, so ist damit auch die Traktrix sowohl hinsichtlich der Punkte als auch der Tangenten ebenso genau zu konstruieren. Der auf Seite 303 des ersten Bandes gegebenen Konstruktion ist damit eine neue beigefügt.

§ 263) In Figur 88 ist $\triangle DBE \sim \triangle EFB$, also: $DE : EB = EB : BF$, oder, wenn man BF als Normale der Kurve mit n bezeichnet, $1 : y = y : n$, also $n = y^2$. Um

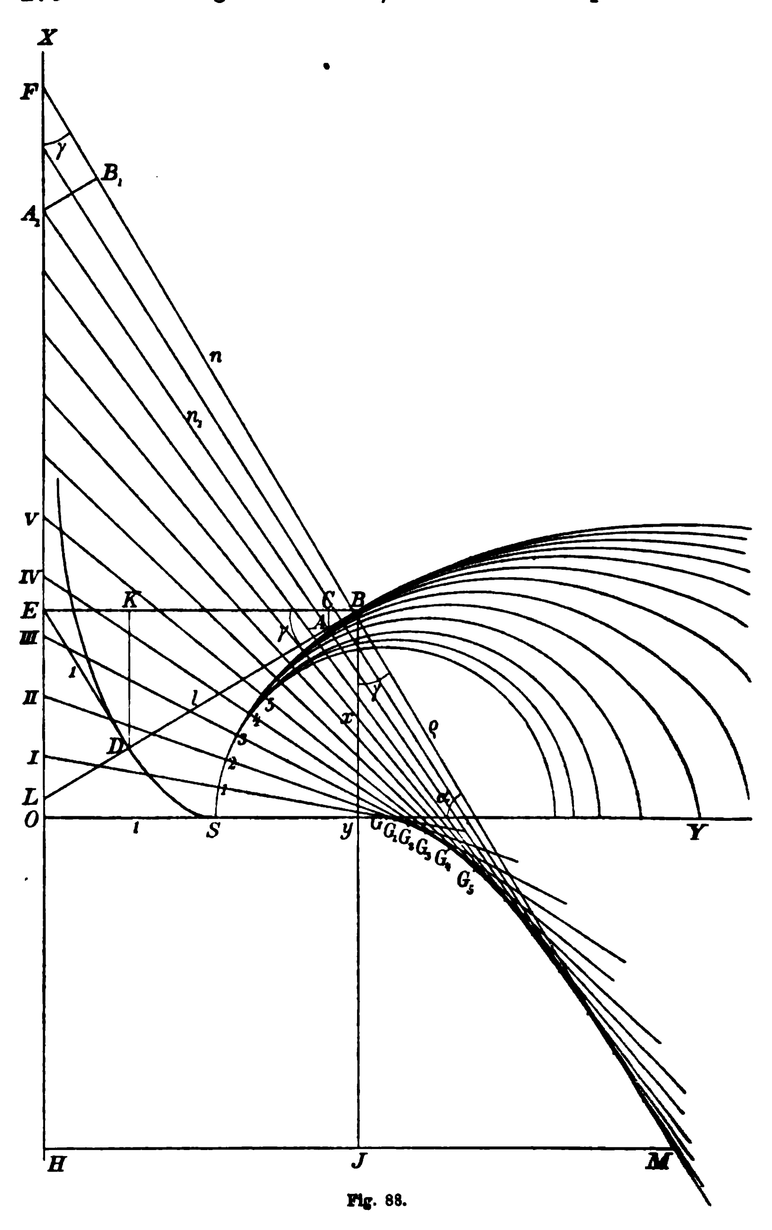


Fig. 88.

die Länge $MB = \varrho$, d. h. den Krümmungsradius der Kettenlinie zu finden, betrachte man zwei unendlich benachbarte Normalen AA_1 und BF, deren Längendifferenz gleich B_1F sei. Dabei ist $B_1F = n - n_1 = y^2 - y_1^2 = (y + y_1)(y - y_1)$, oder, da für die Grenze $y = y_1$ wird, $B_1F = 2y(y - y_1)$ Die sehr kleine Differenz $(y - y_1)$ für die Normalenausgangspunkte B und A ist aber BC oder was dasselbe ist $AB \cdot \frac{1}{\cos\gamma}$. Dagegen ist der kleine Abstand $A_1B_1 = B_1F \cdot \tan\gamma = 2y(y - y_1)\tan\gamma = 2AB \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot y\sin\gamma$, oder da im charakteristischen Dreieck $y\sin\gamma = DE = 1$ ist, $A_1B_1 = 2AB \cdot \frac{1}{\cos\gamma}$, d. h. für die Grenze ist $\widehat{A_1B_1} = 2\widehat{AB}$. Folglich ist für die Grenze im Dreieck A_1B_1M die Seite A_1M in A halbiert. Läfst man A_1A unendlich nahe an B_1F heranrücken, so ist auch die Gerade MF durch die Kettenlinie in B halbiert. Folglich: **Der Krümmungsradius BM der Kettenlinie ist gleich der Normale BF**, d. h. **es ist stets** $\varrho = n = y^2$.

§ 264) Demnach ergiebt sich für die Kettenlinie folgende praktisch brauchbare **Annäherungskonstruktion.** Ist OF die Direktrix und OS der Abstand des Scheitelpunktes S von der Direktrix, so mache man $GS = 1$ und schlage um G mit dem Radius GS einen Kreis, den kleinsten Krümmungskreis der Kurve. Darauf ziehe man einen benachbarten d. h. sehr naheliegenden Radius $\overline{G1}$ bis zum Schnittpunkte I mit der Direktrix und schneide auf ihm von 1 aus nach rechts die Strecke $\overline{1I}$ ab, was den folgenden Krümmungsradius sehr genau als $\overline{1G_1}$ giebt. Um G_1 schlage man mit diesem Radius einen zweiten Krümmungskreis. In diesem ziehe man einen neuen Nachbarradius $\overline{G_12}$ bis zum Durchschnitt II mit der Direktrix und trage auf ihm von 2 aus nach rechts die Strecke $II\,2$ ab, was den folgenden Krümmungsradius $\overline{2G_2}$ giebt. Mit dieser Konstruktion fahre man beliebig weit fort. **Die Kreise schattieren um so genauer die gesuchte Kettenlinie aus, je dichter die Radien auf einander folgen.** Die Radien $\overline{SG}$, $\overline{1G_1}$, $\overline{2G_2}$ u. s. w. schattieren die Evolute der Kettenlinie aus und berühren sie in den Punkten $G, G_1, G_2 \ldots$

§ 265) Die Gleichung der Evolute ergiebt sich, wenn man die Koordinaten von M mit ξ und η bezeichnet, folgendermafsen: Im Dreieck MHF ist, da B der Halbierungspunkt von MF ist, $MH = 2BE$, d. h. der Abstand $\eta = 2y$. Im Dreieck MJB ist $MB^2 = MJ^2 + BJ^2$, oder, da $MJ = BE = y$, $AB = (\xi - x)$ ist (ξ und x sind in der Figur entgegengesetzt gerichtete Koordinaten) $\varrho^2 = (\xi - x)^2 + y^2$ oder $y^4 = (\xi - x)^2 + y^2$. Hier setze man für y ein $\frac{\eta}{2}$, für x den aus der Gleichung $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ folgenden Ausdruck $x = {}^{e}lg\,[y + \sqrt{y^2 - 1}]$ oder, indem man y durch $\frac{\eta}{2}$ ersetzt,

$$x = {}^{e}lg\left(\frac{\eta}{2} + \sqrt{\frac{\eta^2}{4} - 1}\right) = {}^{e}lg\,\frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - 4}}{2}.$$

Die pythagoreische Gleichung geht dadurch über in

$$\frac{\eta^4}{16} = \left(\xi - {}^{e}lg\,\frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - 4}}{2}\right)^2 + \frac{\eta^2}{4}$$

oder in

$$1) \qquad \xi = \frac{\eta\sqrt{\eta^2 - 4}}{4} + {}^{e}lg\,\frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - 4}}{2}.$$

Dies ist die Gleichung der Evolute.

§ 266) Ebenso leicht ist die Gleichung der Evolvente, d. h. der Traktrix zu ermitteln. Man bezeichne jetzt die Koordinaten des Kurvenpunktes D mit ξ und η. Im charakteristischen Dreiecke BDE ist nach Pythagoras $DE^2 = EK \,.\, EB = \eta \,.\, y$, also, da $DE = 1$ ist, $\eta \,.\, y = 1$ und $y = \frac{1}{\eta}$. Aufserdem ist dort $DK^2 = EK \,.\, KB$ oder $(x - \xi)^2 = \eta \,.\, (y - \eta)$. Hier ersetze man y durch $\frac{1}{\eta}$ und, ähnlich wie oben, x durch ${}^{e}lg\,[y + \sqrt{y^2 - 1}]$ oder

$${}^{e}lg\left[\frac{1}{\eta} + \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1}\right] = {}^{e}lg\,\frac{1 + \sqrt{1 - \eta^2}}{\eta}.$$

Die Höhengleichung geht dadurch über in

$$\left[{}^{e}lg\,\frac{1+\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}-\xi\right]^2=\eta\left(\frac{1}{\eta}-\eta\right)=1-\eta^2,$$

was sich leicht umformt zu

$$2)\qquad \xi={}^{e}lg\,\frac{1+\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}-\sqrt{1-\eta^2}.$$

Dies ist die Gleichung der Evolvente, d. h. der Traktrix für den Parameter 1.

Denkt man sich um E mit dem Radius 1 einen Kreis geschlagen, so wird dieser von der Traktrix orthogonal geschnitten. Daraus folgt: Die Orthogonalkurve gleich grofser Kreise, die ihre Mittelpunkte auf einer Geraden haben, ist eine Traktrix.

Im Dreieck BEL ist $DL\,.\,DB=DE^2=1$ (abgesehen vom Vorzeichen), also $DL=\frac{1}{DB}$. Nun ist DL die Normale der Traktrix, DB der entsprechende Krümmungsradius. Daraus folgt: Das Produkt aus der Normale und dem Krümmungsradius ist für alle Punkte der Traktrix konstant, nämlich gleich dem Quadrate des Parameters. (Letzterer ist hier gleich 1.)

Bei der Kettenlinie ist dasselbe Produkt gleich y^4, also proportional der vierten Potenz des Abstandes von der Direktrix.

§ 267) Läfst man die Figur 88 um die Direktrix rotieren, so entsteht ein Katenoid, eine Gaufssche Pseudosphäre und aufserdem der Drehungskörper (positiver Krümmung) der Evolute.

Für das Katenoid ergeben sich die zum Punkte B gehörigen Hauptkrümmungsradien als

$$3)\qquad \varrho_1=y^2,\quad \varrho_2=-y^2,$$

und daraus folgt

$$4)\qquad \frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=0.$$

Den Ausdruck $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ bezeichnet man als die **mittlere Krümmung** einer Fläche. Für das Katenoid also folgt der Satz:

Die mittlere Krümmung des Katenoids ist konstant und überall gleich Null.

[Dies ist nur ein Sonderfall eines allgemeinen Satzes über Minimalflächen.]

Aufserdem folgt aus den Gleichungen 3) und 4)

$$5)\qquad \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{1}{y^4}$$

und damit der Satz:

Beim Katenoid ist das Gaufssche Krümmungsmafs umgekehrt proportional der vierten Potenz des Abstandes von der Achse.

Für die Traktrix folgt aus Dreieck BEL die Gleichung $DB.DL = -DE^2 = -1$, oder wenn man die Hauptkrümmungsradien für die Stelle D mit r_1 und r_2 bezeichnet,

$$6)\qquad \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} = -1,$$

wodurch sich die Fläche als **Fläche konstanten negativen Krümmungsmafses** bestätigt. Ihre mittlere Krümmung ergiebt sich als

$$7)\quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1} - \frac{r_1}{1} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} - \sqrt{y^2-1} = \frac{2-y^2}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Die zu den Kreisschnitten des Katenoids gehörigen Tangentenkegel werden von der Pseudosphäre orthogonal geschnitten, die zu den Kreisschnitten der Evolutenfläche gehörigen ebenso vom Katenoid.

§ 268) Soll eine Drehungsfläche Minimalfläche sein, so mufs nach Guldin der Schwerpunkt des rotierenden ebenen Bogens möglichst nahe an der Drehungsachse liegen, was auf die Kettenlinie führt, und aufserdem mufs die Drehungsachse Direktrix des letzteren sein. Dies ist in Band III nachgewiesen. Daraus folgt:

Unter den Drehungsflächen giebt es nur eine einzige Minimalfläche, nämlich das Katenoid.

Jede Schraubenregelfläche läfst sich im allgemeinen auf ein Drehungshyperboloid abwickeln, die Minimalschraubenregelfläche auf ein Katenoid. Die Verbiegungsflächen des Drehungshyperboloids und die der Minimalschraubenregelfläche, insbesondere die so entstehenden Regelflächen, lassen sich demnach auf Drehungsflächen abwickeln. [Beiläufig sei bemerkt, dafs dies die einzigen Regelflächen sind, bei denen dies möglich ist, dafs ferner die Minimalschraubenregelfläche unter allen Regelflächen die einzige ist, die den Charakter einer Minimalfläche hat.]

§ 269) Von Wichtigkeit ist auch noch folgender Satz: **Rollt eine Parabel ohne zu gleiten auf einer Geraden, so bewegt sich der Brennpunkt auf einer Kettenlinie.**

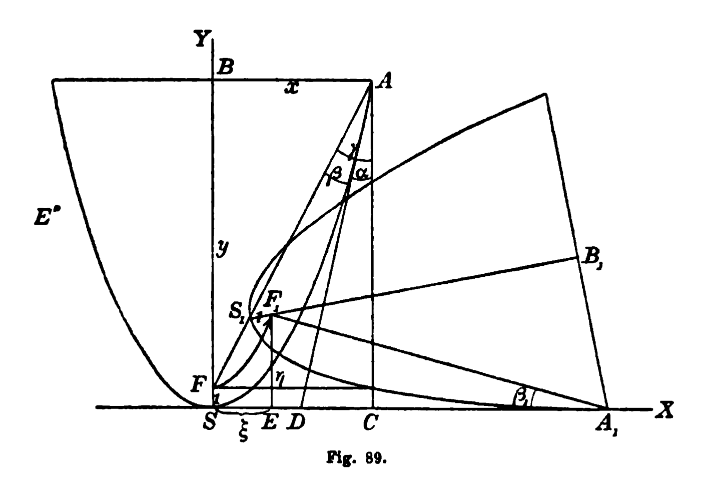


Fig. 89.

Figur 89 stellt den Vorgang dar. Die Bewegung gehe von der Scheitelstellung aus. Die Koordinaten des Punktes A seien x und y, der Parameter der Parabel sei gleich 2, damit $SF = 1$ werde, die Gleichung der Parabel also

1) $$x^2 = 2py = 4y.$$

Die Länge der Parabel von S bis A ist nach der in Band III, Seite 103 gegebenen Rektifizierungsformel [da dort des Mafsstabs wegen rechts statt y zu schreiben ist $\frac{x}{2p}$, links $\frac{l}{2p}$]

$$l=\frac{1}{2}\left[\frac{x}{p}\sqrt{p^2+x^2}+p\,{}^e lg\,\frac{x+\sqrt{p^2+x^2}}{p}\right]$$

also hier

$$2)\qquad l=\frac{x}{4}\sqrt{x^2+4}+{}^e lg\,\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}.$$

Rollt dieser Teil der Peripherie auf der Geraden SX ab, so gelangt die Parabel in die zweite der gezeichneten Lagen, und dabei wird $SA_1=l$ und $\sphericalangle SA_1F_1 = \sphericalangle DAF=\beta$, wobei AD die Tangente der Parabel bedeutet. Daraus folgen für F_1 die Koordinaten

$$3)\qquad \eta=A_1F_1\sin\beta=AF\sin\beta$$

und

$$4)\qquad \xi=SA_1-EA_1=l-A_1F_1\cos\beta=l-AF\cos\beta.$$

Dadurch ist der Gang der Rechnung vorgeschrieben.

Zunächst ist in Figur 89

$$\tan\gamma=\frac{x}{y-1},\quad \tan\alpha=\frac{DC}{CA}=\frac{x}{2y}$$

(vergl. Tangentenkonstruktion für die Parabel), also

$$\tan\beta=\tan(\gamma-\alpha)=\frac{\tan\gamma-\tan\alpha}{1+\tan\gamma\tan\alpha}=\frac{xy+x}{2y^2-2y+x^2}.$$

Daraus folgt

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}=\frac{2y^2-2y+x^2}{\sqrt{(2y^2-2y+x^2)^2+(xy+x)^2}}$$

$$\sin\beta=\frac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}=\frac{xy+x}{\sqrt{(2y^2-2y+x^2)^2+(xy+x)^2}}.$$

Endlich ist noch

$$A\,F = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}.$$

Setzt man die entsprechenden Werte in Gleichung 3) ein, so wird

$$\eta = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \cdot \frac{x\,y + x}{\sqrt{(2\,y^2 - 2\,y + x^2)^2 + (x\,y + x)^2}},$$

oder, da der Nenner sich durch die erste Wurzel ohne Rest teilen läfst,

$$\eta = \frac{x\,y + x}{\sqrt{x^2 + 4\,y^2}},$$

oder, wenn man nach Gleichung 1) y durch $\frac{x^2}{4}$ ersetzt,

5) $$\eta = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4}.$$

Entsprechend wird

$$A\,F\cos\beta = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \cdot \frac{2\,y^2 - 2\,y + x^2}{\sqrt{2\,y^2 - 2\,y + x)^2 + (x\,y + x)^2}}$$

$$= \frac{2\,y^2 - 2\,y + x}{\sqrt{x^2 + 4\,y^2}},$$

oder wenn man wieder y durch $\frac{x^2}{4}$ ersetzt, gleich $\frac{x}{4}\sqrt{x^2 + 4}.$

Demnach wird (nach Gleichung 4)

$$\xi = l - A\,F\,.\cos\beta = \left[\frac{x}{4}\sqrt{x^2 + 4} + {}^{e}lg\,\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right]$$

$$- \frac{x}{4}\sqrt{x^2 + 4}$$

oder

6) $$\xi = lg\,\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}.$$

Dafür kann man schreiben

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} = e^{\xi}.$$

Daraus folgt

$$\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}=e^{-\xi}.$$

Durch Addition und Halbierung folgt daraus (unter Berücksichtigung von Gleichung 5)

$$\frac{e^{\xi}+e^{-\xi}}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}+\frac{2\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}+\frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}\right]=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}=\eta.$$

Demnach besteht für ξ und η die Beziehung

7) $$\eta=\frac{e^{\xi}+e^{-\xi}}{2}.$$

Dies ist die Gleichung einer Kettenlinie und damit ist die Behauptung bewiesen.

Daraus folgt für die durch Drehung um die Direktrix entstehende Fläche:

Die Drehungsfläche der vom Brennpunkte einer (auf der Geraden) rollenden Parabel beschriebenen Kurve ist ein Katenoid, d. h. eine Fläche von der konstanten mittleren Krümmung Null.

[Auch dieser Satz ist nur ein Sonderfall eines allgemeineren. Die Drehungsflächen, die in entsprechender Weise aus den Brennpunktswegen rollender Ellipsen und Hyperbeln hervorgehen, sind ebenso Flächen konstanter mittlerer Krümmung, wie Delaunay bewiesen hat. Positiv ist diese Krümmung für die elliptischen Fälle, negativ für die hyperbolischen, Null für die parabolischen. Unduloid und Nodoid sind die Namen der Flächen für den elliptischen bezw. hyperbolischen Fall. — Man wird erkennen, dafs die oben angewandte Methode in den Fällen die Ermittelung

der Rollkurvengleichung ermöglicht, in denen die Rektifikation der rollenden Kurve bekannt ist und Gleichungschwierigkeiten nicht auftreten.]

§ 270) Die sphärische Abbildung der Katenoidfläche auf die Kugel giebt die konforme Abbildung der ersteren auf die letztere.

Beweis. Die sphärische Abbildung des Katenoids auf die Kugel im Gaufsschen Sinne wird nach Band I Seite 293 gefunden, indem man in der Kugel Radien zieht, die den Normalen der ersteren Fläche parallel sind. Die Endpunkte der Radien sind den Fufspunkten jener Normalen zugeordnet. Da es sich um Drehungsflächen handelt, kann man sich auf einen ebenen Hauptschnitt beschränken. Nimmt man die in Fig. 88 nach oben gehenden Normalen, so entsprechen die Winkel γ den Polabständen auf der Kugel.

Nach Band III Seite 140 erhält man die quadratische (isothermische) Einteilung des Katenoids mit Hilfe von Normalschnitten zur Achse, die unter gleichen Abständen aufeinanderfolgen. Dies giebt zugleich die Übertragung der quadratischen Einteilung auf den einbeschriebenen Cylinder des Katenoids. Die kleinen Quadratseiten auf dem Cylinder verhalten sich zu den Quadratseiten auf dem Katenoid wie $1:y$, oder, da dort $\sin\gamma = \frac{y}{n} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y}$ ist, wie $1:\frac{1}{\sin\gamma}$ oder wie $\sin\gamma:1$.

Ist aber auf der Kugel der Polabstand der zugeordneten Punkte ebenfalls durch γ gegeben, so verhalten sich bei der konformen Abbildung des Cylinders auf die Kugel die Seiten der einander entsprechenden kleinen Quadrate nach Band I Seite 252 und Band II Seite 379 ebenfalls wie $\sin\gamma:1$.

Die konforme Abbildung des Cylinders auf die Kugel vermittelt aber die des Katenoids auf die Kugel. Es sind also zur konformen Übertragung nur Radien nötig, die zu den unter γ gegen die Achse geneigten Normalen der Fig. 88 parallel sind. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Will man das Resultat aus der Fig. 88 durch Rechnung ableiten, so kann man folgendermafsen verfahren und direkt

auf die in Band II Seite 379 gegebene Formel für die Äquatorialabstände gelangen. Aus

$$\sin\gamma = \frac{1}{y} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

folgen für den Äquatorialabstand $\varphi = 90^0 - \vartheta$ die Formeln

$$\cos\varphi = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Für den halben Winkel ist

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \tan^2\varphi}}{\tan\varphi} = \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Daraus folgt durch Einsetzung der Werte

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{e^{2x} + 1 - 2e^x}{e^{2x} - 1},$$

also wird

$$e^x = \frac{1 + \tan\frac{\varphi}{2}}{1 - \tan\frac{\varphi}{2}} = \tan\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$$

und

$$x = lg\,\frac{1 + \tan\frac{\varphi}{2}}{1 - \tan\frac{\varphi}{2}} = \tan\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Dies stimmt mit der in Band II Seite 379 gegebenen Formel überein, nur ist $-x$ an Stelle von x zu setzen, was jedoch ohne Belang ist und nur mit der willkürlichen Wahl der Koordinatenrichtung in Figur 88 zusammenhängt. Damit ist die Richtigkeit der Behauptung ebenfalls bewiesen.

Führt man in der Figur die quadratische Einteilung des Katenoids aus, und zwar mit Hilfe der Projektion der quadratischen Einteilung des Cylin-

ders auf das Katenoid, und zieht man dann die entsprechenden Normalen und die ihnen parallelen Radien der Kugel, so hat man eine geometrische Elementar-Konstruktion für die Übertragung der Mercatorkarte auf die Kugel. Auch die umgekehrte Übertragung ist damit erledigt.

Die obigen Darlegungen sind also auch von kartographischem Interesse.

[Auch der hier bewiesene Satz ist nur ein Sonderfall eines allgemeineren, denn Bonnet hat bewiesen, dafs die sphärische Abbildung jeder Minimalfläche eine konforme ist. Ihre konformen Abbildungen auf einander hängen also ebenso zusammen, wie die entsprechenden konformen Abbildungen der Kugelflächen aufeinander.]

§ 271) Die Kettenlinie ist ein interessantes Beispiel zu den in Band III auf Seite 99 besprochenen imaginären Schreibweisen. Dort zeigte sich, dafs die gleichseitige Hyperbel gewissermafsen die imaginäre Fortsetzung der Hyperbel ist, und schon in Band II Seite 294 wurde das aus der ersteren entstehende zweifache Drehungshyperboloid als Fortsetzung der Kugel betrachtet. Es fragt sich, ob ähnliches bei der Kettenlinie bezw. beim Katenoid stattfindet.

Die Gleichung der Kettenlinie ist

1) $$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

oder

2) $$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

Dafür kann man, ohne dafs sich etwas ändert, schreiben

3) $$e^x = y + i\sqrt{1 - y^2},$$

wo $i = +\sqrt{-1}$ ist. Für reelles $y > 1$ steht rechts nur scheinbar Imaginäres. Für $y < 1$ dagegen wird die rechte Seite ebenso, wie in Gleichung 2) komplex. Im letzteren Falle kann also links auch x nicht reell bleiben. Was ist dann dafür zu schreiben?

Jede komplexe Gröfse läfst sich auf die Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ bringen. Aus

$$4)\qquad y + i\sqrt{1-y^2} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

folgt durch Gleichsetzung der reellen und imaginären Teile

$$y = r\cos\varphi,\quad \sqrt{1-y^2} = r\sin\varphi.$$

Durch Quadrierung und Addition folgt

$$r^2(\cos^2\varphi + i\sin^2\varphi) = y^2 + 1 - y^2 = 1,$$

oder, da die Klammer auch gleich 1 ist, $r = 1$. Daraus aber folgt $y = \cos\varphi$, was von selbst mit $\sin\varphi = \sqrt{1-y^2}$ zusammenstimmt. Die Gleichung 4) wird also

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = y + i\sqrt{1-y^2}$$

oder

$$e^{\varphi i} = y + i\sqrt{1-y^2}.$$

Der Vergleich mit 3) zeigt, dafs man für x eine rein imaginäre Zahl zu schreiben hat. Hätte man statt φ von vornherein x geschrieben, so hätte man erhalten

$$5)\qquad e^{xi} = y + i\sqrt{1-y^2}.$$

Gleichung 1) aber würde übergegangen sein in die auch aus 5) folgende

$$6)\qquad y = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \cos x.$$

Das Resultat ist folgendes:

Sobald $y > 1$ ist, sind 1) und 2) Gleichungen der Kettenlinie. Diese Gleichungen verlieren ihre Bedeutung, sobald $y < 1$ ist. Sollen sie auch für $y < 1$ eine Bedeutung erhalten, so ist eine Änderung nötig, die darin besteht, dafs man xi statt x schreibt. Dadurch aber geht Gleichung 1) über in die einfache Gleichung

$$7)\qquad y = \cos x,$$

d. h. in die Gleichung einer Kurve, die sich von der durch $y = \sin x$ dargestellten Sinuskurve nur durch eine Verschiebung um die Strecke $\frac{\pi}{2}$ auf der X-Achse unterscheidet. Folglich:

Die imaginäre Fortsetzung der Kettenlinie ist eine Sinuskurve.

(Beide Kurven gehören also ebenso zusammen, wie die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ oder $x^2 + (iy)^2 = 1$ und der Kreis $x^2 + y^2 = 1$. In den Scheitelpunkten berühren sie einander.)

Führt man die von Gudermann aufgestellten hyperbolischen Funktionen mittels der Gleichungen

$$\mathfrak{Cof}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ein, so lautet die Gleichung der Kettenlinie

8) $$y = \mathfrak{Cof}\, x.$$

Läfst man die Figur um die Y-Achse rotieren, so hat man den besprochenen Zusammenhang zwischen dem Katenoid und der aus der Sinus-Kurve entstehenden Drehungsfläche.

Mit Hilfe der Gleichung 8) läfst sich also eine ganz neue Behandlung dieser Fläche durchführen, wobei sich zahlreiche Eigenschaften in einfachster Weise ergeben.

§ 272) Über die Schraubenlinie sei folgende Bemerkung gemacht. Man kann sie sich dadurch entstanden denken, dafs ein Kreisschnitt des Kreiscylinders sich mit konstanter Geschwindigkeit um die Cylinderachse dreht, während sich sein Mittelpunkt auf der Achse mit konstanter Geschwindigkeit verschiebt. Jeder Kreispunkt beschreibt dann eine Schraubenlinie. Steht dabei der Cylinder senkrecht auf horizontaler Ebene und wird er von der Sonne irgendwie beleuchtet, so ist der Schatten (die Projektion) des Kreises stets ein Kreis, der sich mit konstanter Geschwindigkeit dreht, während sein Mittelpunkt sich mit

konstanter Geschwindigkeit auf einer Geraden bewegt. Jeder Punkt des Schattenkreises beschreibt also eine cyklische Kurve. Stimmt die Neigung der Sonnenstrahlen mit dem Steigungswinkel der Schraubenlinie überein, so ist der Schatten der Schraubenlinie eine gewöhnliche Cykloide. Fallen die Sonnenstrahlen steiler ein, so entsteht eine sogenannte verlängerte, mit Schleifen versehene Cykloide; fallen sie weniger steil ein, so entsteht eine verkürzte Cykloide ohne Schleifen oder Rückkehrpunkte.

Diese cyklischen Kurven sind bekanntlich der elementaren Konstruktion und Berechnung zugänglich. (Vergl. z. B. die Schriften von Zehme, Iserlohn 1854 und Weissenborn, Eisenach 1856 über diese Kurven.)

§ 273) Soll demnach die Minimalschraubenregelfläche in der entsprechenden Parallelperspektive mit Winkel 90° für die horizontal nach hinten gehenden Linien gezeichnet werden, so wird jede ihrer Schraubenlinien eine der genannten cyklischen Kurven. Daraus ergiebt sich mit Hilfe der in Bd. I Seite 71 bis 75 gegebenen Schrägperspektive des Kreises eine einfache Konstruktion derselben Schraubenlinien in schräger Parallelperspektive, und auch die Centralperspektive ist leicht zu erledigen.

Da nun die senkrechte Projektion der Schraubenlinie auf einen Hauptschnitt ihres Cylinders eine Sinoide giebt, so steht nach obigem die Schraubenlinie zum Kreis, zur Kettenlinie, zur Traktrix, zur Sinoide und zu den cyklischen Kurven, besonders zur gewöhnlichen Cykloide in einfachen Beziehungen. Von jeder dieser Kurven aus kann man also Eigenschaften der übrigen in einfacher Weise ableiten.

Was von der Minimalschraubenregelfläche gesagt ist, versuche der Leser auf andere Schraubenregelflächen, insbesondere auf die abwickelbare und auf Schraubenflächen allgemeinerer Art, z. B. auf die Schraubenröhrenfläche, auszudehnen. Auch hierin liegt reichhaltiger Übungsstoff für die darstellende Geometrie. Analoge Übungen sind auch für die allgemeinen Röhrenflächen des dritten Bandes möglich.

§ 274) Geschichtliche Bemerkungen zum Nachtrag. Die Delaunayschen Sätze findet man in der Abhandlung „Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante. Liouvilles Journal IV, 1841. Über denselben Gegenstand berichtet allgemeiner Lindelöf in den Mémoires de la Société des Sciences de Finlande. Während Mansion die von den Brennpunkten rollender Kegelschnitte beschriebenen Kurven als Delaunaysche Kurven bezeichnet, schlägt Lindelöf die Bezeichnung als elliptische, hyperbolische und parabolische Kettenlinien vor. Da von Kettenlinien nur in dem einen Falle die Rede sein kann, während die Parabel schon als Kettenbrückenlinie eine Rolle spielt, wird der Vorschlag schwerlich durchdringen.

Spitzer behandelte die von der Ellipse auf diese Weise erzeugten Kurven im Archiv der Math. Band 150 (1868).

Bonnet hat in den Compt. rendus von 1853 bewiesen, dafs die sphärische Abbildung von Minimalflächen stets winkeltreu ist.

Über Minimalschraubenflächen im allgemeinen hat Scherk geschrieben.

Den Satz, dafs die Minimalschraubenfläche die einzige Regelfläche mit dem Charakter einer Minimalschraubenfläche sei, hat Catalan ausgesprochen.

Nach Bour ist jede Schraubenfläche auf eine Krümmungsfläche abwickelbar. Die einzige Krümmungsfläche, welche Minimalfläche ist, ist aber nach Band III das Katenoid (vergl. Schwerpunktslage der Kettenlinie). Giebt es nun neben der Minimalschraubenregelfläche noch andere Minimalschraubenflächen, die also nach Bour auf Krümmungsflächen abwickelbar sind, müssen dann diese nicht auf das Katenoid, also auch auf die Minimalschraubenregelfläche abwickelbar sein?

Den Satz, dafs das Schrägbild der gewöhnlichen Schraubenlinie (auf dem Normalschnitt zur Achse) eine cyklische Kurve ist, scheint Montuclas zuerst bemerkt zu haben. Vergl. Histoire des math. Paris, 1799, II 78.

Über die Kettenlinie hat Mannheim in Liouvilles Journal, 2. Ser. IV, 1859 Seite 103 noch folgenden Satz

bewiesen, der eine weitere Beziehung zur Parabel giebt: Rollt die Kettenlinie auf einer Geraden, so ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte für die aufeinanderfolgenden Berührungspunkte eine Parabel.

Wird ein Segel zwischen parallelen Stangen ausgespannt, so wirkt der Winddruck auf jeden Parallelstreif genau ebenso, wie die Schwerkraft auf jeden Teil der doppelt aufgehängten Kette. Die so entstehende Segelkurve ist also eine Kettenlinie. (Jac. Bernoulli, Opera, I Seite 59 bis 61.) Die so entstehende Cylinderfläche, deren Basis die Kettenlinie ist, hat demnach eine gewisse praktische Bedeutung.

Sachregister.*)

*) Die römischen Zahlen bedeuten den Band, die arabischen die Seitenzahlen.

Namenregister.

Herrosé & Ziemsen, Wittenberg.

NOV 9 1912




3 2044 079 969 093